Z 37
v.117

YALE UNIVERSITY
LIBRARY

STERLING
CHEMISTRY LABORATORY

WITHDRAW

Republication to complete this periodical formerly reproduced and distributed in the public interest by United States Office of Alien Property Custodian.
Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., Ann Arbor, Michigan, U.S.A. The quality of this reprint is determined by the printing and paper in the original copy used.
Published by J. W. EDWARDS, *PUBLISHER*, for Foreign Periodicals, Inc., Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON

H. GEIGER

117. BAND

Mit 314 Textfiguren

SPRINGER-VERLAG, BERLIN

1941

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

I

237
V.117

Inhalt des 117. Bandes.

1. und 2. Heft.

(Abgeschlossen am 28. Dezember 1940.)

Seite

F. Hund, Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Oktober 1940) . . 1

J. A. M. v. Liempt und **J. A. de Vriend,** Die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen. III. (Eingegangen am 2. Oktober 1940) 18

Walter Glaser, Zur Herleitung der Geschwindigkeitsformel in der Elektronentheorie der Metalle. (Eingegangen am 21. Oktober 1940) 20

Helmut Schwarz, Der Mechanismus der elektrischen Gasaufzehrung bei Drucken unterhalb 10^{-4} Torr. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1940) 23

Karl Mehnert, Lichtanregung in leichtem und schwerem Wasserstoff durch Caesiumionen von 2500 bis 25000 e-Volt. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1940) 41

Karl Mehnert und **Werner Maurer,** Umladung mit gleichzeitiger Anregung beim Alkaliionenstoß gegen Wasserstoff, Helium und Quecksilber. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1940) 55

E. Rohloff, Über die innere Reibung von Geigenholz. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 8. November 1940) 64

A. Recknagel, Über die sphärische Aberration bei elektronenoptischer Abbildung. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG-Berlin.) (Eingegangen am 12. November 1940) 67

W. Dahlke und **G. Hettner,** Die Leistungsgrenze thermischer Strahlungsmeßinstrumente. (Eingegangen am 11. November 1940) 74

M. Hüniger und **J. Rudolph,** Über den Aufbau zinnhaltiger Halogenidleuchtstoffe. Mit 17 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Oktober 1940) 81

Hans Betz, Die Diffusion von Wasserstoff durch Eisen in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit und ihre Beziehung zur Katalyse. (Mitteilung aus dem Institut für Allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.) Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 4. November 1940) 100

Seite

F. Möglich und **R. Rompe,** Zur Statistik der Vielfachstöße. (Eingegangen am 16. November 1940) 119

Ivan Supek, Über die elektrische Leitfähigkeit der Metalle. (Eingegangen am 23. November 1940) 125

---

3. und 4. Heft.

(Abgeschlossen am 20. Januar 1941.)

Ludolf Jenckel und **Hans Kopfermann,** Über eine Methode zur Beobachtung sehr kleiner Stark-Effekte. Mit 8 Abb. (Eing. am 30. Oktober 1940) . . 145

Hans Kopfermann und **Christian Otzen,** Über den Stark-Effekt der Strontium-^{1}-Resonanzlinie $\lambda = 4607$ Å. Mit 7 Abb. (Eing. am 30. Oktober 1940) 156

Wilhelm Magnus, Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene. (Eingegangen am 17. September 1940) 168

R. Bechmann, Elastische Schwingungen eines anisotropen Körpers von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds. (Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 15. November 1940) 180

K.-H. Hellwege, Über die Strahlungsfelder von Pr^{+++}- und Nd^{+++}-Ionen in hexagonalen Salzkristallen. Mit 2 Abb. (Eing. am 14. November 1940) . . 198

G. Michel, Zum Grundproblem der atmosphärischen Elektrizität. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1940) 205

Hermann Hinderer und **Arno Walter,** Zur Druckabhängigkeit der Gleichspannungskorona. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 18. November 1940) 213

Z. Bay, Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 15. November 1940) 227

J. Mattauch, Über das Auftreten von isomeren Atomkernen. (Eingegangen am 31. Dezember 1940) 246

S. Flügge, Einige zusätzliche Überlegungen zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mattauch 255

Adolf Trost, Eine Methode zur Messung hoher Strahlungsintensitäten mit dem Zählrohr. (Mitteilung der Reichs-Röntgenstelle beim Staatlichen Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.) Mit 5 Abb. (Eing. am 10. Dezember 1940) 257

W. Rogowski, Lawinenprodukte, Durchschlagsenkung und fallende Charakteristik. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 16. September 1940) . . 265

---

5. und 6. Heft.

(Abgeschlossen am 26. März 1941.)

Walter Glaser, Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. (Aus dem Institut für theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule in Prag und dem Laboratorium für Elektronenoptik Siemens & Halske AG., Berlin-Siemensstadt.) Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1940) 285

Seite

J. Dosse, Strenge Berechnung magnetischer Linsen mit unsymmetrischer Feldform nach $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. (Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske AG.) Mit 5 Abbildungen. (Eing. 11. Januar 1941) 316

Paul Gombás, Über die Bindung des metallischen Calciums. (Eingegangen am 2. Dezember 1940) 322

Joh. Meissner, Über den Einfluß der metastabilen Anregungszustände auf die normale Stromdichte und den normalen Kathodenfall der Glimmentladung in Edelgasen und Edelgasgemischen. (Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium II der Siemenswerke.) Mit 11 Abb. (Eing. am 4. Januar 1941) 325

H. Schluge und **W. Finkelnburg,** Strahlungsausbeute, Farbe und Temperatur des Beck-Bogens. Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. V. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Januar 1941) 344

N. Koyenuma, Zur Theorie der Kernisomerie. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 19. November 1940) 358

H. Raether, Über den Aufbau von Gasentladungen. I. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Januar 1941) 375

H. Paetow, Eine neue, bei sehr niedrigen Drucken auftretende Form der Feldelektronenemission an Metalloberflächen, die mit isolierenden Stoffen bestäubt sind. (Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium II der Siemenswerke.) Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Februar 1941) 399

H. Hahnemann und **H.-J. Hübner,** Bemerkung zu der Veröffentlichung von W. Lochte-Holtgreven und H. Maecker „Über eine neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens". (Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring.) (Eing. am 15. Februar 1941) 409

W. Lochte-Holtgreven, Erwiderung zu der Bemerkung der Herren H. Hahnemann und H.-J. Hübner. (Eingegangen am 9. Dezember 1940) 411

W. Glaser, Berichtigung zu „Über die Ablenkfehler von elektrischen und magnetischen Ablenksystemen" 412

L. Fauldrath, Berichtigung zu „Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren" . . . 412

---

7. und 8. Heft.

(Abgeschlossen am 30. April 1941.)

A. March, Raum, Zeit und Naturgesetze. (Eingegangen am 4. Februar 1941) 413

J. Dosse, Zur Ausmessung des Feldes magnetischer Elektronenlinsen. (Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Februar 1941) 437

H. Scheffers, Bemerkungen zur allgemeinen Schwankungstheorie. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. (Eing. am 14. Febr. 1941) 444

Hans Schmid, Die Verteilungs- und Auslösekurven der Ultrastrahlungsstöße beim Übergang von Luft nach Blei, Eisen, Aluminium. Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Januar 1941) 452

Seite

A. Prietzschk, Röntgenuntersuchungen an unterkühltem Äthylalkohol. Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Februar 1941) 482

H. Lichtblau und **J. Mattauch,** Die Isotopenverteilung von Molybdän und die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes. Mit 1 Abb. (Eing. am 21. Febr. 1941) 502

Nobutsugu Koyenuma, Zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung. I. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 6. Dezember 1940) 510

Manfred von Ardenne, Elektronen-Übermikroskop mit wahlweise einschaltbarer Elektronensonde zur Herstellung von Elektronenbeugungsdiagrammen bestimmter kleiner Bezirke des Gesichtsfeldes. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Januar 1941) 515

H. Raether, Über den Aufbau von Gasentladungen. II. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Januar 1941) 524

Odd Dahl, Bemerkung zu der Arbeit von L. Fauldrath: Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren. (Eingegangen am 14. Februar 1941) 543

Z. Bay, Berichtigung zu der Arbeit „Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler“ 544

---

9. und 10. Heft.

(Abgeschlossen am 15. Juli 1941.)

W. Weizel, R. Rompe und **P. Schulz,** Zur Theorie der nicht-stationären Entladungen. I. Die Modulation des Hochdruckbogens durch eine dem Gleichstrom überlagerte Wechselstromkomponente. (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn a. Rh. und der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung, Berlin.) Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1941) 545

Richard Wallauschek, Elektronenoptische Fokussierung durch quasistatische Bahnen. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Februar 1941) . . . 565

Walther Kutzner, Phosphoreszenz- und Szintillationsspektren. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 19. März 1941) 575

D. Bârcă-Gălăţeanu, Das ultrarote Absorptionsspektrum des Methylenbromiddampfes. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 21. März 1941) 589

K.-H. Hellwege, Über das Absorptionsspektrum des dampfförmigen Chromoxyfluorids. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. März 1941) . . . 596

Manfred von Ardenne, Zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen. Eine einfache Methode und ihre Ergebnisse. Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1941) 602

I. Kovács und **A. Budó,** Intensitätsverteilung in den Quartett-Dublett-Banden. II. (Eingegangen am 28. März 1941) 612

E. Leimberger, Die Steuerung von edelgasgefüllten Niederdruck-Bogenentladungen mit Hilfe eines Gitters im Plasma der Entladung. (Mitteilung aus dem Elektrophysikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule München.) Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 2. April 1941) . . . 621

Seite

F. Borgnis, Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien. (Eingegangen am 15. April 1941) 642

W. Bartholomeyczyk, W. Funk und **R. Seeliger,** Über das Eindringen von Edelgasen in Metalle. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Mai 1941) 651

Manfred von Ardenne, Über ein 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop mit Objektabschattungsvorrichtung. Mit 20 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Mai 1941) 657

---

11. und 12. Heft.

(Abgeschlossen am 15. August 1941.)

A. Recknagel, Theorie des elektrischen Elektronenmikroskops für Selbststrahler. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 19. Mai 1941) 689

L. Gerö, Das Bandenspektrum des CD-Moleküls. (Zugleich Meßergebnisse der Dissertation von **Eva Fischmann** enthaltend.) (Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 13. März 1941) 709

Joachim Dosse, Über optische Kenngrößen starker Elektronenlinsen. (Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G.) Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 13. Mai 1941) 722

Annemarie Schmidt. Messungen an Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen. (Ein experimenteller Beitrag zur Schottkyschen Randschicht-Theorie.) Mit 20 Abbildungen. (Eingegangen am 25. April 1941) 754

Wolfgang Paul, Eine Atomstrahlapparatur zur lichtstarken Anregung schwer verdampfbarer Elemente. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Mai 1941) 774

Otto Hahn und **Fritz Strassmann,** Über die bei der Uranspaltung auftretenden Molybdän-Isotope. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Mai 1941) . . 789

Autorenregister 801

Titel und Inhalt zum 117. Bande

Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie.

Von **F. Hund** in Leipzig.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Oktober 1940.)

Für die Materieerzeugung in einem Gebiet starker örtlicher Änderung des elektrostatischen Potentials wird gezeigt, welcher Beitrag schon in einer anschaulichen skalaren Wellentheorie der Materie auftritt und welcher Zug erst durch die Quantelung hineinkommt. Das Ergebnis wird mit dem Verhalten in der spinoriellen und in der vektoriellen Feldtheorie der Materie verglichen.

Die Quantentheorie der Materie kann entwickelt werden von einem anschaulichen Teilchenbild her und von einer weitgehend anschaulichen Feld- oder Wellenvorstellung der Materie her[1]). Im ersten Falle hat man auf der klassisch-anschaulichen Stufe der Betrachtung Teilchen mit naturgegebenen Massen (etwa m) und Ladungen ($\pm e$); die Anwendbarkeit des klassischen Bildes wird begrenzt durch das Wirkungsquantum (h oder $\hbar$); statt der klassischen Mechanik benutzt man dann die Quantenmechanik, im Bereich der „gewöhnlichen" (nichtrelativistischen) Quantenmechanik etwa als Schrödinger-Gleichung im Raum aller Teilchenkoordinaten. Die Feld- oder Wellenvorstellung zeigt auf der klassisch-anschaulichen Stufe noch nichts von der Atomistik (auch wenn ihre Eigenschaften gelegentlich durch Verhältnisse von „Quantengrößen" $m/\hbar$, $e/\hbar$ dargestellt werden mögen); diskrete Massen und Ladungen treten erst nach der „Quantelung" des Wellenbildes auf.

Beim Ausgang vom Wellenbild treten schon auf der anschaulichen Stufe gewisse Eigenschaften der Materie auf, die beim Ausgang vom Teilchenbild erst nach der Quantelung auftreten; durch das Wellenbild werden diese Eigenschaften der Anschauung zugänglich. Dazu gehören die bei Materiebeugung auftretenden Interferenzen, der „Tunneleffekt" (bei Durchgang durch einen Potentialwall), einige allgemeine Merkmale der chemischen Kraft[2]) und, wie wir sehen werden, auch die Möglichkeit der Entstehung von Materie in elektrischen Feldern. *Strömt Materie von einer Seite her auf ein Gebiet hinreichend hoher Potentialdifferenz zu, so strömt aus diesem Gebiet eine größere Menge wieder ab. Die Erzeugung von Materie, ohne daß etwas zuströmt, tritt aber erst auf der Stufe des gequantelten Wellenbildes auf.*

[1]) W. Heisenberg, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1930. — [2]) F. Hund, Ann. d. Phys. **36**, 319, 1939.

Die Rechnungen sind für die spinorielle Materiewelle (Dirac-Gleichung) schon lange bekannt[1]); die Möglichkeit der Materieerzeugung ist für die gequantelte skalare Materiewelle von Pauli und Weißkopf erkannt worden[2]). Im folgenden wollen wir das Auftreten der Materieerzeugung auf der klassischen und der gequantelten Betrachtungsstufe mit einfachen Rechnungen verfolgen, um zu verstehen, wie diese auffallende Eigenschaft der mit einer relativistischen Wellentheorie der Materie zu beschreibenden Erfahrung mit den Grundlagen dieser Theorie zusammenhängt.

Anschauliche skalare Materiewelle.

Die skalare Feldtheorie beschreibt die Materie (einheitlicher Art) durch zwei reelle oder eine komplexe Feldgröße ψ, für die (bei Abwesenheit eines Magnetfeldes) die Wellengleichung

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi - \left(\frac{\partial}{c\,\partial t} + i\eta V\right)^2 \psi - \varkappa^2 \psi &= 0, \\ \Delta\psi^* - \left(\frac{\partial}{c\,\partial t} - i\eta V\right)^2 \psi^* - \varkappa^2 \psi^* &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

gilt. $\varkappa$ $(= mc/\hbar)$ und η $(= e/c\hbar)$ sind hier zunächst klassische Konstante. $\varkappa$ (die Materieart kennzeichnend) ist meßbar durch Feststellung der Beziehung zwischen Gruppengeschwindigkeit v und Wellenzahl k (für kleine k gilt $v/c = k/\varkappa$); η ist meßbar durch Ablenkung der Materie im elektrischen Feld. Dichte der elektrischen Ladung und des elektrischen Stromes, Energie- und Impulsdichte sind bis auf einen gemeinsamen Faktor gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \varrho &\sim \frac{i}{2}\eta\left[\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{c\,\partial t} + i\eta V\psi\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{c\,\partial t} - i\eta V\psi^*\right)\psi\right], \\ \frac{1}{c}\mathfrak{s} &\sim -\frac{i}{2}\eta\left[\psi^*\,\mathfrak{grad}\,\psi - \mathfrak{grad}\,\psi^*\cdot\psi\right], \\ u &\sim \frac{1}{2}\Big[\mathfrak{grad}\,\psi^*\,\mathfrak{grad}\,\psi + \\ &\quad + \left(\frac{\partial\psi^*}{c\,\partial t} - i\eta V\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{c\,\partial t} + i\eta V\psi\right) + \varkappa^2\psi^*\psi\Big], \\ c\,\mathfrak{g} &\sim -\frac{1}{2}\Big[\left(\frac{\partial\psi^*}{c\,\partial t} - i\eta V\psi^*\right)\mathfrak{grad}\,\psi + \\ &\quad + \mathfrak{grad}\,\psi^*\left(\frac{\partial\psi}{c\,\partial t} + i\eta V\psi\right)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für konstantes V und $(\omega/c - \eta V)^2 > \varkappa^2$ erfüllt die ebene Welle

$$\psi = A\,e^{-i\omega t + ikx}$$

[1]) O. Klein, ZS. f. Phys. **53**, 157, 1929; F. Sauter, ebenda **69**, 742; **73**, 547, 1931; A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Band, S. 315, 1939. — [2]) W. Pauli u. V. Weißkopf, Helv. phys. acta **7**, 709, 1934.

die Wellengleichung (1); für sie ist

$$\left(\frac{\omega}{c} - \eta V\right)^2 - k^2 = \varkappa^2$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varrho &\sim \eta\left(\frac{\omega}{c} - \eta V\right)\cdot A^* A, \\ \frac{1}{c}\mathfrak{s}_x &\sim \eta\, k\cdot A^* A, \\ u &\sim \left(\frac{\omega}{c} - \eta V\right)^2\cdot A^* A, \\ c\mathfrak{g}_x &\sim k\left(\frac{\omega}{c} - \eta V\right)\cdot A^* A. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die angegebene ebene Welle stellt einheitlich geladene Materie dar, das Vorzeichen von $\omega/c - \eta V$ bestimmt das Vorzeichen der elektrischen Ladung. Die ebene Welle

$$\psi = A\cos(\omega t - kx)$$

wäre elektrisch neutral, erführe aber bei Eintritt in ein elektrisches Feld eine „Doppelbrechung" und würde dabei in eine positiv geladene und in eine negativ geladene Welle zerlegt.

Der einfachste Fall der *Materieerzeugung* geschieht in einer Sprungstelle des elektrischen Potentials, wenn der Sprung größer als $2\varkappa/\eta$ $(2mc^2/e)$ ist. Es sei das Potential für $x < 0$ konstant und gleich $V > 0$: es sei Null für $x > 0$. Da eine einzige ebene Welle in jedem Teilraum $(x < 0,\ x > 0)$ keine Lösung ergibt, setzen wir als einfache Lösung an:

$$\left.\begin{aligned} &x < 0: && x > 0: \\ &\psi = e^{-i\omega t}\left(Ae^{-ikx} + Be^{+ikx}\right), && \psi = e^{-i\omega t}\left(Ce^{-ilx} + De^{+ilx}\right), \\ &k^2 = \left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right)^2 - \varkappa^2, && l^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dabei sei $\omega/c > \varkappa$, $\omega/c - \eta V < -\varkappa$, also $\eta V > 2\varkappa$. Wir haben dann im linken Teilgebiet negativ geladene Materie in einem hohen Potential, im rechten Teilgebiet positiv geladene Materie in einem tiefen Potential. Die A- und die C-Welle bringen Materie auf die Sprungstelle zu, die B- und die D-Welle von ihr fort [vgl. (3)]. An der Sprungstelle $(x = 0)$ wird die zweite örtliche Ableitung von ψ unstetig: ψ und die erste Ableitung gehen stetig hindurch. So erhalten wir eine zusammenhängende Lösung, wenn

$$\left.\begin{aligned} B &= \alpha A - (\alpha - 1)\, C, \\ D &= (\alpha + 1)\, A - \alpha C \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

mit

$$\alpha = \frac{k+l}{k-l}$$

ist.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo von rechts her keine Materie einströmt, also $C = 0$, so wird

$$\frac{B^* B}{A^* A} = \alpha^2 > 1; \qquad \frac{B^* B - A^* A}{A^* A} = \alpha^2 - 1 = \frac{4kl}{(k-l)^2},$$

d. h. *es strömt mehr* (negativ geladene) *Materie in das linke Gebiet zurück als auftrifft*; in das rechte Gebiet strömt dabei positiv geladene Materie; das Verhältnis des Stromes zum links ankommenden Strom ist

$$\frac{l D^* D}{k A^* A} = \frac{l}{k}(\alpha+1)^2 = \alpha^2 - 1;$$

es entsteht auf der rechten Seite genau so viel an positiver Ladung wie links an negativer Ladung; die entstehenden Massen sind im allgemeinen beiderseits verschieden. Der Energiesatz wird dadurch gewahrt, daß die Materie positiver Ladung in einem tiefen, die Materie negativer Ladung in einem hohen Potential entsteht.

Wenn von beiden Seiten Materie einströmt, so wird

$$B^* B = \alpha^2 A^* A + (\alpha - 1)^2 C^* C - \alpha(\alpha - 1)(A^* C + C^* A)$$

und wenn wir über alle Phasen der einlaufenden Wellen mitteln:

$$\overline{B^* B} = \alpha^2 A^* A + (\alpha - 1)^2 C^* C.$$

Dies bedeutet, das mehr Materie zurückläuft als einläuft. *Im Phasenmittel gibt es keine Materievernichtung.*

Dies widerspricht nicht der Tatsache, daß die Gesetze der Materiewelle invariant sind gegen die Umkehr der Zeitrichtung (wenn man gleichzeitig die Vorzeichen der elektrischen Ladung, des Potentials usw. umkehrt). Die oben angegebenen auslaufenden Wellen B und D haben nämlich ganz bestimmte Phasenbeziehungen; wenn man einen Vorgang der Materieerzeugung genau umkehrt, so erhält man Materievernichtung bei einlaufenden Wellen mit ganz bestimmter Phasenbeziehung. Bei statistisch verteilten Phasen der einlaufenden Wellen gibt es im Mittel aber nur Materieerzeugung.

Ersetzen wir nun, um allgemeiner zu sein, den unendlich steilen Potentialsprung durch einen allmählichen Abfall von V auf 0, so bleiben B und D homogene lineare Funktionen von A und C

$$B = aA + bC,$$
$$D = cA + dC.$$

Da die Stromdichte für alle x die gleiche sein muß, gilt

$$k\,(B^*B - A^*A) = l\,(D^*D - C^*C).$$

Aus dieser Bedingung läßt sich ausrechnen (k und l reell und positiv):

$$d^*d = a^*a > 1,$$
$$b^*b = \frac{l}{k}\,(a^*a - 1),$$

so daß wir mit reellen α, φ, χ schreiben können

$$B = \alpha e^{i\varphi}\cdot A + \sqrt{\frac{l}{k}\,(\alpha^2 - 1)}\,e^{i\chi}\cdot C. \tag{6}$$

Im Falle $C = 0$ bedeutet das:

$$\frac{B^*B - A^*A}{A^*A} = \alpha^2 - 1 > 0,$$

d. h. im Potentialabfall entsteht Materie. *Proportional der einströmenden Materiemenge entsteht nach links laufende negativ geladene Materie und nach rechts laufende positiv geladene Materie* (Fig. 1).

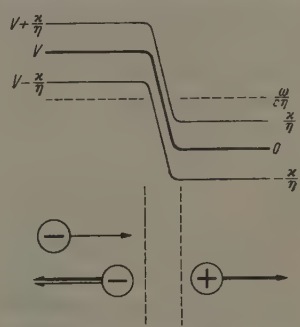


Fig. 1. Schema für skalares Wellenbild.

Die Berechnung des einen noch unbekannten Faktors ist bei allmählichem Anstieg etwas verwickelt[1]). Man erhält aber durch eine elementare Rechnung schon alles Wesentliche, wenn man den Potentialsprung in zwei Stufen geschehen läßt, also etwa das Potential V für $x < 0$, das Potential $\frac{1}{2}V$ für $0 < x < a$ und Null für $x > a$ annimmt. Weiter sei $\omega/c - \eta V < -\varkappa$; $-\varkappa < \omega/c - \frac{1}{2}\eta V < \varkappa$; $\omega/c > \varkappa$ (Fig. 2). Beschränken wir uns auf den Fall, wo nur von links her Materie eintritt, so haben wir:

$x < 0$:	$0 < x < a$:	$x > a$:
$\psi = e^{-i\omega t}(Ae^{-ikx} + Be^{ikx})$,	$\psi = e^{-i\omega t}(Ee^{-mx} + Fe^{mx})$,	$\psi = e^{-i\omega t}De^{il(x-a)}$,
$k^2 = \left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right)^2 - \varkappa^2$,	$m^2 = \varkappa^2 - \left(\frac{\omega}{c} - \frac{1}{2}\eta V\right)^2$,	$l^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2$.

[1]) Die entsprechende (noch etwas schwierigere) Rechnung für spinorielle Materie hat F. Sauter (a. a. O.) ausgeführt.

Aus den Übergangsbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$ läßt sich mit $\beta = e^{m a}$ leicht ausrechnen:

$$A = \frac{(m - i l)(m + i k)\beta - (m + i l)(m - i k)\frac{1}{\beta}}{4 i m k} D$$

und unter Beschränkung auf große Glieder ($\beta \gg 1/\beta$):

$$\frac{B^* B - A^* A}{A^* A} = \frac{l}{k}\frac{D^* D}{A^* A} = \frac{16 m^2 k l}{(m^2 + k^2)(m^2 + l^2)} e^{-2 m a}. \qquad (7)$$

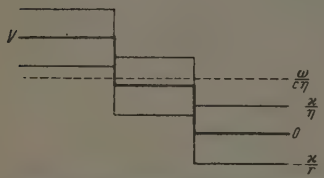


Fig. 2. Potentialverlauf für die einfache Rechnung.

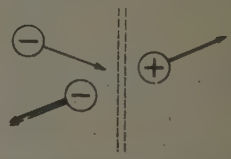


Fig. 3. Materieerzeugung beim skalaren Wellenbild.

Das Unendlichwerden bei $k = l$ tritt jetzt nicht auf. *Notwendig für Materieerzeugung im klassischen Wellenbild ist stets auf den Potentialabfall hin laufende Materie.*

Man überzeugt sich leicht, daß schräg auf die Sprungebenen einlaufende Wellen in gleichem Maße Materieerzeugung verursachen wie senkrecht einlaufende. Der Ansatz

$$\psi = e^{-i\omega t}(A e^{i(-kx + py)} + B e^{i(kx + py)}), \qquad \psi = e^{-i\omega t} D e^{i(lx + py)},$$

$$p^2 + k^2 = \left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right)^2 - \varkappa^2, \qquad p^2 + l^2 = \frac{\omega^2}{c} - \varkappa^2$$

mit dem Sprung bei 0 gibt die gleichen Verhältnisse wie früher. Die Richtungsverhältnisse zeigt Fig. 3, sie folgen auch aus Erhaltung von Ladung und Impuls.

Gequantelte skalare Materiewelle.

Die anschauliche skalare Wellentheorie ergab schon eine Materieerzeugung in einem Gebiet hinreichend starker örtlicher Änderung des elektrostatischen Potentials, aber nur dann, wenn Materie auf dieses Gebiet zuströmt. Wenn dies nicht der Fall ist, ist eben $\psi = 0$ die Lösung. Die jetzt einzuführende Quantelung des Materiefeldes bedeutet, daß $\psi = 0$ überhaupt keine Lösung ist ($\psi = 0$ widerspricht der Vertauschungsregel) und hat, wie sich zeigen wird, zur Folge, daß *auch ohne einströmende Materie eine Materieerzeugung* stattfindet.

Die Quantelung[1]) ist so zu vollziehen, daß die in irgendeinem Volumen vorhandene elektrische Ladung ein ganzzahliges (positives oder negatives) Vielfaches von e ist. Mit e werden dann auch die Größen $e/\eta c = \hbar$ und $e\varkappa/c^2\eta = m$ eingeführt. Dimension und Einheit für ψ seien so gewählt, daß im nichtrelativistischen Grenzfall $\psi^*\psi$ die Teilchendichte wird; dann ist ohne elektrisches Potential V:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{i}{2\varkappa c} e\,(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi), \\ \frac{1}{c}\mathfrak{s} &= -\frac{i}{2\varkappa} e\,(\psi^* \operatorname{grad}\psi - \operatorname{grad}\psi^*\psi), \\ u &= \frac{1}{2} mc^2\Big(\frac{1}{\varkappa^2}\operatorname{grad}\psi^*\operatorname{grad}\psi + \frac{1}{\varkappa^2 c^2}\dot{\psi}^*\dot{\psi} + \psi^*\psi\Big), \\ c\mathfrak{g} &= -\frac{1}{2\varkappa^2} mc\,(\dot{\psi}^*\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\psi^*\dot{\psi}). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dabei liegt die Reihenfolge der Faktoren noch nicht ganz fest. Wir können in allen Produkten die Reihenfolge umkehren; wir können auch die halbe Summe der Ausdrücke (8) und der durch diese Umkehrung entstandenen Ausdrücke setzen.

Die Ganzzahligkeit der Ladung (in Einheiten e) und die sonst an die Quantelung zu stellenden Forderungen werden geleistet mit den Vertauschungsbeziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\varkappa c}[\dot{\psi}^*(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r}') - \psi(\mathfrak{r}')\,\dot{\psi}^*(\mathfrak{r})] &= \frac{1}{i}\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'), \\ \frac{1}{2\varkappa c}[\dot{\psi}(\mathfrak{r})\,\psi^*(\mathfrak{r}') - \psi^*(\mathfrak{r}')\,\dot{\psi}(\mathfrak{r})] &= \frac{1}{i}\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

während $\psi(\mathfrak{r})$, $\psi(\mathfrak{r}')$, $\psi^*(\mathfrak{r})$, $\psi^*(\mathfrak{r}')$ untereinander, $\dot{\psi}(\mathfrak{r})$, $\dot{\psi}(\mathfrak{r}')$, $\dot{\psi}^*(\mathfrak{r})$, $\dot{\psi}^*(\mathfrak{r}')$ untereinander und $\psi(\mathfrak{r})$ mit $\dot{\psi}(\mathfrak{r}')$, $\psi^*(\mathfrak{r})$ mit $\dot{\psi}^*(\mathfrak{r}')$ vertauschbar sind. Bei Vorkommen eines elektrischen Potentials V ist hier überall $\partial\psi/c\partial t$ durch $(\partial/c\partial t + i\eta V)\,\psi$ und $\partial\psi^*/c\partial t$ durch $(\partial/c\partial t - i\eta V)\,\psi^*$ zu ersetzen.

Schreibt man statt (8) die halben Summen der angeschriebenen Ausdrücke und der durch Umdrehen der Produkte entstehenden, so wird wegen der Vertauschungsbeziehungen

$$\varrho = \frac{i}{2\varkappa c} e\,(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*), \tag{10}$$

während $\frac{1}{c}\mathfrak{s}, u, c\mathfrak{g}$ ungeändert bleiben.

Im Falle eines konstanten Potentials V können wir

$$\psi = e^{ie\eta Vt}\sum_{\mathfrak{k}} e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,(P_{\mathfrak{k}}\,e^{-i\omega_{\mathfrak{k}}t} + Q^*_{\mathfrak{k}}\,e^{i\omega_{\mathfrak{k}}t}) \tag{11}$$

[1]) W. Pauli u. V. Weißkopf, a. a. O.

schreiben, wobei die zum Wellenzahlvektor $\mathfrak{k}$ gehörigen beiden Frequenzen mit $c\dot{\eta}V \pm o_\mathfrak{k}$ bezeichnet sind, also

$$\frac{o_\mathfrak{k}}{c} = +\sqrt{\varkappa^2 + \mathfrak{k}^2}$$

ist. Sorgt man dafür, daß $\mathfrak{k}$ nur diskreter Werte fähig ist, indem man einen Quader vom Volumen Ω als Periodizitätsbereich für ψ einführt, so sind die Vertauschungsregeln für ψ, ψ^* usw. gleichbedeutend mit

$$\left.\begin{aligned}(P_\mathfrak{k} P_\mathfrak{l}^* - P_\mathfrak{l}^* P_\mathfrak{k})\,\Omega\,\frac{o_\mathfrak{k}}{\varkappa c} &= \delta_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}\ \ (0 \text{ oder } 1),\\ (Q_\mathfrak{k} Q_\mathfrak{l}^* - Q_\mathfrak{l}^* Q_\mathfrak{k})\,\Omega\,\frac{o_\mathfrak{k}}{\varkappa c} &= \delta_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}},\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

bei Vertauschbarkeit der $P_\mathfrak{k}$, $P_\mathfrak{l}$, $Q_\mathfrak{k}$, $Q_\mathfrak{l}$ untereinander sowie von $P_\mathfrak{k}$ mit $Q_\mathfrak{l}^*$ und von $P_\mathfrak{l}^*$ mit $Q_\mathfrak{k}$. Statt Ω können wir

$$\Omega = \frac{(2\pi)^3}{\Delta\mathfrak{k}}$$

schreiben, wo $\Delta\mathfrak{k}$ das Volumen der Gitterzelle im $\mathfrak{k}$-Raum ist. Für die Gesamtladung des Volumens Ω ergibt sich nach (8)

$$\int \varrho\, \mathrm{d}\tau = \frac{e\Omega}{\varkappa c} \sum_\mathfrak{k} o_\mathfrak{k} (P_\mathfrak{k}^* P_\mathfrak{k} - Q_\mathfrak{k} Q_\mathfrak{k}^*),$$

nach (10) jedoch

$$\int \varrho\, \mathrm{d}\tau = \frac{e\Omega}{\varkappa c} \sum_\mathfrak{k} o_\mathfrak{k} (P_\mathfrak{k}^* P_\mathfrak{k} - Q_\mathfrak{k}^* Q_\mathfrak{k}). \qquad (13)$$

Von einer Quantelung der skalaren Welle fordern wir nun weiter, daß es Sinn hat, im Falle eines konstanten Potentials V von der Anzahl der in einem Volumen vorhandenen positiven und negativen Elementarladungen einzeln zu sprechen, und daß diese Anzahl 0, 1, 2, ... sein kann. Die Anzahl der positiven Elementarladungen in Ω ist dann $\frac{\Omega}{\varkappa c} \sum_\mathfrak{k} o_\mathfrak{k} P_\mathfrak{k}^* P_\mathfrak{k}$; der von jedem $\mathfrak{k}$ dazu gelieferte Beitrag ist schon eine ganze (nicht negative) Zahl, da nach (12) $\Omega \frac{o_\mathfrak{k}}{\varkappa c} P_\mathfrak{k}^* P_\mathfrak{k}$ die Eigenwerte 0, 1, 2, ... hat. Damit auch die Anzahl der negativen Elementarladungen (insgesamt und für jedes $\mathfrak{k}$ einzeln) 0, 1, 2, ... sein kann, ist die Reihenfolge Q^*Q und nicht QQ^* im Ausdruck für die Ladung, also (10) und nicht (8) zu wählen.

Die Vertauschungsbeziehungen lassen sich schon mit einer einzigen Teilwelle

$$e^{ic\eta Vt} \cdot P e^{-iot + i\mathfrak{k}x}$$

oder

$$e^{ic\eta Vt} \cdot Q^* e^{iot + i\mathfrak{k}x}$$

erfüllen. Sie tragen zur Ladung im Volumen V die Ladungen

$$e\Omega\frac{o}{\varkappa c}P^*P$$

und

$$-e\Omega\frac{o}{\varkappa c}Q^*Q,$$

zum zeitlichen Mittelwert des Stromes die Anteile

$$e\Omega c\frac{k}{\varkappa}P^*P$$

und

$$e\Omega c\frac{k}{\varkappa}QQ^* = ec\left(\Omega\frac{k}{\varkappa}Q^*Q+\frac{ck}{o}\right)$$

bei. Da zu jedem k ein $-k$ vorkommt, können die Zusatzglieder ck/o im Strom außer acht bleiben. Streicht man sie, so entsteht für jedes k der Strom aus der Ladung durch Multiplikation mit der „Gruppengeschwindigkeit" ke^2/o.

Die Vertauschungsbeziehungen lassen sich häufig bequem dadurch erfüllen, daß man

$$\left.\begin{aligned} P &= \Delta_P^+\sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}N_P} &&= \sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}(N_P+1)}\,\Delta_P^+,\\ P^* &= \Delta_P^-\sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}(N_P+1)} &&= \sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}N_P}\,\Delta_P^-,\\ Q &= \Delta_Q^+\sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}N_Q} &&= \sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}(N_Q+1)}\,\Delta_Q^+,\\ Q^* &= \Delta_Q^-\sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}(N_Q+1)} &&= \sqrt{\frac{\varkappa c}{o}\frac{1}{\Omega}N_Q}\,\Delta_Q^- \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

einführt, darin N_P bzw. N_Q als gewöhnliche Zahl ansieht und Δ^+ und Δ^- als Operatoren mit der Eigenschaft

$$\left.\begin{aligned} \Delta^+ f(N) &= f(N+1)\,\Delta^+,\\ \Delta^- f(N) &= f(N-1)\,\Delta^-. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die zu verschiedenen k oder zu P einerseits, Q andererseits gehörigen Δ und N sind vertauschbar. Die P-Welle gibt dann in Ω die Ladung eN_P, den Strom $e\frac{c^2}{o}kN_P$; die Q-Welle gibt die Ladung $-eN_Q$, den Strom $e\frac{c^2}{o}kN_Q$.

Wir berechnen jetzt die Materieerzeugung an einer Potentialstufe. Für $x < 0$ sei das Potential wieder $V > 2\varkappa/\eta$, für $x > 0$ sei es Null. Da man jede Teilwelle für sich quanteln kann, können wir den Ansatz

$x < 0$:	$x > 0$:
$\psi = e^{-i\omega t}(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx})$,	$\psi = e^{-i\omega t}(Ce^{-ilx} + De^{ilx})$,
$k^2 = \left(\frac{\omega}{c} - \eta V\right)^2 - \varkappa^2$,	$l^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2$,

$$\eta V - \varkappa > \frac{\omega}{c} > \varkappa$$

machen; dabei haben wir durch den Stern bei A^* und B^* schon angedeutet, daß diese Wellen sich wie die Q^*-Wellen in (11) verhalten. Die Übergangsbedingungen ergeben wie früher [vgl. (5)]

$$B^* = \alpha A^* - (\alpha - 1)\, C,$$
$$D = (\alpha + 1)\, A^* - \alpha C$$

mit

$$\alpha = \frac{k + l}{k - l}, \qquad |\alpha| > 1$$

Es wird also

$$B^* B = \alpha^2 A^* A + (\alpha - 1)^2 CC^* - \alpha(\alpha - 1)(A^* C^* + CA). \qquad (16)$$

Bei der Quantelung dürfen wir nicht beiderseits der Stufe dasselbe Ω nehmen, vielmehr haben wir darauf zu achten, daß die diskreten k-Werte links der Stufe unter Beibehaltung der ω-Werte gerade in die diskreten l-Werte rechts der Stufe übergehen. Wegen

$$\frac{\omega \mathrm{d}\omega}{c^2} = l\mathrm{d}l,$$

$$\frac{\omega \mathrm{d}\omega}{c^2} = \left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{c} = -k\mathrm{d}k$$

bedeutet dies, daß zwischen den l-Schritten und den k-Schritten die Beziehung besteht

$$\frac{\Delta l}{\Delta k} = \frac{\omega k}{\omega l}, \qquad \frac{\Omega(x > 0)}{\Omega(x < 0)} = \frac{\omega l}{\omega k}.$$

Wir quanteln also mit

$$A = \Delta_A^+ \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega} N_A},$$

$$B = \Delta_B^+ \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{1}{\Omega} N_B},$$

$$C = \Delta_C^+ \sqrt{\frac{\varkappa c}{\omega}\frac{k}{l}\frac{1}{\Omega} N_C}$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (14) und (15)

$$N_B = \alpha^2 N_A + (\alpha^2 - 1)(N_C + 1) + \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}\,[\sqrt{N_A N_C}\, A_A^- A_C^- + \sqrt{(N_A + 1)(N_C + 1)}\, A_A^+ A_C^+]. \tag{17}$$

Wenn N_A und N_C Zahlen sind, ist es N_B nicht. Die Anzahl Teilchen, die die zurücklaufende Welle im Volumen Ω hat, ist durch die Anzahlen N_A und N_C nicht völlig bestimmt; aber ihr Mittelwert über alle Phasen der einlaufenden Welle ist eine Zahl, nämlich

$$\overline{N}_B = \alpha^2 N_A + (\alpha^2 - 1)(N_C + 1). \tag{18}$$

Auch im Falle, daß keine Materie auf die Potentialstufe zuläuft ($N_A = N_C = 0$), ist $\overline{N}_B$ von Null verschieden, nämlich $\alpha^2 - 1 > 0$. Die Quantelung der Wellen ändert also das Ergebnis der früheren Überlegung mit klassischen Wellen gerade so ab, daß *auch ohne einströmende Materie Materieerzeugung in der Potentialstufe* stattfindet[1]). Das Ergebnis gilt für alle Teilwellen (also die verschiedenen k): ehe wir auf seine quantitative Seite eingehen, betrachten wir noch einen allmählichen Potentialanstieg.

Im Falle des allmählichen Anstieges bleibt die homogen lineare Beziehung zwischen A^*, B^*, C, D wie im nichtgequantelten Falle. Wir schreiben [vgl. (6)]

$$B^* = \alpha\, e^{i\eta} A^* + \sqrt{\frac{l}{k}(\alpha^2 - 1)}\, e^{i\chi} C$$

und erhalten

$$B^* B = \alpha^2 A^* A + \frac{l}{k}(\alpha^2 - 1) C C^* + \cdots,$$

wobei die bei der Phasenmittelung wegfallenden Glieder durch ... angedeutet sind. Die Quantelung liefert

$$\overline{N}_B = \alpha^2 N_A + (\alpha^2 - 1)(N_C + 1).$$

[1]) Im Falle einer „niedrigen" Schwelle (beiderseits $\omega_C - \eta V > 0$) erhält man mit relativistischer Quantelung (wie hier) oder mit nichtrelativistischer Quantelung durch die entsprechende Rechnung

$$N_B = \alpha^2 N_A + (1 - \alpha^2) N_C + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}\,[\sqrt{(N_A + 1) N_C}\, A_A^+ A_C^- + \sqrt{N_A (N_C + 1)}\, A_A^- A_C^+]$$

mit

$$\alpha = \frac{k - l}{k + l}.$$

Der Mittelwert über die Phasen wird

$$\overline{N}_B = \alpha^2 N_A + (1 - \alpha^2) N_C$$

wie bei der nichtgequantelten Welle. Man kann am Operator N_B, angewandt auf eine Funktion $f(N_A, N_C)$ die Schwankungen studieren, die die Teilchenzahl in der zurücklaufenden Welle zeigt. Die Gleichung für N_B liefert dann ein Eigenwertproblem mit den Eigenwerten $N_B = 0, 1, 2, \ldots$, dessen Eigenfunktionen $f(N_A, N_C)$ man leicht berechnen kann.

Die Materieerzeugung tritt also bei jedem Potentialabfall $\left(>2\frac{\varkappa}{\eta}\right)$ *auf, auch wenn keine Materie einströmt.* Wenn der Abfall nicht auf einer ganz kurzen Strecke stattfindet, ist α^2-1 ein sehr kleiner Faktor.

Für den Fall, daß der Potentialabfall aus zwei gleichhohen Stufen im Zustand a besteht, haben wir oben

$$\alpha^2-1=\frac{16\,m^2kl}{(m^2+k^2)\,(m^2+l^2)}e^{-2ma}$$

berechnet.

Wir geben jetzt die in einem Potentialabfall dauernd erzeugte Materie an, indem wir den Faktor α^2-1 als bekannt voraussetzen. Die drei Raumdimensionen berücksichtigen wir, indem wir den Ansätzen für $x<0$ und für $x>0$ den Faktor $e^{ipy+iqz}$ hinzufügen, der an den Beziehungen nichts ändert, außer daß jetzt

$$k^2=\left(\eta\frac{V}{c}-\frac{\omega}{c}\right)^2-\varkappa^2-p^2-q^2,$$

$$l^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\varkappa^2-p^2-q^2$$

wird. Für jeden Wert von k, p, q, der die Bedingungen erfüllt, unter denen beiderseits des Potentialsprunges ebene Wellen fortschreiten, treten (ohne daß Materie zuströmt) im Volumen

$$\Omega=\frac{8\pi^3}{\Delta k\,\Delta p\,\Delta q}$$

α^2-1 Teilchen auf; das gibt die Teilchendichte

$$\frac{1}{8\pi^3}(\alpha^2-1)\,\Delta k\,\Delta p\,\Delta q$$

und unter Beachtung der x-Komponente der Gruppengeschwindigkeit c^2k/o die x-Komponente der Dichte des Teilchenstromes

$$\frac{c^2}{8\pi^3}(\alpha^2-1)\frac{k}{o}\,\Delta k\,\Delta p\,\Delta q.$$

Nehmen wir alle k, p, q-Werte zusammen, so wird diese Größe

$$j=\frac{c^2}{8\pi^3}\int(\alpha^2-1)\frac{k}{o}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q;$$

wegen

$$k\,\mathrm{d}k=\frac{1}{c^2}o\,\mathrm{d}o=-\frac{1}{c^2}o\,\mathrm{d}\omega$$

können wir dafür auch schreiben (das Vorzeichen wird durch Umkehr der Integrationsrichtung berücksichtigt):

$$j=\frac{1}{8\pi^3}\int(\alpha^2-1)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q,$$

worin α von ω, p, q abhängt. Zur Abschätzung schreiben wir

$$j = \frac{1}{8\pi^3}\overline{(\alpha^2-1)}\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q.$$

Der ω-Bereich geht von $c\sqrt{\varkappa^2+p^2+q^2}$ bis $c\,(\eta V - \sqrt{\varkappa^2+p^2+q^2})$, so daß

$$j = \frac{c}{8\pi^3}\overline{(\alpha^2-1)}\int (\eta V - 2\sqrt{\varkappa^2+p^2+q^2})\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q$$

wird, zu integrieren über das p, q-Gebiet, in dem die Wurzel reell ist. Die Rechnung ergibt

$$j = \frac{c}{96\pi^2}\overline{(\alpha^2-1)}\,(\eta V - 2\varkappa)^2(\eta V + 4\varkappa). \tag{19}$$

Für die Größenordnung von $\overline{\alpha^2-1}$ vergleiche man (7).

Die Tatsache der Materieerzeugung in einem Potentialabfall, der größer als $2\varkappa/\eta$ ist, bedeutet, daß solche großen Potentialunterschiede nicht längere Zeit bestehen können. So kann das statische Feld einer Elementarladung, etwa eines Protons, nicht das Potential e/r für beliebig kleine r haben. Durch Entstehung von negativ geladener Materie in der Nähe von $r = 0$ wird vielmehr der Wert des Potentials auf $2\varkappa/\eta$ erniedrigt werden, also wenn m die Masse der entstehenden Teilchen ist, auf $2\frac{mc^2}{e}$. Die Form e/r kann also höchstens für $r > r_0$ gelten, wo

$$r_0 = \frac{e^2}{2mc^2}$$

ist.

Spinorielle Materiewelle (Dirac-Gleichung).

Legen wir der Untersuchung statt der skalaren Wellengleichung (1) die Diracsche Gleichung zugrunde, so werden die Rechnungen etwas verändert; vor allem wird aber zunächst die Deutung eine andere. Das hängt damit zusammen, daß die Theorie, die die *ungequantelte Dirac-Gleichung* ohne Ausschließungsprinzip (oder Löchertheorie) zugrunde legt, nur *ein* Ladungsvorzeichen liefert, aber positive und negative Werte der Energiedichte kennt. An Stelle des Schemas der Fig. 1 tritt jetzt das der Fig. 4 als mit den Erhaltungssätzen für Elektrizität und Energie verträglich.

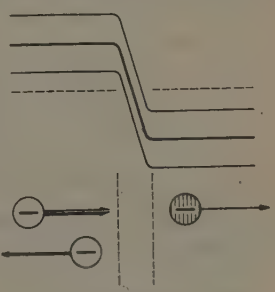


Fig. 4. Schema für spinorielles Wellenbild.

Die Figur ist für einfallende negativ geladene Materie gezeichnet; ein Teil der Materie geht durch die Stufe hindurch und hat dann drüben das gleiche Ladungsvorzeichen, aber negative Masse. Das ist eben der Inhalt des Kleinschen Paradoxons. Der Energiesatz

wird dadurch gewahrt, daß die Materie negativer Masse in einem elektrischen Potential strömt, in dem sie entsprechend hohe elektrische Energie hat.

Die Formeln für die skalare Theorie und die spinorielle Theorie sind verschieden; bei der spinoriellen Theorie schreiben wir nach Sommerfeld[1])

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{\frac{\omega - c\varkappa}{\omega + c\varkappa}} - \sqrt{\frac{o + c\varkappa}{o - c\varkappa}}}{\sqrt{\frac{\omega - c\varkappa}{\omega + c\varkappa}} + \sqrt{\frac{o + c\varkappa}{o - c\varkappa}}}$$

mit $o = c\eta V - \omega$. In der skalaren Theorie heißt es für die „große" Stufe [vgl. (5)]

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{o^2 - c^2\varkappa^2} + \sqrt{\omega^2 - c^2\varkappa^2}}{\sqrt{o^2 - c^2\varkappa^2} - \sqrt{\omega^2 - c^2\varkappa^2}},$$

für die „kleine" Stufe steht der dazu reziproke Ausdruck da. Zum Vergleich diene die Fig. 5, die den absoluten Betrag von B/A wiedergibt für festes ω

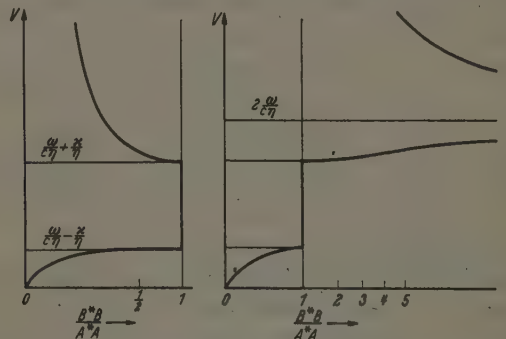


Fig. 5. Abhängigkeit des „Reflexionskoeffizienten" von der Höhe der Potentialstufe, links für die Diracsche Theorie, rechts für die skalare Theorie.

und verschieden hohe Potentialstufe[2]). Ersetzt man die Stufe durch einen allmählichen Abfall, so kommt in beiden Fällen für die „große" Stufe die dargestellte Größe näher an 1 heran; insbesondere fällt im skalaren Falle das Unendlichwerden weg.

Eine Beziehung dieses Sachverhaltes der Diracschen Theorie zur Erfahrung, die gleichzeitige Entstehung positiv und negativ geladener Teilchen

[1]) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Band, Braunschweig 1939, S. 315 f. — [2]) Vgl. Fig. 18 bei Sommerfeld.

zeigt, wird nun in der *Löchertheorie* hergestellt. Man kann die Löchertheorie Diracs als eine korrespondenzmäßige Quantelung der klassisch aufgefaßten ursprünglichen Diracschen Theorie ansehen. In der Löchertheorie sind die Zustände negativer Masse für gewöhnlich besetzt; für die Verhältnisse der Fig. 4 ist also von rechts einlaufende Materie negativer Masse vorhanden. Uns interessiert die in Fig. 6 schematisch angedeutete Lösung. Rechts strömt weniger Materie negativer Masse zurück, zurückströmende Zustände negativer Energie sind also unbesetzt, d. h. positiv geladene Materie positiver Masse strömt nach rechts weg; gleichzeitig strömt negativ geladene Materie positiver Masse nach links weg.

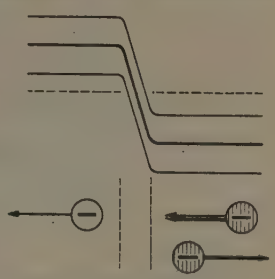


Fig. 6. Schema für Löchertheorie.

Die *strenge Quantelung* der Diracschen Wellen (mit Vertauschungsregeln) hat hier nur noch die feineren Züge der Materieerzeugung zu liefern, die mit den Schwankungen zusammenhängen.

Vektorielle Materiewelle.

Die vektorielle Feldtheorie der Materie[1]) enthält beide Vorzeichen der elektrischen Ladung, während die Energiedichte stets positiv ist. Die Verhältnisse der Materieerzeugung, die wir bei der anschaulichen skalaren Welle fanden, sind also auch hier möglich. Die Rechnung liefert sogar genau die gleichen Formeln für die erzeugte Materiemenge.

Wir lösen die Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{c\partial t} + i\eta V\right)\mathfrak{U} - \operatorname{grad} v &= -\varkappa\mathfrak{F}, \\ \operatorname{rot}\mathfrak{U} &= \varkappa\mathfrak{G}, \\ -\left(\frac{\partial}{c\partial t} + i\eta V\right)\mathfrak{F} + \operatorname{rot}\mathfrak{G} &= -\varkappa\mathfrak{U}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{F} &= -\varkappa v \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

durch eine in der x-Richtung fortschreitende ebene Welle. Sie läßt sich aus drei einzeln die Gleichungen erfüllenden Wellen zusammensetzen, einer Längswelle ($\omega - c\eta V = o$ gesetzt):

$$(U_x, v, F_x) = \left(\frac{o}{cx}, \frac{1}{\varkappa}k, i\right)\cdot A_x e^{-i\omega t + ikx}$$

[1]) A. Proca, Journ. Phys. Radium **7**, 347, 1936; H. Yukawa, S. Sakata u. M. Taketani, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **20**, 319, 1938.

und zwei Querwellen:

$$(U_y, F_y, G_z) = \left(1, i\frac{o}{\varkappa c}, \frac{i}{\varkappa} k\right) \cdot A_y e^{-i\omega t + ikx},$$

$$(U_z, F_z, G_y) = \left(1, i\frac{o}{\varkappa c}, -\frac{i}{\varkappa} k\right) \cdot A_z e^{-i\omega t + ikx}.$$

Die nichtangegebenen Größen sind Null. Für Ladung und Strom

$$\varrho \sim \frac{\eta \varkappa}{2i} (\mathfrak{U}^* \mathfrak{F} - \mathfrak{F}^* \mathfrak{U}),$$

$$\frac{1}{c} \mathfrak{s} \sim \frac{\eta \varkappa}{2i} (v^* \mathfrak{F} - \mathfrak{F}^* v + \mathfrak{U}^* \times \mathfrak{G} + \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{U})$$

erhalten wir dabei

$$\varrho \sim \eta \frac{o}{c} (A_x^* A_x + A_y^* A_y + A_z^* A_z),$$

$$\frac{1}{c} \mathfrak{s}_x \sim \eta k (A_x^* A_x + A_y^* A_y + A_z^* A_z).$$

Wir haben jetzt die Übergangsbedingungen aufzusuchen für eine Fläche, an der das Potential springt, indem wir den Grenzübergang machen von einem stetig veränderlichen V zu einem an der Fläche unstetig springenden V. Wir haben drei div-Gleichungen, außer der oben (20) angegebenen noch

$$\operatorname{div} \mathfrak{G} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{c \partial t} + i\eta V\right) v + \operatorname{div} \mathfrak{U} = -i\eta \mathfrak{F} \operatorname{grad} V;$$

aus ihnen folgt, daß die Normalkomponenten von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ stetig durch die Fläche gehen und die Normalkomponente von $\mathfrak{U}$ einen Sprung macht. Aus den drei rot-Gleichungen, außer den beiden oben (20) angegebenen noch

$$\left(\frac{\partial}{c \partial t} + i\eta V\right) \mathfrak{G} + \operatorname{rot} \mathfrak{F} = -i \frac{\eta}{\varkappa} \mathfrak{U} \times \operatorname{grad} V,$$

folgt, daß die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}$ stetig durch die Fläche gehen und die Tangentialkomponente von $\mathfrak{F}$ einen Sprung macht. Die Gleichung (20) mit $\operatorname{grad} v$ zeigt schließlich den stetigen Durchgang von v.

Setzen wir also zu beiden Seiten der Sprungstelle $x = 0$ für die longitudinale Welle

$x < 0$:	$x > 0$:
$U_x = -\frac{1}{\varkappa}\left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega t} (A e^{-ikx} + B e^{ikx}),$	$U_x = \frac{\omega}{c\varkappa} D e^{-i\omega t + ilx},$
$k^2 = \left(\eta V - \frac{\omega}{c}\right)^2 - \varkappa^2; \quad \frac{\omega}{c} < 0,$	$l^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2,$

so ergibt der stetige Durchgang von v und F_x durch die Sprungstelle:

$$k(-A+B) = lD,$$
$$A+B = D$$

wie bei der skalaren Welle. Setzen wir für die eine transversale Welle

$$x<0\colon U_y = e^{-i\omega t}(Ae^{-ikx}+Be^{ikx}) \mid x>0\colon U_y = De^{-i\omega t+ilx},$$

so ergibt der stetige Durchgang von U_y und G_z dieselben Gleichungen. Bei jeder der Wellen erhalten wir also die Materieerzeugung

$$\frac{B^*B-A^*A}{A^*A} = \frac{4kl}{(k-l)^2}$$

wie bei der skalaren Theorie.

Auch die Rechnung für die zwei Stufen bei $x=0$ und $x=a$ läßt sich unter Benutzung der Lösungen

$$(U_x, v, F_x) = \left(\frac{o}{c\varkappa}, -\frac{i}{\varkappa}m, i\right)A_x e^{-i\omega t+mx},$$

$$(U_y, F_y, G_z) = \left(1, \frac{io}{c\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}m\right)A_y e^{-i\omega t+mx},$$

$$(U_z, F_z, G_y) = \left(1, i\frac{o}{c\varkappa}, -\frac{1}{\varkappa}m\right)A_z e^{-i\omega t+mx}$$

durchführen und gibt das gleiche Ergebnis wie in der skalaren Theorie.

Die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen. III.

Von **J. A. M. v. Liempt** und **J. A. de Vriend.**

(Eingegangen am 2. Oktober 1940.)

Fortsetzung früherer Untersuchungen über Schmelzsicherungen und Bestimmung der absoluten Trägheitskonstante C nach G. Meyer für mehrere Metalle und Legierungen. Der Einfluß des Drahtquerschnittes ist in Übereinstimmung mit der theoretischen Ableitung ohne Einfluß.

Diese Arbeit bildet die Fortsetzung früherer Untersuchungen über die Bestimmung der Schmelzzeitkonstante von Schmelzsicherungen nach der Methode von G. J. Meyer[1]). Wir haben jetzt die Messungen auf mehrere Metalle und Legierungen ausgedehnt. Die Meßmethode war grundsätzlich dieselbe wie die in der zweiten Arbeit erwähnte mit Gleichstrom. Wir benutzten den Philipsschen Kathodenstrahloszillographen GM 3152[2]). Die Einspannlänge betrug immer 8 cm.

Wir verzichten auf die Wiedergabe einzelner Meßergebnisse und führen in den Tabellen 1 und 2 nur an: die Drahtdicke, die Zahl n, welche angibt, wievielmal der Kurzschlußstrom den Grenzstrom bei der Messung übertroffen hat, ferner die nähere Beschreibung des Metalles oder der Legierung und schließlich die Trägheitskonstante C mit ihrem aus mehreren Messungen berechneten mittleren Fehler.

Tabelle 1. Metalle.

Metall	Drahtdicke in μ	n	$C \cdot 10^{-6}$	Beschreibung
Al	600	6 bis 10	360 ± 10	Technisch rein
Cd	306	6 „ 10	98 ± 4	Technisch rein
Co	152	7 „ 10	210 ± 10	Technisch rein
Au	150	6 „ 9	575 ± 17	Reinst
Pb	250	9 „ 12	32 ± 1	Technisch rein
Mg	232	7 „ 10	199 ± 9	Technisch rein
Pd	156	6 „ 7	236 ± 2	Sehr rein
Ta	99	5 „ 6	167 ± 6	Sehr rein
Fe	152	10 „ 11	147 ± 2	Svea Eisen C = 0,05 %
Fe	152	6 „ 7	105 ± 2	Stahl mit C = 0,25 %
Zn	200	7 „ 9	200 ± 17	Technisch rein
Zr	152	7 „ 9	63 ± 2	Reinst

[1]) J. A. M. v. Liempt u. J. A. de Vriend, „Die Schmelzzeit dünner Schmelzsicherungen", ZS. f. Phys. **93**, 100, 1934 und **98**, 133, 1935. — [2]) J. D. Veegens, „Ein Kathodenstrahloszillograph", Philips techn. Rundschau **4**, 210, 1939.

Tabelle 2. Legierungen.

Metall	Drahtdicke in μ	n	$C \cdot 10^{-6}$	Beschreibung
Konel	45	6 bis 9	145 ± 6	73 Ni, 17 Co, 7 Fe, 2,5 Ti, 0,5 Mn
CuNi I	152	6 „ 8	262 ± 1	80 Cu, 20 Ni
CuNi II	151	6 „ 9	221 ± 4	70 Cu, 30 Ni
CuNi III	140 bis 240	7 „ 10	135 ± 8	55 Cu, 45 Ni
CuNi IV	170	5 „ 10	294 ± 12	90 Cu, 10 Ni
CuNi V	140 bis 240	7 „ 10	150 ± 4	30 Cu, 70 Ni
Pb—Sn I	510	6 „ 10	32 ± 1	25 Pb, 75 Sn
Pb—Sn II	514	6 „ 10	31 ± 1	37 Pb, 63 Sn
NiCr	154	5 „ 6	109 ± 2	78 Ni, 20 Cr, 2 Fe
FeNi	150	6 „ 9	79 ± 8	58 Fe, 42 Ni

Einfluß des Querschnitts. Alle bisherigen Messungen sind an runden Drähten ausgeführt worden. Gemäß der theoretischen Ableitung der Formel von Meyer muß die Form des Querschnitts vom Schmelzdraht ohne Einfluß auf den Wert der Konstante C sein. Wir haben dies für viereckigen Kupferdraht sowie für Nickelband (2% Mn) nachgeprüft.

Der Kupferdraht war mit dem Mikrometer gemessen: 298×333 μ. Der Mittelwert der Oberfläche des Querschnitts wurde durch Wiegung auf $9{,}4 \cdot 10^{-4}$ cm^2 bestimmt. Wir fanden $C = (1010 \pm 70) \cdot 10^6$, während für runden Draht der Wert $C = (1000 \pm 67) \cdot 10^6$ gilt.

Das Nickelband war 38×594 μ. Der Mittelwert der Oberfläche des Querschnitts betrug $2{,}06 \cdot 10^{-4}$ cm^2. Wir fanden $C = (254 \pm 4) \cdot 10^6$, während für dasselbe Metall in runder Drahtform $C = (244 \pm 17) \cdot 10^6$ gefunden wurde.

Die Form des Querschnitts ist also ohne Einfluß.

Eindhoven (Holland), Phys. Chem. Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, September 1940.

Zur Herleitung der Geschwindigkeitsformel in der Elektronentheorie der Metalle.

Von **Walter Glaser** in Prag.

(Eingegangen am 21. Oktober 1940.)

Die Formel $\mathfrak{v} = \frac{1}{\hbar}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{k}} E_n$ wird aus der quantenmechanischen Stromdefinition auf Grund einer bekannten Orthogonalitätseigenschaft unmittelbar hergeleitet.

Die Grundlage der Elektronentheorie der Metalle bildet bekanntlich die Elektronenbewegung in dem dreifach-periodischen Potentialfeld $V(x, y, z) = V(\mathfrak{r})$ eines Kristalles gemäß der Schrödinger-Gleichung

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 \quad (\Delta\psi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi). \tag{1}$$

Das Potential hat die allgemeine Eigenschaft

$$V(\mathfrak{r} + n_1\mathfrak{a}_1 + n_2\mathfrak{a}_2 + n_3\mathfrak{a}_3) = V(\mathfrak{r}), \tag{2}$$

wobei n_1, n_2, n_3 ganze Zahlen und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die drei Grundvektoren der elementaren Gitterzelle bedeuten. Unter dieser Voraussetzung besagt bekanntlich das Floquetsche Theorem, daß die Lösungen von (1) die Gestalt

$$\psi = e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,u(\mathfrak{r}) \tag{3}$$

haben müssen, wobei $\mathfrak{k} \equiv k_x, k_y, k_z$ ein beliebig vorgegebener Vektor, der „Ausbreitungsvektor", und $u(\mathfrak{r})$ eine mit der Gitterperiodizität periodische Funktion $u(\mathfrak{r} + n_1\mathfrak{a}_1 + n_2\mathfrak{a}_2 + n_3\mathfrak{a}_3) = u(\mathfrak{r})$ ist. Die in (3) noch steckende multiplikative Konstante wird durch die „Normierungsbedingung"

$$\int \bar{\psi}\psi\,\mathrm{d}\tau = \int \bar{u}u\,\mathrm{d}\tau = 1 \tag{4}$$

festgelegt.

Nach den allgemeinen Grundgesetzen der Quantentheorie ist nun der Mittelwert des Impulses durch

$$\mathfrak{p} = \frac{\hbar}{i}\int \bar{\psi}\,\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

gegeben, wobei die Integration über den ganzen xyz-Raum zu erstrecken ist. Die mittlere Geschwindigkeit, welche nach $e\mathfrak{v} = \mathfrak{i}$ den Strom $\mathfrak{i}$ bestimmt, ist wegen $m\mathfrak{v} = \mathfrak{p}$ durch

$$\mathfrak{v} = \frac{\hbar}{mi}\int \bar{\psi}\,\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

definiert. Setzt man aus (3) in (6) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{m}\hbar\mathfrak{k} + \frac{\hbar}{mi}\int \bar{u}\,\mathrm{grad}\,u\,\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

wobei u wegen (1) nunmehr der Differentialgleichung

$$\Delta u + 2i(\mathfrak{k}\,\mathrm{grad}\,u) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar^2\mathfrak{k}^2}{2m} - V\right)u = 0 \tag{8}$$

genügen muß.

Man kann zeigen, daß zur Berechnung von $\mathfrak{v}$ die Kenntnis der Eigenfunktionen ψ bzw. u nicht erforderlich ist, sondern daß bei bekannter Abhängigkeit der Energie E_n ($\mathfrak{k}$) des n-ten Energiebandes vom Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ die mittlere Geschwindigkeit (6) bzw. (7) durch

$$v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_n}{\partial k_x},\quad v_y = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_n}{\partial k_y},\quad v_z = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_n}{\partial k_z}\quad \text{oder}\quad \mathfrak{v} = \frac{1}{\hbar}\mathrm{grad}_k E_n \tag{9}$$

gegeben ist. In dem Beitrag[1]) „Elektronentheorie der Metalle" im Handbuch der Physik wird diese Formel hergeleitet. Der Beweis ist jedoch ziemlich langwierig und undurchsichtig. Von vornherein aber wird man erwarten, daß sich ein so einfacher Zusammenhang, wie er durch Formel (9) gegeben ist, auch ohne langes formales Rechnen auf einfache Art herleiten lassen muß. Da nun der obigen Beziehung in der Metalltheorie grundlegende Bedeutung zukommt, glaube ich, daß es nicht überflüssig sein mag, wenn ich hierfür einen einfachen Beweis angebe. Zuvor möchte ich jedoch noch darauf hinweisen, daß es nicht angeht, die mittlere Geschwindigkeit zwar durch (6) zu definieren, die Formel (9) jedoch als Gruppengeschwindigkeit einer Wellengruppe herzuleiten[2]). Dazu ist eben noch der Beweis nötig, daß auch für die Kristallwellen (3) die Gruppengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_g$ gleich ist der nach (6) definierten mittleren Geschwindigkeit. Die beiden ganz verschieden eingeführten Geschwindigkeiten haben ja zunächst miteinander gar nichts zu tun. Formel (9) kann also in korrekter Weise nur aus der Definition (6) der mittleren Geschwindigkeit gewonnen werden. Wenn sich für die Gruppengeschwindigkeit $\mathfrak{v}_g$ gleichfalls Formel (9) ergibt, so erhält eben damit die „mittlere" Geschwindigkeit (6) eine gewisse anschauliche, wellentheoretische Deutung.

Der Beweis von (9) läßt sich nun auf folgende Art in wenigen Strichen führen. In Gleichung (8) ist E eine Funktion von $\mathfrak{k}$. Wenn man daher zu

---

[1]) Handb. d. Phys., herausg. von H. Geiger u. K. Scheel, Bd. XXIV/2, S. 373–375, Berlin 1933. — [2]) Wie dies z. B. in dem Buche „Elektronentheorie der Metalle" von H. Fröhlich, Berlin 1936, S. 7 und S. 21, 22, geschieht. Gleichfalls als Gruppengeschwindigkeit wird $\mathfrak{v}$ in Müller-Pouillets Lehrb. d. Phys., Bd. IV/4 auf S. 345 eingeführt. Auch hier fehlt also der wesentliche Zusammenhang mit dem Strom.

einem benachbarten $\mathfrak{k}$-Wert $\mathfrak{k} + \Delta\mathfrak{k}$ übergeht, wird sich E um ΔE ändern, wobei ΔE durch

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial k_x}\Delta k_x + \frac{\partial E}{\partial k_y}\Delta k_y + \frac{\partial E}{\partial k_z}\Delta \mathfrak{k}_z = \operatorname{grad}_k E \cdot \Delta\mathfrak{k} \qquad (10)$$

gegeben ist. Die Eigenfunktionen u werden dabei in $u + \sigma$ übergehen. Setzen wir dies in (8) ein und behalten in bekannter Weise nur Glieder erster Ordnung bei, indem wir $\Delta\mathfrak{k}$ als klein annehmen, so ergibt sich

$$\Delta\sigma + 2i\mathfrak{k}\operatorname{grad}\sigma + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar^2}{2m}k^2 - V\right)\sigma$$
$$= -2i\Delta\mathfrak{k}\operatorname{grad}u + 2\mathfrak{k}\Delta\mathfrak{k}\cdot u - \frac{2m}{\hbar^2}\Delta E\cdot u. \qquad (11)$$

Die linke Seite von Gleichung (11) stimmt mit Gleichung (8) für u überein. Da nun nach einem bekannten Satze die rechte Seite von (11) auf der Lösung u der homogenen Gleichung orthogonal stehen muß, ergibt sich wegen (4) durch Multiplikation mit $\bar{u}$ und Integration

$$\mathfrak{k}\Delta\mathfrak{k} + \frac{1}{i}\Delta\mathfrak{k}\int \bar{u}\operatorname{grad}u = \frac{m}{\hbar^2}\Delta E$$

oder wegen (10) durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $\Delta\mathfrak{k}$ und Multiplikation mit $\hbar/m$

$$\frac{\hbar}{m}\mathfrak{k} + \frac{\hbar}{mi}\int \bar{u}\operatorname{grad}u = \frac{1}{\hbar}\operatorname{grad}_k E.$$

der Vergleich mit Formel (7) ergibt somit

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{\hbar}\operatorname{grad}_k E_{nk}.$$

Prag, Institut für theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule.

Der Mechanismus der elektrischen Gasaufzehrung bei Drucken unterhalb 10^{-4} Torr *).

Von **Helmut Schwarz.**

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Oktober 1940.)

In einer hochevakuierten Glühkathodenröhre besonderer Konstruktion wird zunächst ein sprunghaftes Schwanken des Anodenstromes (mit „Elektronenstromsprung" bezeichnet) zwischen den Werten 0,1 und 30 mA beobachtet. Der Elektronenstromsprung (ESS) wird durch elektrische Umladung der Glaswand gedeutet, die durch Sekundärelektronen hervorgerufen wird. Die elektrischen Verhältnisse können durch Hineinbringen einer Metallwand rekonstruiert werden. — Nach Auftreten des negativen ESS (d. i. das Springen des Anodenstromes von höheren auf niedrigere Werte) wird unmeßbar schnelle Abnahme des Druckes von 10^{-4} auf 10^{-6} Torr beobachtet. Die positiven Gasionen werden dabei in die negativ aufgeladene Glaswand „hineingeschossen". Aufzehrungsversuche in einer entsprechenden Röhre mit weitmaschigem Drahtnetz waren nur in einem bestimmten Potentialintervall (+ 30, + 140 Volt) des Netzes möglich.

Es ist schon lange bekannt, daß elektrische Entladung in einem unter geringem Druck stehenden Glasrohr Druckabnahme bewirken kann („clean-up-Effekt"). Bereits 1858 beschrieb Plücker[1]) diesen Effekt mit den klassischen Worten:

„Gewisse Gase (Sauerstoff, Chlor-, Brom- und Joddämpfe) verbinden sich mehr oder weniger langsam mit dem Platin der negativen Elektrode, und die resultierenden Verbindungen lagern sich auf die umgebende Glaswandung ab. Wir nähern uns dabei, wenn die Gase rein sind, einem absoluten Vakuum."

Ältere Gasaufzehrungsversuche wurden bei Drucken weit oberhalb von 10^{-3} Torr in Entladungsröhren mit kalter Kathode ausgeführt[2]) [3]) [4]). Neuerdings sind Versuche von Alterthum, Lompe und Seeliger[5]) [6]) [7]) in einer mit Edelgasen von 0,2 bis 3 Torr gefüllten Röhre mit kalter Kathode vorgenommen worden. Bei all diesen Versuchen fand man das aufgezehrte Gas meist in der Kathode wieder.

In Glühkathodenröhren sind Aufzehrungsversuche größeren Umfangs von Campbell[8]) [9]) [10]) [11]) in den Jahren 1920 bis 1924 oberhalb 10^{-2} Torr

*) D 5.

[1]) J. Plücker, Pogg. Ann. **105**, 84, 1858. — [2]) R. S. Willows, Phil. Mag. (6), 503, 1903. — [3]) L. Vegard, ebenda 465, 1909. — [4]) L. Vegard, Ann. d. Phys. **50**, 769, 1916. — [5]) H. Alterthum, A. Lompe u. R. Seeliger, ZS. f. techn. Phys. **17**, 407, 1936. — [6]) H. Alterthum u. A. Lompe, ebenda **19**, 116, 1938. — [7]) H. Alterthum u. A. Lompe, ebenda S. 113. — [8]) N. R. Campbell and J. W. H. Ryde, Phil. Mag. (6) **40**, 585, 1920. — [9]) N. R. Campbell and J. W. H. Ryde, ebenda **41**, 221, 1921. — [10]) N. R. Campbell, ebenda S. 685. — [11]) N. R. Campbell and E. G. New, ebenda **48**, 553, 1924.

ausgeführt worden[1]). Einen Aufzehrungseffekt unterhalb 10^{-3} Torr in einer Glühkathodenröhre mit Magnetfeld parallel zur Rohrachse hat v. Meyeren[2]) [3]) 1933 bis 1934 beschrieben.

Mit der nachstehenden Arbeit[4]) war ursprünglich nur eine Klärung des Aufzehrungseffektes bei sehr niedrigen Drucken beabsichtigt. Dieses Problem spaltete sich aber 1. in ein Entladungsproblem („Elektronenstromsprung") und 2. in das eigentliche Aufzehrungsproblem.

Die Entstehung von Wandladungen und ihr Einfluß auf die Entladung und die Aufzehrung.

Bei Vorversuchen wurde öfter beobachtet, daß während des Betriebs der Röhre bei Anodenspannungen zwischen 2000 und 5000 Volt der Anodenstrom plötzlich von einem hohen Wert (z. B. 10 mA) ohne äußere Beeinflussung auf Bruchteile von mA sprunghaft absank; umgekehrt konnte danach insbesondere bei anfänglichem Betrieb wieder ein Hinaufschnellen des Anodenstroms zu sehr hohen Werten wahrgenommen werden.

W. v. Meyeren erklärt dies als einen Raumladungseffekt[5]), wobei die negative Raumladung (bei kleinem Anodenstrom) durch positive Ionen kompensiert werden soll, so daß dabei der Anodenstrom auf einen vielfach höheren Wert springen könne. Ein solcher Effekt müßte aber druckabhängig sein. Aus meinen Versuchen ergibt sich jedoch, daß der Elektronenstromsprung (ESS) bei jedem Druck zwischen $2 \cdot 10^{-7}$ und $2 \cdot 10^{-3}$ Torr auftritt.

Die folgenden Untersuchungen zeigen, daß der ESS auf plötzliche Ladungsveränderungen der inneren Glaswand[6]) und die damit verbundene Verzerrung des elektrischen Feldes in der Röhre bewirkt wird. Wenn nämlich ein Elektron auf die Wand trifft, so löst es aus ihr δ Sekundärelektronen aus. δ nimmt mit der Energie V_p des Primärelektrons bis zu einem Maximum zu, das bei allen bisher untersuchten Stoffen oberhalb 400 e-Volt gefunden wurde. Ist δ kleiner als 1, so lädt sich die Wand negativ auf und erreicht dann Kathodenpotential; ist δ jedoch größer als 1, so lädt

---

[1]) Bei seinen Versuchen scheinen jedoch chemische Einflüsse mitzuspielen. Die Ergebnisse sind — wie Campbell selbst schreibt — nicht reproduzierbar, warum er auch wohl nicht zu einer einheitlichen Theorie gelangen konnte. — [2]) W. v. Meyeren, ZS. f. Phys. **84**, 531, 1933. — [3]) W. v. Meyeren, ebenda **91**, 727, 1934. — [4]) Siehe auch Vortrag auf der Physikertagung Berlin 1940. ZS. f. techn. Phys. Tagungsheft 1940. — [5]) W. v. Meyeren, Ann. d. Phys. **31**, 164, 1938. — [6]) Entsprechend dem Pseudohochvakuum nach Güntherschulze (ZS. f. Phys. **31**, 606, 1925).

sie sich positiv auf. Mit zunehmender Entgasung wird die Ausbeute δ [allerdings mit Sicherheit bisher nur bei Metallen festgestellt[1] [2] [3]] wesentlich herabgesetzt[4] (vgl. Fig. 1). Wird nun die Glaswand bei festgehaltener Energie V_p der Primärelektronen (in Fig. 1 $V_p = 100$ e-Volt angenommen) fortschreitend entgast, so wird man sich längs ABC bewegen. Sogleich nach Unterschreiten des Punktes B, des Umklappunktes, wird die Glaswand, welche vorher positiv geladen war, sich nagativ aufladen. Geringe Mengen von Gas, welche infolge von Erwärmung während des Betriebs der Röhre durch Diffusion oder plötzlichen Ausbruch aus dem Innern des Glases an die Oberfläche gelangen, können dann auch wieder eine Wanderung längs CBA in umgekehrter Richtung verursachen, so daß die Wand wieder positiv wird. Dieses Hin- und Herwandern längs ABC wird solange andauern, bis daß eine Gaskonzentration c (kleiner als die kritische Gaskonzentration c_k mit $\delta = 1$ für die festgehaltene Primärenergie V_p) in der Oberflächenschicht des Glases einigermaßen stabil geworden ist, wobei man sich dann etwa im Punkte C der Fig. 1 befinden wird. Dieser Zustand wird zuerst in der Nähe der Glühkathode erreicht werden, wo die Primärelektronen auch mit der kleinsten Energie V_p infolge des besonderen elektrischen Feldverlaufs auf die Wand treffen. Sobald die Glaswand nahe der Kathode negativ geworden ist, muß sich die negative Wandladung lawinenartig auf der ganzen Glasoberfläche ausbreiten. Die Energie V_p der Primärelektronen, welche auf die „Grenzen" zwischen positivem und negativem Gebiet treffen, muß nämlich infolge der Nachbarschaft der negativen

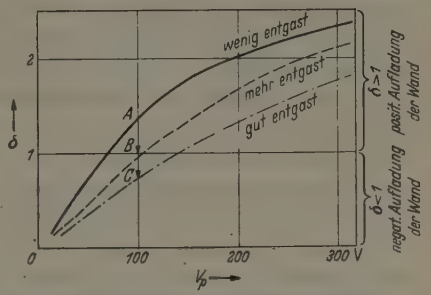


Fig. 1 (schematisch). Sekundärelektronenausbeute δ in Abhängigkeit von der Energie V_p der Primärelektronen bei verschiedenen Zuständen der Glaswand. (δ ist die Zahl der durch ein Primärelektron ausgelösten Sekundärelektronen einschließlich der reflektierten Primärelektronen.)

[1]) H. E. Krefft, Ann. d. Phys. **84**, 639, 1927 u. Phys. Rev. **31**, 199, 1928. — [2]) A. J. Ahearn, Phys. Rev. **38**, 1858, 1931. — [3]) H. Strübig, Phys. ZS. **37**, 402, 1936. — [4]) Da die Sekundärelektronenemission von Glas sich von der der Metalle in allen anderen Eigenschaften kaum unterscheidet, dürfte wohl diese Folgerung gezogen werden können. Aus den V_p, δ-Kurven in einer Arbeit von H. Salow (ZS. f. techn. Phys. **21**, 8, 1940) kann man ein Wachsen von δ mit der Gasbeladung von Quarz folgern.

Ladung abnehmen, so daß schließlich V_p überall unterhalb des Umklapppotentials V_k ($\delta = 1$) liegt.

Entsprechend kann man den umgekehrten Vorgang, die nochmalige positive Aufladung, erklären: Wenn nämlich an irgendeiner Stelle die kritische Gaskonzentration c_k überschritten wird, so wird sich diese Stelle positiv aufladen, und die positive Ladung wird sich aus dem gleichen Grunde über die ganze Oberfläche ausbreiten.

Bei der Aufzehrung muß untersucht werden, wohin und wie das Gas bei der elektrischen Aufzehrung bei Drucken unterhalb 10^{-4} Torr verschwindet und ob das Magnetfeld für die Aufzehrung in diesen Druckbereichen notwendig ist. Es ergab sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Gasaufzehrung in diesen Druckgebieten und bei den verwandten Anodenspannungen zwischen 2000 und 5000 Volt eine negative Wandaufladung, notwendig insofern, als ohne negative Wandaufladung keine Aufzehrung wahrzunehmen war, — hinreichend, da auch dann Aufzehrung festgestellt wurde, wenn die Wand nicht an allen Stellen gut entgast war und es doch gelang, namentlich bei niedrigen Anodenspannungen, die negative Wandladung für einige Zeit aufrechtzuerhalten. Ein zur Rohrachse paralleles Magnetfeld kann indirekt nur dazu dienen, die Energie V_p der auf die Wand auftreffenden Elektronen durch häufigere Zusammenstöße mit Gasmolekülen zu schwächen, so daß damit dann schon eher die Voraussetzungen für die negative Wandladung (nämlich $V_p < V_k$) gegeben sind. — Die ionisierten Gasatome werden dann mit hoher Geschwindigkeit in die Wand „hineingeschossen".

Untersuchung des Elektronenstromsprunges.

Versuchsanordnung. Als Versuchsröhre diente eine 40 mm weite Glühkathodenröhre aus Glas (Fig. 2) mit einer ringförmigen Anode A (Ringdurchmesser 25 mm, Drahtdurchmesser 0,7 mm) im Abstand von 36 mm von der Wolframwendel W und einer dritten ringförmigen Elektrode G, der bei den Versuchen, wenn nicht anders angegeben, stets das Potential der Kathode aufgedrückt wurde, um ein Bremsen der schnellfliegenden Elektronen zu bewirken, damit sie nicht aus der gegenüberliegenden Glaswand Gas herausbombardieren können. Mit Vakuumpumpe und Gasvorrat war die Versuchsröhre durch einen Quecksilberverschluß verbunden, natürlich mit vorgelegter Kühlfalle für Hg-Dampf.

Zur Druckmessung wurde eine Telefunken-Dreielektrodenröhre Type RE 11 verwendet, die vorher in einer gesonderten Apparatur mit einem

Mc Leod-Manometer geeicht[1]) wurde. Es waren noch Drucke bis zu $1 \cdot 10^{-7}$ Torr herab ablesbar.

Vor den eigentlichen Versuchen untersuchte ich die Meßröhre RE 11 auf ihre eigene Gasaufzehrung. Es konnte nur eine geringe Aufzehrung festgestellt werden, die aber vernachlässigbar gegenüber der Aufzehrung in der Versuchsröhre war.

Durch eine über das Versuchsrohr geschobene Spule konnte ein longitudinales Magnetfeld bis zu 2400 Gauß in ihr erzeugt werden.

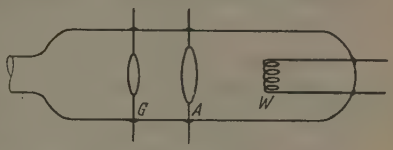


Fig. 2. Versuchsröhre (RE). (Maßstab 1 : 3.)

Alle Metallteile der Meßröhre und der Versuchsröhre wurden zur Entgasung vor den Versuchen bis zu 2 Stunden durch Elektronenbombardement auf helle Rotglut gebracht. Daraufhin wurden beide Röhren mehrere Stunden — ja sogar tagelang — in elektrischen Widerstandsöfen auf 360° C gehalten und dann mehrere Male kurzzeitig auf 400° C gebracht. Dann wurden die Elektroden und die Glaswand nochmals stark mit Elektronen bombardiert. Das hierdurch erzielte Endvakuum konnte zu 1 bis $2 \cdot 10^{-7}$ Torr gemessen werden.

Charakteristiken der Versuchsröhre mit und ohne Magnetfeld (Fig. 3 und 4). Vor den eigentlichen Versuchen wurde die Abhängigkeit des Anodenstroms von der angelegten Anodenspannung bei geerdeter Ringelektrode G durch langsames Steigern der Anodenspannung von 700 bis etwa 4500 Volt bei verschiedenen Heizleistungen der Kathode gemessen. — In den Fig. 3 und 4 sind zwei Kurven[2]) (ohne bzw. mit Magnetfeld) aufgezeichnet, deren Form öfters reproduzierbar war. Der Pfeil auf den Kurven gibt die Richtung an, in der die Meßpunkte von 700 Volt anfangend aufgenommen wurden. Die gestrichelte Kurve wurde gleich im Anschluß an die ausgezogene bei scheinbar etwas stärkerer Kathodenheizung gemessen. Es prägten sich im wesentlichen zwei grundverschiedene Kurvenäste heraus. Beim unteren Ast nehmen wir die Wand als negativ, beim oberen als positiv aufgeladen an. Der Übergang zwischen beiden Ästen vollzog sich momentan (positiver bzw. negativer ESS).

---

[1]) Jedoch ergab sich gegenüber der Eichung der unveränderten RE 11 durch H. Simon (ZS. f. techn. Phys. 5, 221, 1924) eine 2,7fach größere Empfindlichkeit; statt $C = 0{,}72$ wurde $C = 0{,}27$ gefunden. — [2]) Der Variationsbereich des Anodenstroms ist so groß, daß die Ordinatenachsen (Anodenstrom) in Fig. 3 von 0,3 mA bis 3,0 mA, in Fig. 4 von 1,0 bis 4,0 mA unterbrochen wurden.

Diese „Hysteresisschleife" konnte nur im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werden, niemals umgekehrt. Das spricht für die Theorie der Gasbeladung der Oberfläche, denn bei den niedrigen Anodenspannungen, wo nur wenige Elektronen mit kleiner Energie V_p auf die Wand treffen, kann die Glaswand sich nicht so stark erwärmen, daß durch Ansteigen der

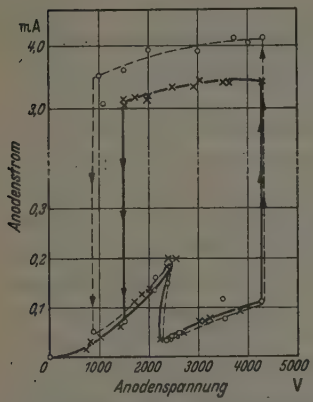


Fig. 3. Charakteristik der VR ohne Magnetfeld bei einem Druck von $5 \cdot 10^{-7}$ Torr. Gesamtzeitdauer der Messungen: 2 Std. 30 Min. Kurvenpunkte o nach × gemessen.

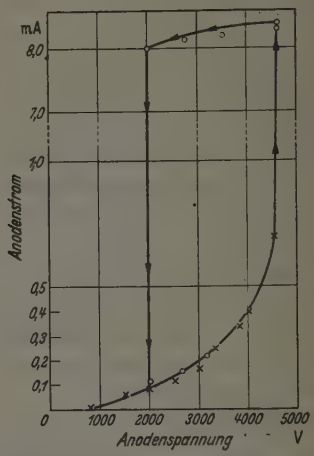


Fig. 4. Charakteristik mit Magnetfeld von 820 Gauß. Vakuum: $5 \cdot 10^{-7}$ Torr. Gesamtmeßdauer: 3 Std.

Gaskonzentration in der Oberfläche über den kritischen Wert c_k ($\delta = 1$) hinaus das Umklappotential V_k unterhalb V_p gelangt.

Nicht ganz befriedigend läßt sich die mehrfach gemessene Kurvenspitze des unteren Astes in Fig. 3 bei einer Anodenspannung von 2500 Volt erklären.

v. Meyeren findet nur bei der Aufnahme der Charakteristik der ähnlich gebauten Röhre ohne Magnetfeld eine Hysteresisschleife; beim Betrieb mit Magnetfeld steigt bei ihm der Anodenstrom stetig an und bleibt bei kleinen Werten. Da er bei geringeren Spannungen und mit einer etwas anders gebauten Röhre gearbeitet hat, ist dies verständlich, weil bei ihm die Energie V_p der auf die Glaswand treffenden Elektronen stets unterhalb dem Umklappotential V_k blieb. Die Vorarbeiten zur Gasaufzehrung führten also zu einem zweiten Effekt, dem ESS, der, wie sich herausstellt, die Vorbedingung des Aufzehrungseffektes ist.

Der Elektronenstromsprung (ESS). Als Elektronenstromsprung (ESS) bezeichne ich das sprunghafte Zucken und manchmal auch Pendeln des Anodenstroms von hohen zu äußerst niedrigen Werten (z. B. von 30 mA auf 0,1 mA) und umgekehrt. Der Anodenstrom von 0,1 mA konnte dann durch Heizungssteigerung der Kathode nicht mehr meßbar erhöht werden. Ich bezeichne insbesondere den Vorgang, bei dem der Elektronenstrom von einem niedrigen Wert auf einen höheren springt, mit „positiven ESS", und den umgekehrten Vorgang, der immer zuerst auftritt, mit „negativen ESS". Tabelle 1 zeigt die Abhängigkeit des Anodenstroms vom Kathodenheizstrom bei festgehaltener Anodenspannung von 4000 bzw. 4500 Volt ohne und mit Magnetfeld.

Tabelle 1. Abhängigkeit des Anodenstroms von der Kathodenheizung beim Auftreten des ESS. Vakuum: $3{,}0 \cdot 10^{-7}$ Torr; Anodenspannung: 4000 Volt; Magnetfeld: 0 Gauß.

Kathodenheizung in Amp.	Anodenstrom in mA	
	nach pos. ESS	nach neg. ESS
3,40	1,16	0,052
3,50	2,10	0,060
3,60	4,18	0,060
3,70	6,50	
3,80	12,0	0,064
3,90	24,0	
4,00	30,0	0,068
Dasselbe nach negativem ESS aber mit Magnetfeld von 820 Gauß.		
3,4	0,38	
3,6	0,39	
3,8	0,40	
4,0	0,56	

Der ESS ist keineswegs abhängig vom Druck in der Röhre, wie es bei einer Raumladungsbeeinflussung durch positive Ionen nach v. Meyeren sein müßte. Der ESS wurde beobachtet bei Drucken von: $2 \cdot 10^{-7}$, $2 \cdot 10^{-6}$, $1{,}5 \cdot 10^{-5}$, $2 \cdot 10^{-4}$, ja sogar $2 \cdot 10^{-3}$ Torr.

Da der ESS druckunabhängig ist, kann es sich dabei also nur um eine elektrische Eigenschaft der Wand handeln. Das Auftreten des ESS ist geknüpft an die elektrische Umladung der Wand, also an die kritische Gaskonzentration c_k der Glasoberflächenschicht, welche dem Punkte B der Fig. 1 entspricht. Ein Fortschreiten auf der Geraden in Richtung ABC ist mit dem positiven ESS, in Richtung CBA mit dem negativen ESS verbunden. Die noch lange anhaltende Instabilität der Gaskonzentration c und die Empfindlichkeit der Sekundärelektronenemission in bezug auf Gasbeladung der emittierenden Glaswand machen das häufige Auftreten

des ESS verständlich. — Nach mehrstündigem Betrieb konnte jedoch der positive ESS nicht mehr mit den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten herbeigeführt werden.

Direkte Beobachtung der Wandladung. Obwohl die Erklärung des ESS durch Wandladung einleuchtend ist, wurde deren Existenz durch Versuche direkt sichergestellt.

Außen auf die Röhre wurde in einer Länge von 90 mm Stanniol so aufgeklebt, daß der Belag S (siehe Fig. 5) noch 15 mm weit die Glühkathode überragte, und mit dem Faden eines Wulfschen Einfadenelektrometers V_2 verbunden. Erst beim Auftreten des positiven ESS zeigte V_2 einen Ausschlag von etwa 3500 Volt gegen Erde. Dies bedeutet also, daß die Wand, nachdem sie vorher Kathodenpotential hatte, nunmehr das Potential der Anode angenommen hat und damit dann auch den höheren Anodenstrom zuläßt. Wenn ein ballistisches Galvanometer an die Stelle des Elektrometers V_2 in Fig. 5 in die Erdleitung eingeschaltet wurde, konnte die beim ESS an der Wand umgesetzte Ladung gemessen werden. Sie betrug $2{,}4 \cdot 10^{-7}$ Coulomb.

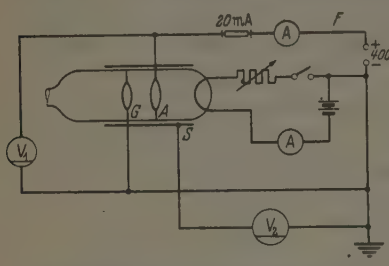


Fig. 5. Schaltschema zu den Versuchen mit Staniolbelag S auf der Außenwand der VR. (Bei den Ladungsmessungen war das Elektrometer V_2 mit einem ballistischen Galvanometer ausgetauscht worden. Beim „Durchschlag des Kondensators" war S direkt mit F verbunden.)

Zur Ermittlung der Kapazität des Systems „Staniolbelag-Innenwand" wurde aus demselben Glasrohr, aus dem die Versuchsröhre hergestellt war, ein Zylinderkondensator gleicher Dimensionen mit Innen- und Außenstaniolbelag ausgeführt und seine Kapazität zu $6{,}8 \cdot 10^{-11}$ Farad gemessen. Hieraus ergibt sich bei der angelegten Anodenspannung von 4000 Volt eine Ladung von $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ C, was ziemlich genau mit der ballistisch gemessenen Ladung übereinstimmt.

Beseitigung der negativen Wandladung durch Heizen der Glaswand von außen. Ich hatte festgestellt, daß stets morgens, nachdem die Apparatur die ganze Nacht über unter Vakuum gestanden hatte[1]), auch nach Erreichen des Endvakuums von 2 bis $3 \cdot 10^{-7}$ Torr zuerst nur der hohe Anodenstrom abzulesen war und erst nach längerer Betriebsdauer der Röhre der negative ESS auftrat, sogar auch dann, wenn am Abend vorher zuletzt nur noch

[1]) Der Druck betrug am anderen Morgen in der abgesperrten Apparatur $6{,}0 \cdot 10^{-6}$ Torr.

der niedrigere Anodenstrom durch die Röhre fließen konnte. Hieraus wurde nun geschlossen, daß über Nacht aus dem Innern des Glases nach der Oberfläche Gas diffundiert war und die kritische Gaskonzentration c_k der Oberflächenschicht überschreiten ließ, so daß die Bedingung $V_p > V_k$ für die positive Aufladung der Wand erfüllt war. Dieser Diffusionsvorgang sollte durch höhere Temperatur der Glaswände beschleunigt werden. Zu diesem Zweck wurde wie bei der Vorbehandlung der Versuchsröhre ein elektrischer Widerstandsofen über die Röhre geschoben, der ihren Betrieb nicht störte. Die Ofentemperatur (siehe Tabelle 2) wurde langsam gesteigert.

Bei 190° C trat plötzlich der positive ESS auf, obwohl der Druck nicht nennenswert gestiegen war. Während der ganzen Versuchsdauer wurde dauernd gepumpt; der Druck konnte nicht über $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Torr ansteigen. Nach dem positiven ESS wurde versucht, bis zum Eintreten des negativen ESS die Ofentemperatur konstant zu halten. Nach dem negativen ESS wurde der Ofen wieder eingeschaltet. Die Temperatur von 320° C wurde eine Stunde lang unter dauerndem Betrieb der Röhre beibehalten. In den ersten 10 Minuten trat noch einige Male der ESS auf, konnte aber nach dem letzten negativen ESS nicht mehr wahrgenommen werden. Auch lange nach Abschalten des elektrischen Ofens trat ein positiver ESS nicht mehr auf.

Tabelle 2. Beispiel eines Ausheizversuchs zur Herbeiführung des ESS.

Zeit in min nach Beginn des Versuches	Druck in Torr	Ofentemp. in °C	Anodenstrom in mA
0	$3{,}1 \cdot 10^{-7}$	24	0,1
5	$5{,}2 \cdot 10^{-7}$	100	0,1
10	$7{,}0 \cdot 10^{-7}$	190	> 7,5 pos. ESS
11	$7{,}0 \cdot 10^{-7}$	195	0,1 neg. ESS
14	$6{,}0 \cdot 10^{-7}$	200	> 7,5 pos. ESS
19	$5{,}2 \cdot 10^{-7}$	210	0,1 neg. ESS
30	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	320	> 7,5 pos. ESS
36	$8{,}0 \cdot 10^{-7}$	320	0,1 neg. ESS

Der vorstehend beschriebene Versuch ist nur ein Beispiel für mehrere ähnliche. Aus ihnen muß geschlossen werden, daß für die Ableitung der negativen Wandladungen eine elektrolytische Leitfähigkeit des Glases bei den höheren Temperaturen nicht in Betracht gezogen werden kann.

Da aber andererseits kein anderer Einfluß der Temperaturerhöhung als eben Erhöhung der Gasbeladung[1]) der Wand in Frage kommt, muß

[1]) Eine ideal gasfreie Oberfläche ist unter diesen Umständen prinzipiell auch nicht möglich, da in diese aus dem Innern des Glases immer wieder Gas nachdiffundiert, was durch tagelanges Ausheizen der Röhre auch festgestellt wurde.

geschlossen werden, daß die Aufladung der Glaswand mit ihrer Gasbeladung verknüpft ist, auf dem Wege über die Abhängigkeit des Umklappotentials V_k von der Gaskonzentration der Oberfläche. Wird die kritische Gaskonzentration c_k der Glaswand überschritten, so erfolgt wegen $V_k < V_p$ positive Aufladung; wird c_k unterschritten, so lädt sich die Wand wegen $V_k > V_p$ negativ auf.

Metallwand im Innern der Röhre. Zur Rekonstruktion der Wandladung und zur experimentellen Beeinflussung des ESS (insbesondere auch zum Zweck der elektrischen Gasaufzehrung) wurde in einer Röhre mit denselben Maßen ein 90 mm langer Zylinder aus 0,05 mm dickem Kupferblech mit einem Durchmesser von 35 mm isoliert hineingebracht. Die Röhre wurde auf das sorgfältigste vakuumtechnisch vorbehandelt.

Hatte der Zylinder das Potential der Anode, so war derselbe hohe Anodenstrom von 5,3 mA zu messen wie in der Glasröhre nach positivem ESS, hatte er Kathodenpotential, so floß derselbe niedrige Anodenstrom, wie er nach negativem ESS abgelesen werden konnte.

Bedingungen für die Gasaufzehrung.

Ohne Anlegen von Anodenspannung konnte bei alleinigem Brennen der Kathode keine Druckänderung gemessen werden. Anodenspannung ist also zur Aufzehrung erforderlich. Wie bereits vorweggenommen, war erst dann Aufzehrung in der Glasröhre zu beobachten, nachdem der negative ESS eingetreten war. Damit sind dann schon die Vorbedingungen der Gasaufzehrung durch die Voraussetzungen für den negativen ESS gegeben. Dieser experimentelle Sachverhalt kann nicht gut mit der „Raumladungstheorie" von v. Meyeren in Einklang gebracht werden, denn wäre bei den höheren Anodenströmen die Wand nicht in einen völlig anderen elektrischen Zustand geraten, so wäre nicht einzusehen, warum sie bei der nun auch stärkeren Ionisation nach positivem ESS das Gas nicht mehr aufzehrt. Wie bereits beschrieben, wurde der negative ESS erst dann festgestellt, wenn die innere Oberflächenschicht der Glaswand die erforderliche minimale Gaskonzentration c_k aufwies. Dies konnte am schnellsten dadurch erzielt werden, daß die Röhre vom Innern her durch Elektronenbombardement unter ständigem Pumpen ausgeheizt wurde. Durch alleiniges Ausheizen der Glaswand von außen her gelang es nur selten, den negativen ESS herbeizuführen, da dann eine geringere Temperatur in der Oberflächenschicht herrscht und aus dem Innern des Glases in diese immer mehr Gas nachgeliefert werden kann. Das Temperaturgefälle in der Wand muß also für den günstigsten Fall von innen nach außen verlaufen.

Beim Einschalten des zur Rohrachse parallelen Magnetfeldes von etwa 400 Gauß trat der negative ESS nach viel kürzerer Betriebsdauer auf. Wie bereits erörtert (s. S. 26) beruht dies darauf, daß die Energie V_p der nunmehr auftreffenden Elektronen kleiner ist als ohne Magnetfeld, so daß schon eher die Bedingung $V_p < V_k$ für die negative Wandaufladung erfüllt ist. — In bezug auf den Gasaufzehrungseffekt ist also zu erwarten, daß das Magnetfeld nur dann notwendig ist, wenn die Glaswand noch nicht die erforderliche Gasfreiheit aufweist; es wird dann lediglich dazu dienen:

1. zu verhindern, daß Elektronen mit großer Geschwindigkeit auf die Wand treffen und dadurch Gas frei machen,

2. den negativen ESS eher hervorzurufen, wobei dann auch die Wand die notwendige negative Ladung erhält,

3. die Ionisation zu vergrößern (was aber zur Aufzehrung nicht erforderlich ist).

Auch bei Anwendung eines Magnetfeldes konnte Gasaufzehrung niemals wahrgenommen werden, ohne daß vorher der negative ESS aufgetreten war. War eine negative Aufladung der Wand nicht zu erreichen, so war auch der Gasaufzehrungseffekt nicht zu erzielen.

Aufzehrung von Luft mit normaler Röhre bei verschiedenen Anodenspannungen. Ich unterscheide zunächst bei der Versuchsröhre drei Aufzehrungsstadien je nach dem „Reinheitsgrad" der Röhrenvorbehandlung.

Erstes Stadium: Im ersten Stadium befindet sich eine verhältnismäßig „schlecht vorbehandelte" Röhre, die nur mit Magnetfeld aufzehrt und bei der die Aufzehrungsgeschwindigkeit scheinbar mit den gegebenen Instrumenten meßbar ist. Dieses Stadium war naturgemäß quantitativ nicht reproduzierbar. Es wurde daher auch nicht besonders untersucht (Beispiel siehe Fig. 6). Die bereits negative Wand gast durch das Ionen- und Elektronenbombardement so lange, bis zuletzt ein Gleichgewicht zugunsten des Aufzehrungseffektes eingetreten ist. Das Magnetfeld sorgt dabei in der angegebenen Weise für die Aufrechterhaltung der negativen Wandladung.

Es konnte des öfteren bei Aufzehrungsversuchen in diesem Stadium beobachtet werden, daß mitten im Versuch der Druck plötzlich wieder anstieg und gleichzeitig dabei der positive ESS auftrat. Erst als der negative ESS einsetzte, war weitere Druckabnahme zu messen.

Zweites Stadium: Im zweiten Stadium befindet sich eine schon „besser vorbehandelte" Röhre, die allerdings auch nur mit Magnetfeld aufzehrt, bei der aber die Aufzehrungsgeschwindigkeit mit den gegebenen Hilfsmitteln nicht mehr erfaßbar ist. Experimentell war eine Druckmessung in einer kürzeren Zeit als 5^s nicht möglich; ein Gasvolumen von 600 cm^3

wird demnach in weniger als 5s von $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ auf $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ reduziert. Die Tabelle 3 zeigt Beispiele von Aufzehrungsversuchen in Luft im zweiten Stadium bei verschiedenen Anodenspannungen (2000 bis 4000 Volt) und Magnetfeldern (800 bis 2400 Gauß). Alle diese Versuche sind hintereinander

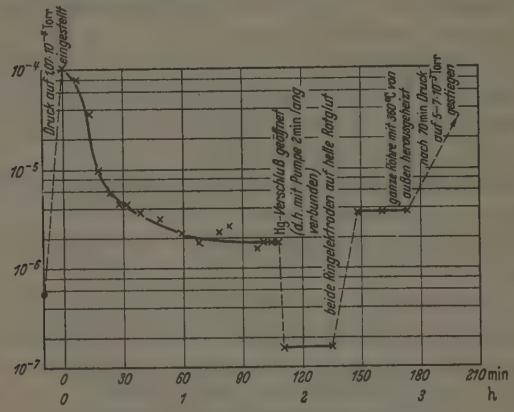


Fig. 6. Erstes Aufzehrungsstadium.

ausgeführt worden, ohne die Röhre zwischendurch neu zu entgasen. Das Endvakuum ist von Anodenspannung und Magnetfeld unabhängig.

Drittes Stadium: Im dritten Stadium befindet sich eine „gut vorbehandelte" Röhre, die schon ohne Magnetfeld aufzehrt, und deren Aufzehrungsgeschwindigkeit unmeßbar groß ist.

Tabelle 3. Elektrische Gasaufzehrung im zweiten und dritten Stadium. (Anfangsdruck: $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Torr.)

Anodenspannung in Volt	Magnetfeld in Gauß	Druck in Torr nach 5s	Druck in Torr nach etwa 5m
		Zweites Stadium.	
2000	400	$2{,}75 \cdot 10^{-6}$	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
3000	400	$2{,}9 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$
4000	400	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	$2{,}8 \cdot 10^{-6}$
3800	800	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
3800	1200	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
3800	2000	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$
3800	2400	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
		Drittes Stadium.	
2000	—	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$
2500	—	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$
3000	—	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
4000	—	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$
4500	—	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$

Das Werturteil über die Vorbehandlung der Röhre bezieht sich nicht in erster Linie auf die Dauer und die Temperaturen bei der Vorbehandlung, als vielmehr auf den Grad der Gasfreiheit der inneren Oberflächenschicht, auf das Diffusionsgefälle in der Glaswand. — Eine Röhre soll als um so besser vorbehandelt gelten, je größer die Differenz der Gaskonzentrationen der inneren Gasoberflächenschicht $c_k - c$ ist, d. i. die Differenz zwischen der kritischen Gaskonzentration c_k (mit $\delta = 1$) und der Gaskonzentration c in dem gerade erzielten Zustand der Röhre (vgl. hierzu Anm. S. 31).

Versuche im dritten Stadium bei verschiedenen Anodenspannungen (zwischen 2000 und 4500 Volt) ohne Magnetfeld zeigen denselben Kurvenverlauf wie bei den Versuchen im zweiten Stadium.

Wiedergewinnung, Verbleib des aufgezehrten Gases. Nachdem mehrere Aufzehrungsversuche im zweiten und dritten Stadium durchgeführt worden waren, wurde versucht, das aufgezehrte Gas wiederzuerhalten.

Zunächst wurden beide Ringelektroden eine Viertelstunde lang auf heller Rotglut gehalten. Dadurch stieg der Druck in der Röhre nur von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ auf $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ Torr an. Jedoch beim Ausheizen der Glaswände mit Hilfe eines elektrischen Widerstandsofens kam das aufgezehrte Gas teilweise (etwa 50%) wieder zum Vorschein.

Es ergab sich also, daß die Metallelektroden das Gas nicht aufgezehrt hatten, sondern daß das Gas ziemlich tief in die Glaswand „hineingeschossen" worden war.

Aufzehrungsgeschwindigkeit. Zur vollständigen Bedeckung der für die Aufzehrung wirksamen Oberfläche (Wand von Kathode bis zur geerdeten Ringelektrode) durch eine monomolekulare Gasschicht sind etwa $1{,}5 \cdot 10^{17}$ Moleküle notwendig[1]). Bei einmaliger Aufzehrung des Gasvolumens von 600 cm³ von $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ auf $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ Torr verschwinden etwa $2{,}2 \cdot 10^{15}$ Moleküle. Erst nach 60 bis 70maligem Aufzehren wäre die wirksame Oberfläche mit einer monomolekularen Gasschicht ganz bedeckt. Tatsächlich wurde 100mal hintereinander aufgezehrt, ohne daß irgendwelche Ermüdungserscheinungen aufgetreten wären. Um unter Umständen die Aufzehrungsgeschwindigkeit in meßbare Grenzen zu bekommen, wurde ein 5 Liter-Glasballon angeschlossen, der in derselben Weise wie die Röhren von außen her mit 360° C ausgeheizt werden konnte. Auch hierbei war es nicht möglich, die Aufzehrungsgeschwindigkeit experimentell zu erfassen. Wenn die Gasionen in die Glaswand hineingeschossen werden, dürfte auch nichts anderes zu erwarten sein, als daß die Aufzehrungsgeschwindigkeit in erster Näherung

[1]) Dies ist bestimmt zu hoch gerechnet, da ja wohl der Wandteil in der Nähe der Kathode wegen seiner höheren Temperatur weniger wirksam sein kann.

gleich der Bildungsgeschwindigkeit (= Voltgeschwindigkeit) der positiven Ionen ist. Tabelle 4 gibt ein Beispiel der Aufzehrung des 5 Liter-Gasvolumens.

Tabelle 4. Druckabnahme eines 5Liter-Gasvolumens bei einer Anodenspannung von 4000 Volt.

Zeit in sec nach Beginn der Aufzehrung	Druck in 10^{-6} Torr	Zeit in sec nach Beginn der Aufzehrung	Druck in 10^{-6} Torr
0	110	15	4,0
5	18	180	4,2
10	3,84		

Die scheinbare Meßmöglichkeit der Aufzehrungsgeschwindigkeit hierbei entspricht aber nur der Strömungsgeschwindigkeit des Gases auf seinem Wege vom Ballon in die Aufzehrungsröhre hinein, denn der Druck konnte immer erst jeweils nach Abschalten der Versuchsröhre gemessen werden, so daß er sich in der Apparatur ausgleichen konnte.

Aufzehrungsversuche in der Röhre mit Metallwand bei verschiedenen Potentialen der Wand. Es gelang in keiner Weise, in der Röhre mit dem Kupferzylinder, wie sie auf S. 32 beschrieben wurde, Gasaufzehrung herbeizuführen. — Es wurden Versuche durchgeführt bei isoliertem Kupferzylinder und bei verschiedenen Zylinderspannungen (0, — 10, — 20, — 30, — 40 Volt gegen Erde), und zwar mit und ohne Magnetfeld. Hieraus ist also zu schließen, daß eine negative metallische, also elektrisch leitende Wand zu keiner Gasaufzehrung führt.

Versuche in einer Röhre mit weitmaschigem Drahtnetz. In eine andere Röhre wurde ein weitmaschiges Drahtnetz von 90 mm Länge und 35 mm Durchmesser aus vakuumgeschmolzenem Nickeldraht (Durchmesser 0,7 mm und 1 cm quadratischer Maschenweite) an die Stelle des Kupferzylinders eingebaut.

Beim Anlegen von negativen Potentialen V_n (Kathodenpotential 0) an das Netz konnte keine Aufzehrung beobachtet werden. Auch Steigerung des Netzpotentials bis $V_n = +80$ Volt gegen Kathode brachte noch keine Aufzehrung. Bei Netzpotentialen zwischen +80 und +140 trat Aufzehrung in voller Stärke ein, um bei über 140 Volt plötzlich wieder völlig aufzuhören (siehe Tabelle 5).

Ein ESS konnte in keinem Falle wahrgenommen werden. Die Anodenströme verhalten sich wie bei dem Kupferzylinder. Hieraus kann geschlossen werden, daß die Glaswand nur für Netzpotentiale zwischen +80 und −140 Volt Kathodenpotential annimmt. Das Spannungsintervall von 80 bis 140 für die Aufzehrung kann etwa in folgender Weise erklärt werden (vgl. hierzu Tabelle 6):

Tabelle 5. Aufzehrung in der Netzröhre bei verschiedenen Netzpotentialen V_n. Anodenspannung stets: 3500 Volt. Kathodenheizung: 3,65 Amp. Zweite Ringelektrode G: 0 Volt gegen Kathode. Anfangsdruck stets: $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ Torr. (Die Reihenfolge, in der die Versuche tabelliert sind, entspricht auch der zeitlichen Reihenfolge, wie die Versuche ausgeführt wurden.)

V_n in Volt gegen Kathode	Druck in 10^{-6} Torr		V_n in Volt gegen Kathode	Druck in 10^{-6} Torr	
	5^s nach Beginn des Versuchs	6^m nach Beginn des Versuchs		5^s nach Beginn des Versuchs	6^m nach Beginn des Versuchs
0	100	104	+ 120	2,60	3,00
+ 10	100	100	+ 140	2,54	3,50
+ 20	100	105	+ 145	103	117
+ 30	1,55	1,71	+ 30	190	—
+ 25	100	100	+ 25	100	110
+ 28	1,80	1,76	+ 140	100	110
+ 80	2,02	2,60	+ 138	2,60	3,50
+ 150	100	110			

Zwei weitere Versuche bei einer Netzspannung $V_n = +150$ und $V_n = +25$ Volt ergaben keine Aufzehrung.

Tabelle 6. Elektrische Verhältnisse in der Röhre mit Netzwand in bezug auf Gasaufzehrung. V_s = Stoßverlust der Elektronen, V_k = Umklappotential mit $\delta = 1$, V_n = Potential des Drahtnetzes gegen Erde, V_a = Potential der Anode gegen Erde.

	$V_n < V_s$	$V_s < V_n < V_k + V_s$	$V_k + V_s < V_n$
Elektronen durch das Netz auf die Wand?	nein	ja	ja
Endpotential der Wand	V_a	0	V_n
Potential des Innenraums	etwa V_n	etwa V_n	etwa V_n
Sekundäremissionsausbeute δ	—	< 1	$\geqq 1$
Schnelle Ionen auf die Wand?	—	ja	nein
Gasaufzehrung?	nein	ja	nein

Die Elektronen mögen durch Zusammenstöße einen Betrag V_s von etwa 30 Volt verlieren. Ist nun das Potential V_n des Netzes kleiner als V_s, so gelangen keine Elektronen durch das Netz hindurch auf die Wand; es erreichen also allenfalls positive Ionen die Wand und laden sie positiv auf. Befindet sich nun aber das Netzpotential V_n im Intervall $(V_s, V_k + V_s)$, wo V_k wieder wie früher das Umklappotential der Glaswand in bezug auf die Sekundärelektronen bedeuten soll, — so gelangen Elektronen mit einer Energie $V_p < V_k$ auf die Wand und laden sie negativ auf, womit dann die wesentlichen Voraussetzungen für die Gasaufzehrung gegeben sind. Die positiven Ionen werden hierbei allerdings weniger beschleunigt als bei den früheren Aufzehrungen in den Röhren ohne Netz; dafür werden sie aber auch nun durch den viel stärkeren Elektronenstrom in größerer Anzahl erzeugt.

Wird nun das Netzpotential über $V_k + V_s$ hinaus gesteigert, so gelangen sofort Elektronen mit Energien $V_p > V_k$ auf die Glaswand, so daß diese wegen $\delta > 1$ sich positiv aufladen und schließlich das Potential V_n des Netzes erreichen wird. Dadurch ist die Möglichkeit einer Gasaufzehrung ausgeschlossen.

Es ergibt sich also aus dieser Theorie für die negative Aufladung der Wand und damit auch für das Zustandekommen der Aufzehrung die Bedingung, daß das Netzpotential V_n die Ungleichung:

$$V_s < V_n < V_k + V_s$$

erfüllen muß. Werden für V_s und V_k die Werte $V_s = +30$ und $V_k = +110$ Volt (was nicht im Widerspruch zu den in der Literatur vorliegenden Messungen des Umklappotentials steht) eingesetzt, so ergibt sich der experimentelle Befund:

$$+30 < V_n < +140.$$

Aus diesen Versuchen ist also zu schließen, daß es zur Aufrechterhaltung der Aufzehrung nicht genügt, wenn nur den positiven Ionen die Möglichkeit gegeben wird, auf die Wand zu gelangen, sondern es muß auch für die Elektronen die Möglichkeit bestehen, die Wand zu erreichen, denn die Wandladung (vgl. S. 30) ist so gering, daß sie schon durch 10^{12} positive Ionen restlos kompensiert würde, so daß überhaupt keine Aufzehrung meßbar wäre (vgl. S. 35).

Versuche zur Ermittlung einer Sättigungsgrenze der Aufzehrung. Entsprechend den Versuchen auf S. 35 wurden die in der nachstehenden Tabelle 7 aufgeführten Versuche mit der Drahtnetzröhre bei einem Netzpotential von +40 Volt und einer Anodenspannung von 3500 Volt vorgenommen. Vor jedem Versuch wurde ein Druck von $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ Torr eingestellt. Wie aus den Berechnungen auf S. 35 hervorgeht, wird durch Aufzehren von etwa 38 Liter Gas bei 10^{-4} Torr die Röhrenwand zwischen geerdeter Ringelektrode und der Kathode mit einer monomolekularen Schicht bedeckt. Bis zum Erreichen einer Sättigung konnte nach Tabelle 7 etwa 11mal aufgezehrt werden. Das Volumen (einschließlich Leitungen) betrug nun 5,9 Liter. — Es wurden also $11 \cdot 5{,}9 = 65$ Liter aufgezehrt. Wenn die Glasoberfläche als glatt angenommen wird — was wohl nicht der Fall ist —, so ist sie mit einer 1,7-molekularen Schicht bedeckt worden.

Diese Versuchsreihe kann nicht mit den Versuchen auf S. 35 verglichen werden, da die Schußkraft der positiven Ionen, wie bereits erörtert, geringer ist als dort, so daß sie hierbei wohl nicht so tief in die Wand eindringen können.

Tabelle 7. Sättigungsgrenze der Aufzehrung in der Röhre mit Drahtnetz. Druck jeweils in $\cdot 10^{-6}$ Torr. Anfangsdruck: 10^{-4} Torr.

Nr. des Versuchs	Druck nach		
	5^s langem Betrieb	10^s langem Betrieb	180^s langem Betrieb
1	—	—	4,3
2	—	—	4,2
3	—	—	4,4
4	—	—	4,8
5	21,0	4,4	4,9
6	22,0	5,2	6,0
7	31,0	6,0	6,5
8	29,0	5,2	7,0
9	21,0	4,7	8,6
10	18,7	10,4	10,1
11	16,6	8,6	10,5
12	52,0	63,0	80,0
13	80,0	83,0	98,5
14	83,0	88,0	89,0

Zusammenfassung.

1. Bei den elektrischen Gasaufzehrungsversuchen in Druckgebieten unterhalb 10^{-4} Torr wird eine sprunghafte Veränderung des Elektronenstroms (mit „Elektronenstromsprung", ESS abgekürzt, bezeichnet) in einer hochevakuierten Glühkathodenröhre mit ringförmiger Anode zwischen den Werten 0,1 und 30 mA bei 4000 Volt Anodenspannung beobachtet und durch elektrische Umladung der Glaswand gedeutet. Der ESS ist innerhalb des Druckgebietes zwischen $2 \cdot 10^{-7}$ und $2 \cdot 10^{-3}$ Torr druckunabhängig. Die Umladung der Wand ist bedingt durch die Sekundärelektronenemissions-Ausbeute δ der Wand. Ist δ kleiner als 1, so lädt sich die Wand negativ auf; ist δ größer als 1, so lädt sie sich positiv auf.

Durch Gasbeladung wird die Sekundäremission erhöht. δ kann über 1 steigen, und die Wand lädt sich plötzlich positiv auf. Durch Entgasung sinkt δ unter 1, und die Wand lädt sich plötzlich negativ auf.

Durch ein Magnetfeld wird erreicht, daß nur Elektronen mit geringerer Energie auf die Wand gelangen, so daß dabei $\delta < 1$ bleibt unter Bedingungen, bei denen ohne Magnetfeld $\delta > 1$ ist.

Die elektrischen Verhältnisse auf der Glaswand werden durch Hineinbringen einer Metallwand, der Potentiale aufgedrückt werden können, nachgebildet.

2. Es wird ein elektrischer Gasaufzehrungseffekt unterhalb einem Druck von 10^{-4} Torr untersucht.

Die Aufzehrungsgeschwindigkeit ist mit den verwendeten bestmöglichen Hilfsmitteln nicht meßbar.

Die Aufzehrung wird mit dem negativen ESS in Zusammenhang gebracht. Als Vorbedingung für die Aufzehrung ergab sich eine negative Wandaufladung. Die ionisierten Gasatome werden dann in die Glaswand hineingeschossen.

Aufzehrungsversuche in einer entsprechenden Röhre mit Metallwand verliefen negativ.

Aufzehrungsversuche in einer entsprechenden Röhre mit weitmaschigem Drahtnetz waren nur in einem bestimmten Potentialintervall (+ 30, + 140 Volt) des Netzes möglich. Es wurde versucht, dies Potentialintervall auch mit Hilfe der Theorie der Sekundärelektronenemission zu deuten.

Versuche zur Ermittlung der Sättigungsgrenze der Aufzehrung in der Röhre mit Drahtnetz ergaben, daß die als glatt angenommene Glaswand mit einer 1,7-molekularen Gasschicht bedeckt werden kann.

Den experimentellen Teil der vorstehenden Untersuchungen habe ich im Gaede-Laboratorium (I. Versuchslaboratorium der Hochvakuum-Abteilung) der Fa. E. Leybold's Nachfolger Köln-Bayental in der Zeit vom 22. Mai 1939 bis 1. März 1940 durchführen können. Für wertvolle Diskussionen, welche viel zum Gelingen meiner Untersuchungen beitrugen, bin ich Herrn Prof. Dr. W. Weizel-Bonn zu ganz besonderem Dank verpflichtet. Dem Betriebsführer der Firma, Herrn Dr. M. Dunkel, und dem Leiter des Gaede-Laboratoriums, Herrn Dipl.-Ing. Dr. R. Jaeckel, danke ich für das Interesse, das sie meiner Arbeit trotz ihrer starken beruflichen Inanspruchnahme entgegenbrachten; ersterem noch ganz besonders für die bereitwillige Gewährung von Arbeitsplatz und experimentellen Hilfsmitteln seines Betriebes. Auch seinen ungenannten Werksangehörigen sei für ihre Unterstützung bei der technischen Herstellung von Teilen meiner Apparatur gedankt.

Köln-Bayerntal, Gaede-Laboratorium der Fa. E. Leybold's Nachf.
Bonn-Rhein, Physikalisches Institut der Universität, im Juni 1940.

Lichtanregung in leichtem und schwerem Wasserstoff durch Caesiumionen von 2500 bis 25000 e-Volt.*)

Von **Karl Mehnert** in Darmstadt.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1940.)

Es werden Lichtanregungsversuche durch Caesiumionenstoß in leichtem und schwerem Wasserstoff beschrieben. Für einige Wasserstoff- und Caesiumfunkenlinien wurden Anregungsfunktionen gemessen. Zum Studium von Stoßprozessen eignen sich Isotope wie H_2 und D_2 besonders gut, weil beim Übergang von H_2 nach D_2 sich nur die Masse, nicht aber die Elektronenhülle des einen Stoßpartners ändert. Solche Versuche sollten zeigen, welchen Einfluß die Masse auf die Stoßausbeute hat. Das Ergebnis der Arbeit läßt sich u. a. so formulieren: Die Intensität der Wasserstoff- wie auch der Caesiumfunkenlinien ist nur von der kinetischen Energie im Schwerpunktssystem der beiden Stoßpartner abhängig, solange diese Energie klein ist. Im einzelnen ist in allen Punkten der spezielle Verlauf der Anregungsfunktion beim Übergang von H_2 nach D_2 nach Energie- und Impulssatz qualitativ verständlich.

1. Einleitung und Problemstellung. Die Lichtanregung durch Atom- und Ionenstoß ist sehr viel weniger übersichtlich als beim Elektronenstoß, weil sowohl das gestoßene als auch das stoßende Teilchen zusammengesetzter Natur sind. Das hat auch zur Folge gehabt, daß die Theorie dieser Erscheinungen bisher in einigen Anfängen steckengeblieben ist. Eine Deutung des Erfahrungsmaterials wurde bisher an Hand von empirisch gewonnenen Gesichtspunkten versucht, z. B. durch den Vergleich der Lichtanregung in einem bestimmten Gas durch verschiedene stoßende Teilchen. Wenn man einen Stoßpartner gegen einen neuen austauscht, so ändert man im allgemeinen zwei Parameter, und zwar die Masse und die Elektronenhülle des Stoßpartners. Wesentlich einfacher liegen die Verhältnisse, wenn man die Isotope eines Elements zur Lichtanregung verwendet. Beim Übergang von einem Isotop zum anderen bleibt die Elektronenhülle dieselbe, und nur die Masse wird verändert. Am günstigsten sind Versuche mit H und D, weil in diesem Falle die relative Massenänderung am größten ist. Solche Versuche sollten also einen Einblick in die Bedeutung der Masse eines Stoßpartners für die Stärke der Lichtausbeute geben.

Hanle und Junkelmann[1] [2] haben als erste Anregungsversuche mit den Isotopen H und D durchgeführt. Sie beobachteten die Licht-

*) D 87.

[1]) W. Hanle u. R. Junkelmann, Phys. ZS. **38**, 995, 1937. — [2]) R. Junkelmann, ZS. f. Phys. **107**, 561, 1937.

anregung in He und Ar durch H- und D-Kanalstrahlen. Hierbei ergab sich, daß die Lichtanregung in He bei gleicher Energie der H- und D-Atome stärker ist, wenn H anregt; bei gleicher Relativgeschwindigkeit regte D stärker als H an. In Ar war die Anregung im wesentlichen von der Relativgeschwindigkeit abhängig. Die Hauptfehlerquelle bestand bei diesen Versuchen in der — bei Kanalstrahlen unumgänglichen — Energieinhomogenität der Atomstrahlen.

In dieser Arbeit wurde versucht, diese Fehlerquelle zu vermeiden, und zwar dadurch, daß H_2 und D_2 als *gestoßene* Partikel und Cs-Ionen als stoßende Teilchen gewählt wurden. Cs-Ionenstrahlen lassen sich mit sehr großer Energiehomogenität herstellen. Da es sich hier um thermisch ausgelöste Ionen handelt, ist die Energiestreuung ihrem absoluten Betrage nach gleich der thermischen Energie bei $\sim 600^0$ C, d. h. kleiner als 1 Volt. Bei den gebräuchlichen Beschleunigungsspannungen von einigen 1000 Volt sind solche Cs-Ionenstrahlen also vollkommen homogen. Anregungsversuche in dieser Form haben allerdings den Nachteil, daß die Moleküle H_2 bzw. D_2 und nicht die einfacheren Atome H und D als Stoßpartner auftreten. Aus diesem Grunde wird auch ein Vergleich mit den obengenannten Versuchen von Hanle und Junkelmann schwieriger. Es wurden gerade Cs-Ionen gewählt, um im Gegensatz zu Hanle und Junkelmann die Lichtanregung beim Zusammenstoß von H_2 und D_2 mit einem möglichst schweren Teilchen zu untersuchen.

Beim Stoß von Cs-Ionen auf H_2 und D_2 treten Wasserstoffatomlinien und Cs-Funkenlinien auf. Es werden die Anregungsfunktionen von einigen solcher Linien in den Fällen $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ mitgeteilt und in Hinblick auf den Einfluß der Massenänderung diskutiert. Auffallenderweise treten auch starke Cs-Bogenlinien auf. Wie in der an diese Arbeit anschließenden Arbeit[1]) gezeigt wird, müssen diese Cs-Bogenlinien durch Umladung der Cs-Ionen am Wasserstoffmolekül mit gleichzeitiger Anregung des entstehenden Cs-Atoms erklärt werden.

2. Versuchsanordnung. Zur Durchführung der Untersuchungen wurde eine bereits früher von Maurer[2]) entwickelte Apparatur verwendet. In der Fig. 1 ist diese Apparatur im Schnitt wiedergegeben. Sie besteht aus zwei Hauptteilen, die beide durch einen Glaskasten voneinander isoliert sind. Im geerdeten unteren Teil ist die Ionenquelle (mit Anode bezeichnet) untergebracht, der obere Apparaturteil liegt zur Beschleunigung der Ionen an Hochspannung. Die Ionen treten durch ein als Ionenlinse wirkendes

[1]) K. Mehnert uud Werner Maurer, ZS. f. Phys. **117**, 55, 1940. — [2]) W. Maurer, ebenda **101**, 323, 1936.

Spaltsystem in den Beobachtungsraum (durch einen Kreis angedeutet) ein, wo die Lichtanregung der zu untersuchenden Gasfüllung beobachtet werden kann. Der in den Beobachtungsraum eintretende Ionenstrom konnte mit einem Faraday-Käfig, der bei der Messung an die Beobachtungsstelle heruntergelassen wurde, gemessen werden.

Die Anode war gefüllt mit einem Gemisch von $Cs_2 \cdot CO_3 + SiO_2 + Al_2O_3$, welches bei Rotglut Cs-Ionen emittiert. Eine solche Anode liefert für 50 bis 100 Stunden einen sehr gut konstanten Ionenstrom von 0,1 mA.

Die zur Beschleunigung der Cs-Ionen erforderliche Gleichspannung (bis max. 30 kV) sowie die Spannung für die Ionenlinse wurden zwei voneinander unabhängigen Gleichrichteranlagen entnommen. Die Messung des Cs-Ionenstromes erfolgte mit einem tiefen Faraday-Käfig mit Schutzzylinder zur Vermeidung von Sekundärelektronen. Alle näheren Einzelheiten sind aus der Schaltskizze in Fig. 2 ersichtlich.

Da die heiße Ionenquelle dauernd Gas abgab, mußte in strömendem Gas gearbeitet werden. Die untersuchten Gase: H_2, D_2 und He wurden mit einer dreistufigen Hg-Pumpe aus dem unteren geerdeten Teil der Apparatur abgepumpt. Nach einer gründlichen Reinigung durch tiefgekühlte Adsorptionskohle wurden sie dem Beobachtungsraum im Kreislauf wieder zugeführt. Um beim Arbeiten mit H_2 und D_2 die Gasfüllungen schnell auswechseln zu können, waren zwei identische Kreislaufwege aufgebaut worden. Dadurch konnte durch Betätigung weniger Glashähne H_2 gegen D_2 ausgewechselt werden. Das

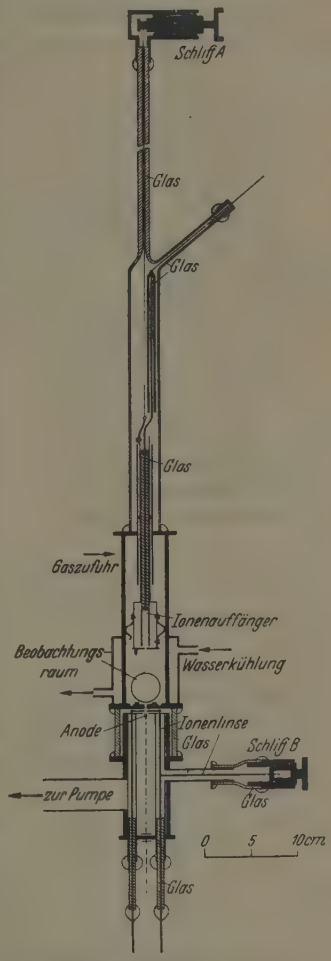


Fig. 1. Versuchsanordnung.

benutzte D_2 wurde elektrolytisch aus 99,6%igem D_2O nach einem von Norling[1]) angegebenen Verfahren hergestellt.

Für die Spektralaufnahmen wurde der kleine, sehr lichtstarke Spektrograph des Darmstädter Instituts verwandt (Öffnungsverhältnis 1 : 0,9). Als Photoplatte diente die Pervola (panchromatisch und extra feinkörnig). Entwickelt wurde unter stets gleichbleibenden Bedingungen mit einem Rapidentwickler. Die Schwärzung der Photoplatten wurde mit einem Photometer nach Koch-Goos gemessen.

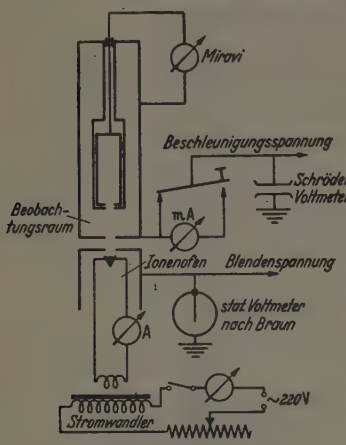


Fig. 2. Elektrisches Schaltschema

3. Strom- und Druckabhängigkeit der untersuchten Linien. Wenn man vermeiden will, daß die Lichtanregung der zu untersuchenden Elementarprozesse durch sekundäre Prozesse — z. B. Stöße zweiter Art — verfälscht wird, muß man bei kleinen Drucken und kleinen Ionenströmen arbeiten. Da die störenden Sekundärprozesse quadratisch mit dem Ionenstrom und Gasdruck abnehmen, werden sie bei kleinen Drucken und Ionenströmen zurücktreten gegenüber der direkten Stoßanregung, welche nur linear mit dem Druck abnimmt. Fig. 3 und 4 zeigen die gemessene Strom- und Druckabhängigkeit einer Reihe von H-, D- und Cs II-Linien. Danach ist für die technisch erreichbaren Ionenströme die Abhängigkeit linear, während bei höheren Drucken eine Abweichung vom linearen Verlauf eintritt. Die Anregungsfunktionen wurden im gut linearen Druckintervall gemessen, und zwar wurden die

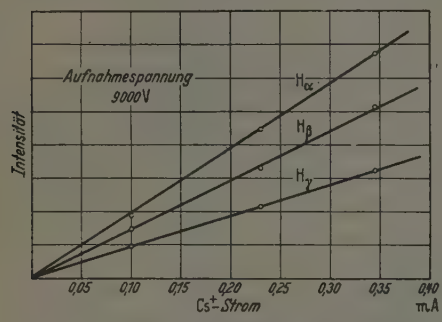


Fig. 3. Die relative Lichtausbeute einiger Wasserstofflinien in Abhängigkeit vom Cs-Ionenstrom.

[1]) F. Norling, Phys. ZS. **36**, 711, 1935.

Aufnahmen der Cs II-Linien bei $60 \cdot 10^{-3}$ Torr und die der H- und D-Linien bei $10 \cdot 10^{-3}$ Torr gemacht. Damit war die unverfälschte Beobachtung des Elementarprozesses gewährleistet.

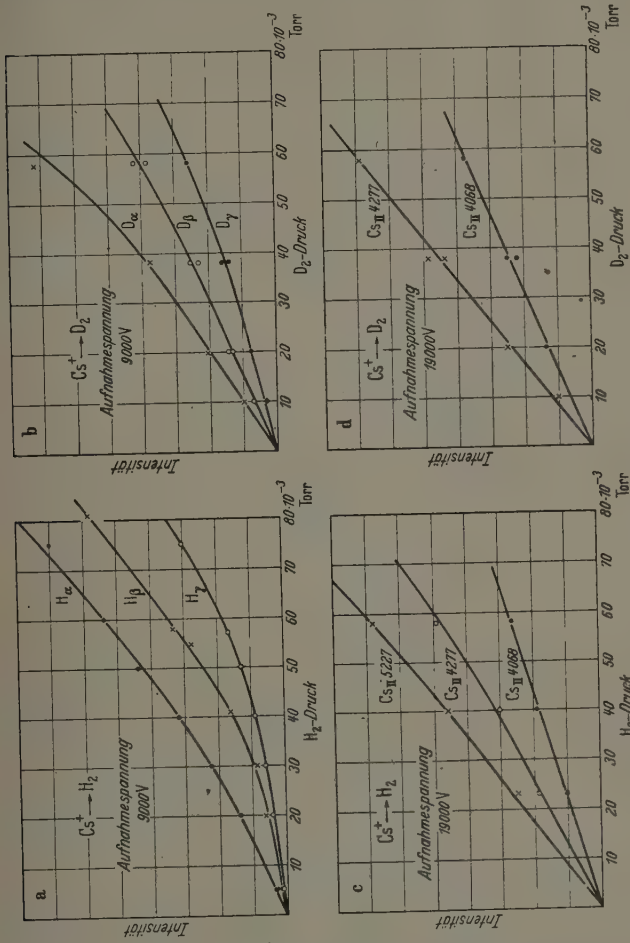


Fig. 4. Die relative Lichtausbeute einiger H-, D- und Cs^+-Linien in Abhängigkeit vom H_2- bzw. D_2-Druck im Beobachtungsraum.

Die Bezeichnung Cs_{II} . . . muß richtig lauten Cs II . . .

4. Meßergebnisse. Bei kleinen Beschleunigungsspannungen unterhalb 10 kV traten im Spektrum praktisch nur die Wasserstoffatomlinien sowie einige Cs-Bogenlinien[1]) auf; dementsprechend hatte das Stoßleuchten der

[1]) Siehe hierzu die folgende Arbeit.

Cs-Ionen in leichtem und schwerem Wasserstoff eine rote Farbe. Erst bei Beschleunigungsspannungen von über 10 kV wurden die Linien des Cs-Ions mit gleicher und dann bald mit größerer Intensität als die Wasserstofflinien beobachtet. Infolge der hauptsächlich im Blauen liegenden Cs-Ionenlinien schlug oberhalb 10 kV die Farbe des Stoßleuchtens von Rot nach Blau um.

In den beiden Fällen $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ wurden die Anregungsfunktionen von H_α, H_β, H_γ bzw. D_α, D_β, D_γ sowie diejenigen der stärksten und isoliert liegenden Cs^+-Linien $\lambda = 4277, 4068$ und $5249 + 5227$ gemessen.

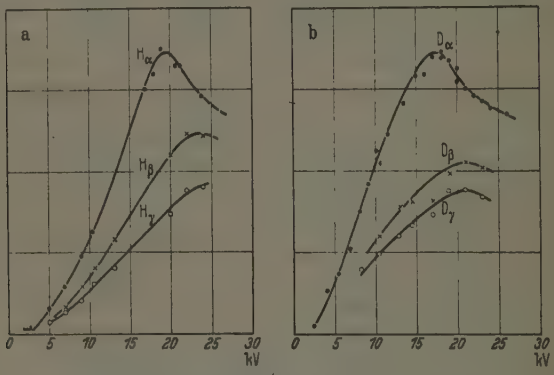


Fig. 5. Anregungsfunktionen von Wasserstoff- und Deuteriumlinien, angeregt durch Cs-Ionenstoß.

Die Ergebnisse sind in den Fig. 5, 6a und 7a enthalten. Da die Spektren aus photometrischen Gründen mit breitem Spalt aufgenommen werden mußten, konnten die Linien 5249 und 5227 nicht mehr sicher getrennt werden. Die gemessene Anregungsfunktion bezieht sich auf die Summe beider Linien. Zur Bestimmung der Anregungsfunktionen wurde das übliche photographisch-photometrische Verfahren unter Verwendung eines Graukeils bekannter Durchlässigkeit verwandt. Bei verschiedenen Spannungen wurde z. B. die H_α-Linie mit dem Graukeil bis zu einer Standardschwärzung auf der Photoplatte abgeschwächt. Aus der jeweiligen Größe der dazu notwendigen Abschwächung ergibt sich unmittelbar die relative Intensität bei den verschiedenen Spannungen.

Wünschenswert wäre eine Bestimmung der absoluten Lichtausbeute gewesen. Aus Zeitgründen mußte jedoch davon Abstand genommen werden. Dem allgemeinen Ziel dieser Arbeit entsprechend wurde aber die relative

Lichtausbeute in den beiden Stoßprozessen $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ gemessen. Dieser Vergleich wurde bei den einzelnen Linien derart durchgeführt, daß bei einem oder zwei Werten der Beschleunigungsspannung die Lichtausbeute durch Cs^+-Stoß in H_2 mit derjenigen in D_2 verglichen wurde. Das photographisch-photometrische Verfahren war dasselbe wie das oben angedeutete. Mit den so gewonnenen relativen Intensitäten für bestimmte Spannungswerte wurden dann die bereits gemessenen Anregungsfunktionen von z. B. H_α und D_α entsprechend übereinander gezeichnet. In den Fig. 6a und 7a sind die gemessenen Vergleichspunkte durch Kreuze bzw. kleine Dreiecke bezeichnet worden (für H_α und D_α z. B. bei 10500 und 20000 Volt). Durch eine besondere Vergleichsmessung wurden die Ergebnisse dieser Arbeit an eine frühere Untersuchung der Lichtanregung durch $Cs^+ \rightarrow He$ von Maurer[1]) angeschlossen. Auch in dieser letzteren Arbeit waren die Anregungsfunktionen von Cs II-Linien gemessen worden. Hier wurde die relative Ausbeute einiger dieser Cs II-Linien in den Fällen $Cs^+ \rightarrow He$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ bei 19000 Volt gemessen (s. Kreuze in Fig. 7a). Die Anregungsfunktionen für $Cs^+ \rightarrow He$ stammen aus der Arbeit von Maurer. In Fig. 6a sowie in Fig. 7a geben also die Ordinaten relative Lichtausbeuten an. Alle Messungen wurden mindestens zweimal gemacht. Die eingezeichneten Meßpunkte vermitteln ein Bild der erreichten Genauigkeit.

Fig. 6b und 7b enthalten die hier besprochenen Meßergebnisse in umgezeichneter Form. Hierauf soll erst in Abschnitt 5 näher eingegangen werden.

5. Diskussion der Ergebnisse. Trotzdem die Moleküle H_2 und D_2 angeregt wurden, traten — neben den Linien der Alkaliionen — nur Wasserstoffatomlinien auf. Die Molekülllinien waren jedenfalls sehr viel schwächer. Dies kann man verstehen, wenn man annimmt, daß die bei einem so energiereichen Teilchenstoß auf das Wasserstoffmolekül übertragene Anregungsenergie im allgemeinen so hoch ist, daß das Wasserstoffmolekül in der Mehrzahl der Fälle dissoziiert, wobei normale und angeregte H-Atome entstehen.

In Fig. 5 sind die Anregungsfunktionen von H_α, H_β, H_γ bzw. D_α, D_β, D_γ enthalten. In leichtem und schwerem Wasserstoff verschieben sich die Anregungsmaxima innerhalb der Balmer-Serie nach größeren Energien; besonders deutlich ist der Unterschied zwischen den ersten beiden Gliedern der Serie. Dies steht in Übereinstimmung mit ähnlichen Beobachtungen beim Korpuskular- und Elektronenstoß[2]).

[1]) W. Maurer, ZS. f. Phys. **104**, 113, 1936. — [2]) Siehe z. B. den zusammenfassenden Bericht von W. Maurer, Phys. ZS. **40**, 161, 1939.

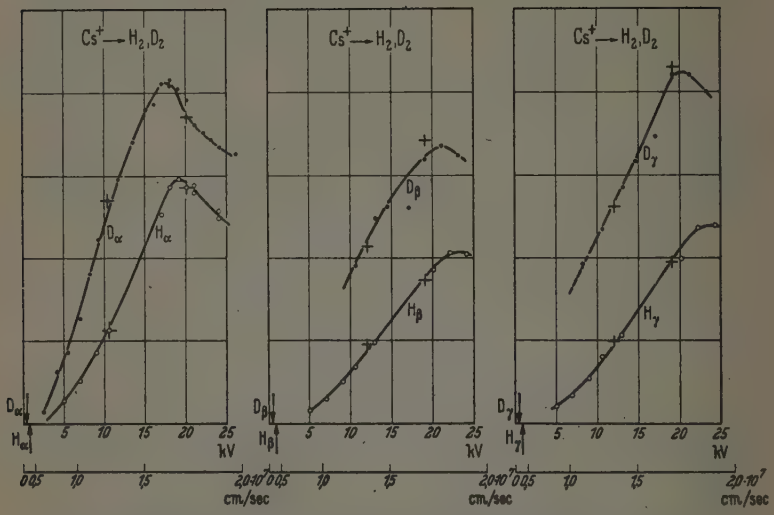


Fig. 6a. Anregungsfunktionen der drei ersten Glieder der Balmer-Serie als Funktion der Caesiumionenenergie bzw. der Relativgeschwindigkeit beim Stoß. (Ordinaten vergleichbar.)

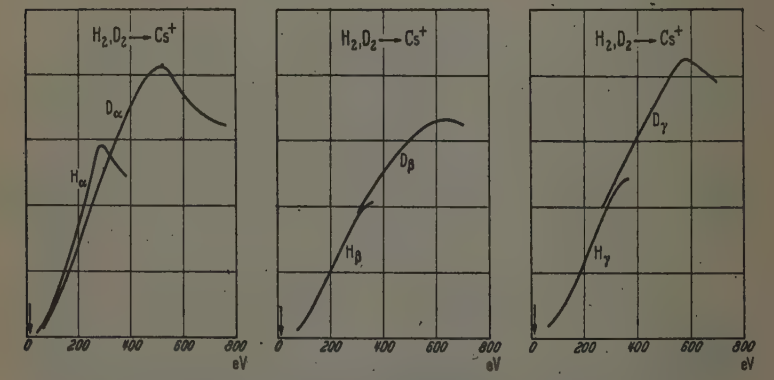


Fig. 6b. Anregungsfunktionen der drei ersten Glieder der Balmer-Serie für die in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt gedachten Stöße $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$. (Ordinaten vergleichbar.)

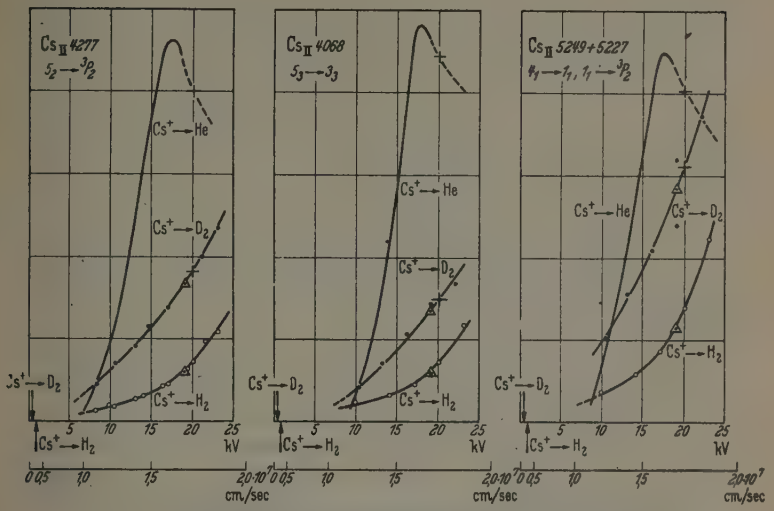


Fig. 7a. Anregungsfunktionen einiger Cs-Funkenlinien für die Stoßprozesse: $Cs^+ \rightarrow H_2$, D_2, He. (Ordinaten vergleichbar.)

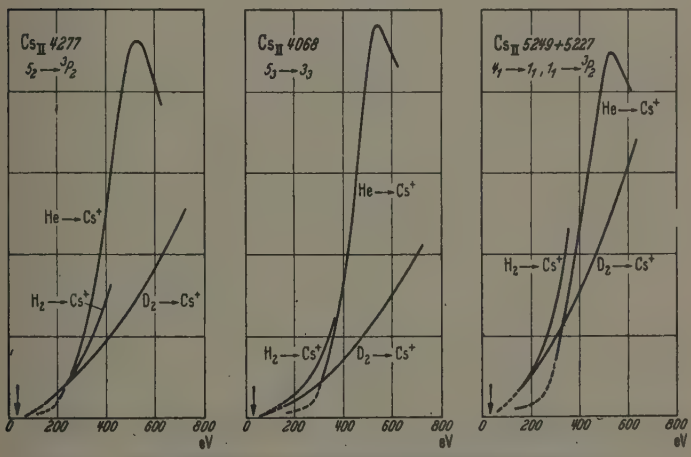


Fig. 7b. Anregungsfunktionen einiger Cs-Funkenlinien für die in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt gedachten Stöße $H_2 \rightarrow Cs^+$, $D_2 \rightarrow Cs^+$ und $He \rightarrow Cs^+$. (Ordinaten vergleichbar.)

Die Bezeichnung Cs_{II} . . . muß richtig lauten: $^1Cs\,II$ . .

Von Interesse sind die echten Einsatzpotentiale der Wasserstoff- und Cs II-Linien. Nach Energie- und Impulssatz sollten diese bei folgenden Beschleunigungsspannungen liegen: H_α bei 810 e-Volt, H_β bei 850 e-Volt, H_γ bei 870 e-Volt; D_α bei 415 e-Volt, D_β bei 435 e-Volt und D_γ bei 442 e-Volt. Wenn man für die nicht genau bekannten Anregungsenergien der Cs II-Linien den ungefähren Wert 20 e-Volt annimmt, folgen daraus die echten Einsatzpotentiale: In dem Falle $Cs^+ \rightarrow H_2$: $\sim$ 1400 e-Volt und bei $Cs^+ \rightarrow D_2$: $\sim$ 700 e-Volt. Aus Intensitätsgründen konnten diese relativ niedrigen Einsatzpotentiale nicht gemessen werden. Der gemessene Kurvenverlauf in Fig. 6 und 7 steht aber mit diesen Werten jedenfalls nicht im Widerspruch (siehe die eingezeichneten Pfeile an der Stelle der echten Einsatzpotentiale).

In der weiteren Diskussion soll nun der Vergleich zwischen den Stößen $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ durchgeführt werden. Dazu ist vorerst noch eine neue Darstellung der Versuchsergebnisse notwendig.

Auf der Suche nach empirischen Gesichtspunkten bei der Deutung von Anregungsfunktionen ist oft die Frage nach der Bedeutung der Energie bzw. der Relativgeschwindigkeit beim Stoß diskutiert worden. Ein dritter möglicher Parameter ist die Energie im Schwerpunktssystem. In den Kurven der Fig. 6a und 7a ist als unmittelbares Meßergebnis die Stärke der Anregung von Wasserstoff- und Cs-Funkenlinien in Abhängigkeit von der Stoßenergie der Cs-Ionen aufgetragen worden. Da es sich in beiden Fällen — $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ — um das gleiche stoßende Teilchen handelt, ist bei gleicher Energie auch die Relativgeschwindigkeit gleich (siehe den zweiten Abszissenmaßstab in Fig. 6a). Das gleiche gilt für die drei Cs II-Linien in Fig. 7a. In Abschnitt 3 ist gezeigt worden, daß die beobachtete Lichtanregung tatsächlich vom gesuchten Elementarprozeß herrührt; denn die Anregungsfunktionen wurden in einem Ionenstrom- und Wasserstoffdruckgebiet gemessen, in dem die Lichtausbeute mit beiden linear anstieg. Aus diesem Grunde dürfen die beobachteten Stoßprozesse auch in umgekehrter Richtung, d. h. in der Form $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$ betrachtet werden. Die Ergebnisse gestatten also auch eine Aussage über die Lichtausbeute, welche H_2- bzw. D_2-Moleküle als stoßende Teilchen in einem Gas aus Cs-Ionen hervorrufen würden. Die hierzu notwendigen elementaren Umrechnungen führen zu den Kurven der Fig. 6b und 7b. Die Ordinaten sind vergleichbar. Wegen des großen Massenunterschiedes zwischen H_2 bzw. D_2 und Cs^+ sind die Energieangaben der Abszisse viel kleiner als bei der Betrachtung des umgekehrten Stoßes mit Cs^+ als stoßendem Teilchen. Da die Massen von H_2 bzw. D_2 sehr viel kleiner sind als diejenigen des

Cs-Ions, ist die durch die Umrechnung gewonnene Darstellung der Anregung in Fig. 6b und 7b praktisch identisch mit einer Darstellung der Anregung in Abhängigkeit von der Energie im Schwerpunktssystem der beiden Stoßpartner. Als Gesamtergebnis dieser Arbeit läßt sich aus den Fig. 6a, b und Fig. 7a, b folgendes ablesen:

1. Stoßen Cs-Ionen von einer bestimmten Energie und damit auch einer festen Relativgeschwindigkeit auf ruhende H_2- bzw. D_2-Moleküle, so ist die Anregung der H- bzw. D-Balmer-Serie *sowie* der Cs II-Linien bei $Cs^+ \rightarrow D_2$ stärker als bei $Cs^+ \rightarrow H_2$.

2. Wenn man H_2 bzw. D_2 als stoßende Teilchen betrachtet, so ist im Fall gleicher Energie von H_2 und D_2 die Lichtausbeute der H_α- bzw. D_α- und der Cs II-Linien bei der Anregung durch H_2 stärker als durch D_2; im Falle gleicher Relativgeschwindigkeit ist die Reihenfolge umgekehrt, und zwar ist die Anregung durch D_2 größer als durch H_2. Bei kleinen Energien der als stoßend betrachteten H_2- und D_2-Moleküle ist die Anregung auffälligerweise *nur von der Energie* und nicht mehr von der Masse der stoßenden Moleküle abhängig.

3. Dasselbe gilt wie unter 2., wenn man die Betrachtung für die Energie und die Relativgeschwindigkeit im Schwerpunktssystem durchführt.

Diese unter Punkt 1, 2 und 3 zusammengefaßten Ergebnisse sind qualitativ auf Grund der Erhaltungssätze von Energie und Impuls verständlich:

Zu 1: Wenn Cs-Ionen einmal auf H_2- und dann auf D_2-Moleküle stoßen, ist der maximale Bruchteil der Energie, welcher in Anregungsenergie verwandelt werden könnte, im ersten Falle bei H_2 — also beim Stoß auf die kleinere Masse — kleiner als beim Stoß auf D_2; denn dieser Bruchteil ist gleich $\frac{m_{H_2}}{m_{Cs}+m_{H_2}}$ bzw. $\frac{m_{D_2}}{m_{Cs}+m_{D_2}}$. Es ist deshalb plausibel, daß die Lichtanregung sowohl der Wasserstofflinien wie auch der Cs II-Linien bei $Cs^+ \rightarrow D_2$ etwa doppelt so stark ist wie bei $Cs^+ \rightarrow H_2$. Das besondere Verhalten der Cs II-Anregungsfunktion bei $Cs^+ \rightarrow He$ (Fig. 7a und b) ist mit so einfachen Gesichtspunkten nicht verständlich.

Zu 2: Bei den in umgekehrter Form ausgeführt gedachten Stößen $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$ ist der in innere Energie umwandelbare Bruchteil der Bewegungsenergie in beiden Fällen praktisch gleich, und zwar bei $H_2 \rightarrow Cs^+$ etwas größer als bei $D_2 \rightarrow Cs^+$. Es erscheint deshalb verständlich, daß bei gleicher Energie der stoßenden H_2- bzw. D_2-Moleküle die Wasserstofflinien wie auch die Cs II-Linien in beiden Fällen $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$ etwa gleich stark angeregt werden. Bei größeren Energien, wo die Kurven stärker auseinanderlaufen, liegen die Anregungsfunktionen für $H_2 \rightarrow Cs^+$

über denjenigen für $D_2 \rightarrow Cs^+$ in Übereinstimmung mit obigen elementaren Impulsbetrachtungen. Es erscheint bemerkenswert, daß man in großen Zügen die experimentellen Ergebnisse bereits mit Energie- und Impulssatz recht gut verstehen kann. Beim anregenden Stoß benehmen sich die Stoßpartner H_2 und D_2 wie kompakte Massen, was verständlich erscheint, wenn man bedenkt, daß die bei diesen Stoßversuchen vorkommenden Relativgeschwindigkeiten etwa zehnmal kleiner sind als die Umlaufsgeschwindigkeiten der Elektronen in den stoßenden H_2- bzw. D_2-Molekülen.

Von Döpel ist vor einigen Jahren der Versuch gemacht worden, die Lichtanregung beim Teilchenstoß an Hand eines einfachen Stoßmodells zu verstehen. Döpel bezeichnet als „übertragbare Energie", welche in Anregungsenergie verwandelt werden kann, die Summe aus der kinetischen Energie des als quasi frei gedachten Valenzelektrons des stoßenden Teilchens, vermehrt um einen gewissen, von Fall zu Fall verschiedenen Bruchteil der kinetischen Energie des Atomrumpfes des stoßenden Teilchens:

$$W = \frac{m_e v^2}{2} + k\,(E_1, E_2)\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{m_1 v^2}{2}$$

(m_e = Masse des Valenzelektrons, v = Relativgeschwindigkeit beim Stoß, m_1 = Masse des stoßenden Teilchens, m_2 = Masse des gestoßenen Teilchens, $k\,(E_1\,E_2)$ nur abhängig von den Anregungsenergien der Stoßpartner.

Döpel hat diese Vorstellungen entwickelt am Fall der Lichtanregung von He-Linien durch schnelle H-Atome. In diesem Falle ist der zweite Term von W eine relativ geringe Korrektion. Bei den viel kleineren Relativgeschwindigkeiten in der hier untersuchten Anregung durch die schweren Cs-Ionen beträgt aber der erste Term in W günstigenfalls nur 0,1 Volt. W besteht also hier praktisch nur aus dem zweiten Term. Da der Döpelsche Faktor $k\,(E_1\,E_2)$, welcher von den Anregungsenergien der Stoßpartner abhängen soll, hier bei $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ gleich ist, wird hier $W = \text{const} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v^2}{2}$. Dieser Ausdruck ist aber in seinen Konsequenzen vollkommen identisch mit den oben bereits dargelegten Überlegungen nach Energie- und Impulssatz, so daß sich eine besondere Erörterung erübrigt.

Nach einer theoretischen Arbeit von Massey und Smith[1]) soll die Lichtanregung beim Teilchenstoß im Gegensatz zum Elektronenstoß erst oberhalb einer sogenannten Aktivierungsenergie stark ansteigen. Diese Aktivierungsenergie ergibt sich im Schwerpunktssystem als proportional

[1]) H. S. W. Massay u. R. A. Smith, Proc. Roy. Soc. London (A) **142**, 142.

dem Ausdruck $M \cdot (\Delta E)^2 \cdot R^2$ (M = resultierende Masse, ΔE = Anregungsenergie, R = Summe der gaskinetischen Radien beider Stoßpartner). Da für Cs-Ionenstoß gegen die Isotope H_2 und D_2 die Größen ΔE und wohl auch R gleich sind, hängt der Ausdruck $M \cdot (\Delta E)^2 \cdot R^2$ nur von M ab. Da dieser für $Cs^+ \rightarrow H_2$ kleiner ist als für $Cs^+ \rightarrow D_2$, ergibt sich also für $Cs^+ \rightarrow H_2$ die kleinere Aktivierungsenergie. In schwerem Wasserstoff sollte also die Anregung bereits bei kleineren Energien größere Beträge annehmen als in leichtem Wasserstoff. Als Folge davon wäre anzunehmen, daß im Schwerpunktssystem (s. Fig. 6b und 7b) die Anregung mit D_2 stärker ist als diejenige mit H_2, was auch der Fall ist. Vielleicht hängt mit der bei $Cs^+ \rightarrow H_2$ kleineren Aktivierungsenergie auch zusammen, daß nach Fig. 5 die Anregungsmaxima von H_α und D_α in der Reihenfolge der Größe der Aktivierungsenergie liegen.

6. Vergleich der Ergebnisse dieser Arbeit mit denjenigen anderer Autoren. In der Einleitung wurde bereits auf die Anregungsversuche durch H- und D-Atome in He und Ar von Hanle und Junkelmann hingewiesen. Wenn man diese Anregungsfunktionen für H, $D \rightarrow He$ umzeichnet und dabei als Abszisse die kinetische Energie im Schwerpunktssystem nimmt, sieht man, daß die Anregung von H und D sowie der He-Linie $\lambda = 3888$ bei kleinen Energien nur von der Schwerpunktsenergie abhängt. Genau dasselbe Ergebnis wurde hier für $Cs^+ \rightarrow H_2$, D_2 erhalten. Bei H, $D \rightarrow Ar$ liegen die Verhältnisse nach Junkelmann[1]) anders. Hier hängt die Anregung wesentlich von der Relativgeschwindigkeit beim Stoß ab. Dabei muß aber berücksichtigt werden, daß die untere Grenze der bei diesen Versuchen verwandten Beschleunigungsenergien noch sehr hoch ist. Über den Verlauf der Anregungsfunktion bei kleineren Energien ist noch nichts bekannt.

Nach Wolf[2]) ist die Umladung bis 1000 Volt Beschleunigungsspannung von H^+, D^+ und H_2^+ D_2^+ in Ar bei gleicher Geschwindigkeit gleich stark. Bei Energien bis $\sim$ 100 kV sollten nach Meyer[3]) alle zwischen H, D und Ar möglichen Elementarprozesse (Anregung, Ionisation, Umladung) im wesentlichen nur von der Relativgeschwindigkeit abhängen in Übereinstimmung mit den speziellen Messungen von Wolf[2]) und Junkelmann[1]).

Diese Gegenüberstellung des wenigen bisher vorhandenen Materials über Stöße mit H_2 bzw. D_2 zeigt, daß noch kein für alle Fälle gültiger Gesichtspunkt über den Einfluß der Massenänderung bei Stößen mit Isotopen sich angeben läßt. Alle eventuell diskutierbaren Gesichtspunkte haben vorerst den Charakter von Vermutungen.

[1]) R. Junkelmann, ZS. f. Phys. **107**, 561, 1937. — [2]) F. Wolf, Ann. d. Phys. **28**, 361, 1937. — [3]) H. Meyer, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. (3) **19**, 30, 1938.

7. Zusammenfassung. Für Caesiumionenstoß gegen leichten und schweren Wasserstoff wurden die Anregungsfunktionen von einigen Wasserstoff- und Caesiumfunkenlinien im Energieintervall von 2500 bis 25000 e-Volt gemessen.

Die Messung erfolgte bei so kleinen H_2- bzw. D_2-Drucken und Cs-Ionenströmen, bei denen die Lichtintensität noch linear mit Druck und Strom anstieg. Es sind also sicher die durch sekundäre Effekte ungestörten Elementarprozesse beobachtet worden.

Die Ergebnisse lassen folgende Formulierung zu:

1. Bei gleicher Energie und damit auch gleicher Relativgeschwindigkeit der stoßenden Caesiumionen ist die Anregung der Wasserstoff- wie auch der Caesiumfunkenlinien bei $Cs^+ \rightarrow D_2$ stärker als bei $Cs^+ \rightarrow H_2$.

2. Denkt man sich den Stoß umgekehrt in der Art $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$ ausgeführt, so daß also H_2- bzw. D_2-Moleküle gegen ruhende Cs-Ionen stoßen, so ergibt sich: Bei gleicher kinetischer Energie der H_2- bzw. D_2-Molekülen ist die Anregung der H_α- bzw. D_α- wie auch der Caesiumfunkenlinien bei $H_2 \rightarrow Cs^+$ und $D_2 \rightarrow Cs^+$ bei kleinen Beschleunigungsenergien *gleich*. Bei größeren Energien der stoßenden Moleküle überwiegt die Anregung beim Stoß $H_2 \rightarrow Cs^+$ gegenüber der bei $D_2 \rightarrow Cs^+$. Umgekehrt ist nach Fig. 6a und 7a bei gleicher Relativgeschwindigkeit die Anregung bei $D_2 \rightarrow Cs^+$ größer als bei $H_2 \rightarrow Cs^+$.

3. Betrachtet man die Anregung als Funktion der kinetischen Energie in dem Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt der beiden Stoßpartner ruht, so ist bei kleinen kinetischen Energien die Anregung der Wasserstoff- wie auch der Caesiumfunkenlinien nur von der Energie im Schwerpunktssystem abhängig. Bei größeren Energien überwiegt die Anregung bei $H_2 \rightarrow Cs^+$ diejenige bei $D_2 \rightarrow Cs^+$.

Ergebnis 1 und 2 sind nach Energie- und Impulssatz qualitativ verständlich.

Die Ergebnisse werden mit Versuchen von Haule und Junkelmann über Anregung mit den isotopen Atomen H und D in He und Ar verglichen.

Herrn Dozent Dr. ing. W. Maurer danke ich bestens für die Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. H. Rau danke ich besonders herzlich für sein Interesse an dieser Arbeit und die Förderung, die er mir zuteil werden ließ.

Umladung mit gleichzeitiger Anregung beim Alkaliionenstoß gegen Wasserstoff, Helium und Quecksilber*).

Von **Karl Mehnert** und **Werner Maurer** in Darmstadt.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1940.)

Die beim Stoß von Alkaliionen gegen H_2, D_2, He und Hg auftretenden Alkalibogenlinien werden als Umladung mit einer gleichzeitigen Anregung der entstehenden Alkaliatome gedeutet. Die Alkalibogenlinien zeigen den zu erwartenden Doppler-Effekt. Auch bei diesen Umladungen bewährt sich das Resonanzprinzip. An den Stößen $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ wird der Einfluß der Massenänderung bei einem Stoßpartner — ohne Änderung der Elektronenhülle — gezeigt.

1. Einleitung und Ziel der Arbeit. Es liegen eine Reihe von Arbeiten vor, in denen über das Auftreten von Alkalibogenlinien beim Alkaliionenstoß gegen verschiedene Gase berichtet wird. Man muß erwarten, daß bei der Lichtanregung durch Alkaliionenstoß neben den Spektrallinien des zweiten Stoßpartners nur Alkalifunkenlinien auftreten. Alkali*bogenlinien* können natürlich deshalb nicht angeregt werden, weil dem Alkaliion das äußerste Elektron fehlt. Tatsächlich sind aber starke Alkalibogenlinien beobachtet worden [1] [2]). Diese können also nicht durch einen einfachen anregenden Stoß zustande kommen, sondern müssen andere Ursachen haben.

Jones[1]) machte die Annahme, daß aus seiner Alkaliionenquelle auch Alkalidampf frei wurde, der dann durch Stoß von Alkaliionen zur Emission von Bogenlinien angeregt werden konnte. Eine experimentelle Bestätigung dieser Vermutung hat er nicht gegeben. Im Gegensatz zu Jones erklärte Maurer[2]) die Alkalibogenlinien durch eine Umladung der Alkaliionen am zweiten Stoßpartner verbunden mit einer *gleichzeitigen* Anregung des entstehenden Alkaliatoms. Das angeregte Alkaliatom sendet dann die Alkalibogenlinien aus. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Umladung würden erst nach dieser Emission normale, unangeregte Alkaliatome entstehen.

Nach den Arbeiten von Kallmann und Rosen[3]) und Wolf[4]) gilt für Umladungen im Bereich kleiner Energien das sogenannte Resonanzprinzip. Danach ist die Umladung um so stärker, je kleiner der Energiebetrag ist, welcher bei der Umladung aus der kinetischen Energie des stoßenden

---

*) 2. Teil zu D 87 (siehe vorhergehende Arbeit).

[1]) E. J. Jones, Phys. Rev. **44**, 707, 1933. — [2]) W. Maurer, ZS. f. Phys. **104**, 658, 1937 (W. Maurer u. K. Mehnert, ebenda **106**, 453, 1937). — [3]) H. Kallmann u. B. Rosen, Phys. ZS. **32**, 521, 1931. — [4]) F. Wolf, Ann. d. Phys. **30**, 313, 1937.

Ions entnommen bzw. in kinetische Energie verwandelt werden muß. Dieser Energiebetrag, die sogenannte Resonanzverstimmung, ist bei der gewöhnlichen Umladung zum Grundzustand des entstehenden Atoms gleich der Differenz der Ionisationsenergien der beiden Stoßpartner. Insbesondere Wolf[1]) konnte neuerdings zeigen, daß das Resonanzprinzip in weiten Grenzen gilt. Bei einer Umladung mit gleichzeitiger Anregung ist die Resonanzverstimmung natürlich nicht mehr gleich der Differenz der Ionisationsenergien, sondern ändert sich um den Betrag der Anregungsenergie des entstehenden angeregten Atoms. Je nach der Größe der beiderseitigen Ionisationsenergien kann die Resonanzverstimmung dabei kleiner oder größer werden, was einen entsprechenden Einfluß auf die Ausbeute haben sollte.

Hanle[2]) beobachtete, daß beim Stoß von Hg^{+++} auf normale Hg-Atome die Hg^{++}-Linie $\lambda = 4797$ anomal stark auftritt. Er deutete sie durch eine Umladung von Hg^{+++} mit gleichzeitiger Anregung des entstehenden Hg^{++} nach dem Schema:

$$\text{(I)} \qquad Hg^{+++} + Hg \rightarrow Hg^{++}_{angeregt} + Hg^{+}.$$

Hierbei ist die Resonanzverstimmung, d. h. der Gewinn an kinetischer Energie $= \sim 5$ e-Volt. Wenn normale Hg^{++}-Ionen entstehen würden, hätte die Resonanzverstimmung den Wert $\sim 61{,}5$ e-Volt. Bei einer Umladung nach dem angegebenen Schema ist sie also viel kleiner, und zwar $\simeq 5$ e-Volt. Das anomal starke Auftreten der Linie $\lambda = 4797$ ist nach dem Resonanzprinzip also verständlich. Wolf[1]) hat diskutiert, inwieweit sich einige seiner Beobachtungen, die dem Resonanzprinzip anscheinend widersprechen, durch die Annahme von Umladungsstößen mit gleichzeitiger Anregung in Übereinstimmung mit dem Resonanzprinzip bringen lassen. Er hat aber keine Anhaltspunkte dafür gefunden.

Eine gewöhnliche Umladung von z. B. Na-Ionen in He würde verlaufen nach dem Schema:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} Na^{+} + He &\rightarrow Na + He^{+} \qquad \text{Resonanzverstimmung } \Delta E \text{ (= Gewinn} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{an kinetischer Energie)} \\ + 5{,}12 - 24{,}47 &\qquad\quad = -19{,}35 \text{ e-Volt} = \Delta E \end{aligned}$$

und bei Umladung mit Anregung z. B. der Na D-Linie $\lambda = 5890$ Å

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} Na^{+} + He &\rightarrow Na_{angeregt\ zu\ 2\,^2P} + He^{+} \qquad \text{Resonanzverstimmung} \\ + (5{,}12 - 2{,}1) - 24{,}47 &= -21{,}45 \text{ e-Volt.} \end{aligned}$$

---

[1]) F. Wolf, Ann. d. Phys. **30**, 313, 1937. — [2]) W. Hanle, Phys. ZS. **33**, 245, 1932.

Ähnlich ergeben sich für alle umladenden Stöße von Alkaliionen in He, H_2 und Hg für Umladungen mit gleichzeitiger Anregung größere Resonanzverstimmungen als für gewöhnliche Umladungen. Umladungen mit Anregungen sollten in diesen Fällen also nach dem Resonanzprinzip entsprechend seltener sein als die Umladungen, bei denen normale Alkaliatome entstehen. Maurer und Mehnert[1]) bestimmten den Wirkungsquerschnitt für die unter III angegebene Umladung von Na-Ionen in He mit Anregung der Na D-Linie $\lambda = 5890$ und verglichen ihn mit den Angaben von Wolf für den Gesamtumladungsquerschnitt. Tatsächlich ergab sich bei einer Beschleunigungsenergie der Na-Ionen von 1000 e-Volt nur etwa der 100. Teil des Gesamtwirkungsquerschnittes nach Wolf, wie nach obigen Ausführungen zu erwarten ist.

Es war nun das Ziel dieser Arbeit, die Erklärung der Alkalibogenlinien beim Alkaliionenstoß in H_2, D_2, He und Hg durch weitere Versuche, endgültig zu sichern. Zum anderen war von Interesse, wie sich die Ausbeute dieser speziellen Umladungen ändern würde, wenn als zweiter Stoßpartner die Isotope H_2 bzw. D_2 genommen würden[2]).

Die drei prinzipiell in Frage kommenden Deutungsmöglichkeiten der Alkalibogenlinien sind in Tabelle 1, Spalte 1 zusammengestellt: Es könnte 1. Alkalidampf im Versuchsraum vorhanden sein, wie Jones[3]) angenommen hat; 2. könnten schnelle Alkaliatome durch gewöhnliche Umladung entstehen und dann erst durch einen darauffolgenden zweiten Stoß angeregt werden; 3. es liegt „Umladungsleuchten" vor. Die Intensität der Bogenlinien

Tabelle 1. Die Entstehungsmöglichkeiten für die Alkalibogenlinien beim Alkaliionenstoß.

	Ursachen der Bogenlinien	Zu erwartende Abhängigkeit der Lichtanregung vom		Dopplereffekt
		Druck	Ionenstrom	
1.	Alkalidampf im Beobachtungsraum, herrührend von der heißen Alkaliionenquelle	$\sim$ const.	linear	kein Doppler-Effekt
2.	Umladung und Stoßanregung des gebildeten Atoms in einem zweiten Stoß	quadratisch	linear	Doppler-Effekt vorhanden
3.	Umladung mit gleichzeitiger Anregung des gebildeten Atoms	linear	linear	Doppler-Effekt vorhanden

[1]) W. Maurer u. K. Mehnert, ZS. f. Phys. **106**, 453, 1937. — [2]) Siehe hierzu die vorhergehende Arbeit von K. Mehnert. — [3]) E. J. Jones, Phys. Rev. **44**, 707, 1933.

sollte in den drei Fällen in verschiedener Weise vom Gasdruck im Stoßraum und vom Alkaliionenstrom abhängen, und zwar, wie man leicht einsieht, in der in Tabelle 1, Spalte 2 und 3 angegebenen Weise. Da in den Fällen 2 und 3 die Bogenlinien von schnell bewegten Alkaliatomen ausgesandt werden, ist ein Doppler-Effekt zu erwarten, dessen Größe der Beschleunigungsspannung der Alkaliionen entspricht. Es wird sich zeigen, daß die Meßergebnisse für Fall 3, also für Umladungsleuchten, sprechen; insbesondere konnte ein Doppler-Effekt nachgewiesen werden.

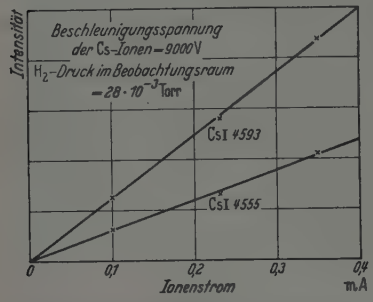


Fig. 1. Die relative Lichtausbeute der Caesiumbogenlinien 4555 und 4593 als Funktion des Cs-Ionenstroms.

2. Strom- und Druckabhängigkeit der Alkalibogenlinien, insbesondere bei $Cs^+ \rightarrow H_2$ *und* $Cs^+ \rightarrow D_2$. Für die bei $Cs^+ \rightarrow H_2, D_2$ auftretenden Caesiumbogenlinien ergab sich die in den Fig. 1 und 2 wiedergegebene Druck- und Stromabhängigkeit. Die Messung erfolgte nach dem üblichen photographisch-photometrischen Verfahren mit der in der vorhergehenden Arbeit von Mehnert beschriebenen Versuchsanordnung. Alle weiteren technischen Einzelheiten möge man dort nachlesen. Im ganzen Strombereich und bei H_2- bzw. D_2-Drucken bis etwa $40 \cdot 10^{-3}$ Torr ist also die Abhängigkeit der Intensität der Bogenlinien von Druck und Strom praktisch linear[1]). Ähnliche Druck- und Stromkurven wie hier wurden früher in den Fällen $Li^+ \rightarrow He$ und $Na^+ \rightarrow He$ erhalten. In allen bisher untersuchten Stoßprozessen zeigen also die Alkalibogenlinien eine praktisch lineare Druck- und Stromabhängigkeit.

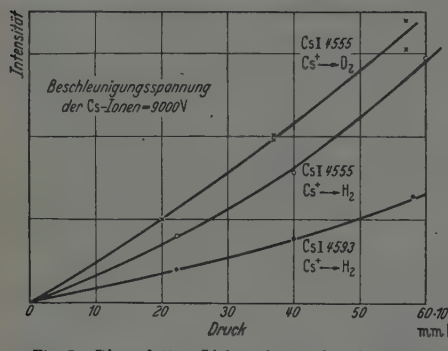


Fig. 2. Die relative Lichtausbeute der Caesiumbogenlinien 4555 und 4593 als Funktion vom H_2- bzw. D_2-Druck im Stoßraum.

[1]) Das schwache quadratische Glied in den Anstiegskurven rührt von der Anregung umgeladener Alkaliatome durch einen zweiten Stoß her (siehe W. Maurer, ZS. f. Phys. **104**, 658, 1937).

3. Nachweis eines Doppler-Effektes bei den Bogenlinien. Zur Untersuchung der Frage, ob die Alkalibogenlinien einen der Beschleunigungsspannung entsprechenden Doppler-Effekt zeigen, wurde die in der vorhergehenden Arbeit von Mehnert beschriebene Versuchsanordnung in etwas abgeänderter Form benutzt. Fig. 3 gibt den abgeänderten Beobachtungsraum der Anordnung von Mehnert (Fig. 1 auf S. 43) wieder. Der in Beobachtungsrichtung 5 cm tiefe Alkaliionenstrahl wurde auf 1 cm Tiefe abgeblendet. Vor der unteren Hälfte des vom Beobachtungsfenster her sichtbaren Ionenstrahles befand sich ein Spiegel unter $\sim 35^0$ Neigung. Vor dem Beobachtungsfenster stand der Spektrograph. Der Ionenstrahl wurde auf dem Spalt des Spektrographen scharf abgebildet. Das Bild auf dem Spalt bestand dann aus zwei Teilen: die untere Hälfte des Bildes entsprach dem Strahl 1 in Fig. 3 und die obere Hälfte dem am Spiegel reflektierten Strahl 2. Der Strahl 2 bestand also aus Licht, das vom Ionenstrahl nach rückwärts ausgesandt wurde. Falls die Bogenlinien von bewegten Teilchen ausgesandt werden, sollten die Bogenlinien in Strahl 2 also eine Rotverschiebung zeigen. Im Strahl 1 sollte natürlich kein Doppler-Effekt auftreten. Fig. 4 zeigt eins der für $Li^+ \rightarrow H_2$ erhaltenen Spektrogramme. Die H-Linien, also die Linien des ruhenden Stoßpartners, zeigen keinen Doppler-Effekt, wie es sein muß. Die Lithiumbogenlinien dagegen sind deutlich rotverschoben. Wie aus Tabelle 2 hervorgeht, stimmen die gemessenen Doppler-Effekte gut mit den aus der Beschleunigungsspannung

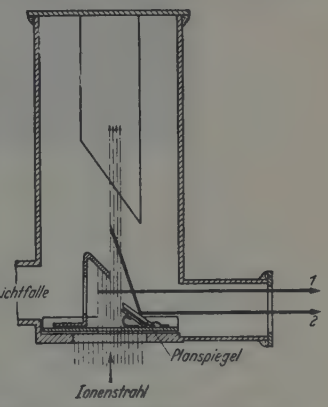


Fig. 3. Versuchsanordnung zur Beobachtung eines Doppler-Effektes.

Tabelle 2. Die gemessenen und die berechneten Doppler-Verschiebungen beim Stoß: $Li^+ \rightarrow H_2$.

Wellenlänge der Li-Bogenlinien in Å	Doppler-Verschiebungen in Å	
	gemessen	berechnet
6707	11	11,32
6103	10	10,32
4971	9	8,36
4603	7,5	7,75
4273	7,5	7,20
4132	7	6,79
3915	7	6,59

errechneten Werten überein. Auch auf der Originalplatte war an der Stelle der *unverschobenen* Li-Bogenlinien keine Andeutung einer Schwärzung zu sehen. Ähnliche Aufnahmen wurden durchgeführt für die weiteren Stoßprozesse $Li^+ \rightarrow He$, $Na^+ \rightarrow He$, $Na^+ \rightarrow He$ und $Cs^+ \rightarrow H_2$. Besonders bei Cs^+ waren die Verschiebungen sehr klein und deshalb nur wenig genau ausmeßbar. Zweifellos war aber eine Doppler-Verschiebung vorhanden.

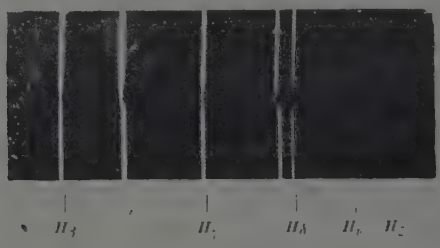


Fig. 4. Doppler-Verschiebungen von Lithiumbogenlinien bei Stoß: $Li^+ \rightarrow H_2$.

In allen untersuchten Fällen zeigen also die Alkalibogenlinien einen Doppler-Effekt, dessen Größe der Geschwindigkeit der Alkaliionen entspricht.

4. Deutung der Bogenlinien. Da die Alkalibogenlinien in allen untersuchten Fällen linear mit dem Strom und Druck ansteigen und wegen des Vorhandenseins eines Doppler-Effektes bleibt nach Tabelle 1 nur die Möglichkeit einer Erklärung durch „Umladungsleuchten". Da auf den Doppler-Aufnahmen auch an der Stelle der unverschobenen Alkalibogenlinien keine Andeutung einer Schwärzung zu sehen war, rühren die Bogenlinien auch nicht zum Teil von der Anregung eines eventuell vorhandenen Alkalidampfes her.

In der Einleitung wurde gezeigt, daß nach dem Resonanzprinzip die Umladungen mit gleichzeitiger Anregung um so seltener vorkommen sollten, je höher das Alkaliatom nach der Umladung angeregt ist. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Teil-WQ. für die Umladung von Na^+ in He mit Anregung der Na-D-Linie tatsächlich viel kleiner ist als der Gesamtwirkungsquerschnitt[1]). Die aufgenommenen Spektren zeigten nun weiterhin, daß in allen untersuchten Fällen das Umladungsleuchten bei Gliedern einer Serie mit wachsender Hauptquantenzahl, d. h. mit steigender Resonanzverstimmung, stark abfiel, wie es nach dem Resonanzprinzip sein muß. Im Gegensatz zu $Cs^+ \rightarrow H_2, D_2$ sind von Maurer bei $Cs^+ \rightarrow He$

[1]) W. Maurer u. K. Mehnert, ZS. f. Phys. **106**. 453. 1937.

keine Cs-Bogenlinien gefunden worden. Ein quantitativer Intensitätsvergleich bei 5000 e-Volt Beschleunigungsenergie der Cs-Ionen zeigte hier, daß die Cs-Bogenlinie $\lambda = 4555$ bei $Cs^+ \rightarrow He$ mindestens 100mal kleiner ist als bei $Cs^+ \rightarrow H_2$. Eine Intensitätsänderung in dieser beobachteten Richtung entspricht dem Resonanzprinzip, weil die Resonanzverstimmung bei $Cs^+ \rightarrow He$ mit $\Delta E = -23{,}3$ e-Volt viel größer ist als $\Delta E = -14{,}1$ e-Volt bei $Cs^+ \rightarrow H_2$. Einen so großen Intensitätsunterschied würde man allerdings nicht erwarten.

5. Anregungsfunktion der Cs I $\lambda = 4555$ ($3\,^2P_{3/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2}$) *bei* $Cs^+ \rightarrow H_2$ *und* $Cs^+ \rightarrow D_2$. Im Rahmen der vorhergehenden Arbeit von Mehnert[1]

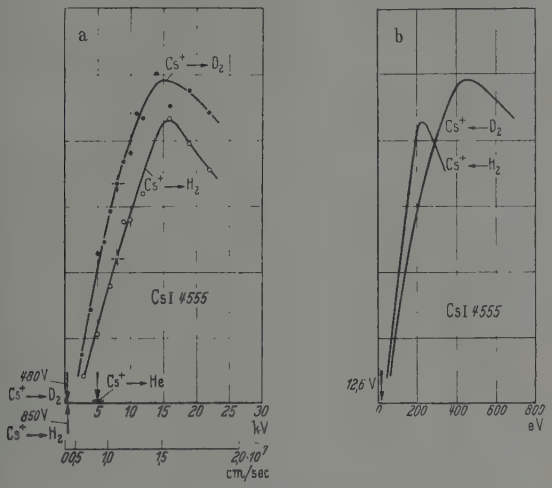


Fig. 5a und b. Anregungsfunktionen der Cs-Bogenlinie 4555 Å als Funktion von
a) der Beschleunigungsspannung der Cs-Ionen,
b) der Beschleunigungsspannung der als stoßend gedachten H_2- bzw. D_2-Moleküle.
(Die Ordinaten sind vergleichbar.)

wurde die Anregungsfunktion der Bogenlinie $\lambda = 4555$ Å in H_2 und D_2 gemessen (s. Fig. 5a und b). Wegen technischer Einzelheiten muß auf die vorhergehende Arbeit verwiesen werden. Das zweite Glied des Dubletts $\lambda = 4593$ Å ($3\,^2P_{1/2} \rightarrow 1\,^2P_{1/2}$) lag in unmittelbarer Nähe einer starken Cs II-Linie, so daß sie bei höheren Spannungen nicht ausgemessen werden konnte. Unterhalb 10 kV, wo die Cs II-Linien sehr viel schwächer waren

[1]) K. Mehnert, ZS. f. Phys. **117**, 41, 1940.

als die Cs I-Linien, wurde das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten des Dubletts $\lambda = 4555$ ($3\,^2P_{3/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2}$) zu $\lambda = 4593$ ($3\,^2P_{1/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2}$) gemessen. Es ergab sich das Verhältnis 2 : 1. Dies entspricht der Erwartung; denn die statistischen Gewichte $(2j + 1)$ der Ausgangsterme verhalten sich wie 4 : 2.

Die echten Einsatzpotentiale für das Umladungsleuchten der Cs I-Linie $\lambda = 4555$ liegen nach Energie- und Impulssatz für $Cs^+ \rightarrow H_2$ bei 850 Volt und für $Cs^+ \rightarrow D_2$ bei 430 Volt, d. h. bei der Darstellung in Fig. 5a praktisch im Nullpunkt. Der gemessene Kurvenverlauf ist damit verträglich.

Ein Vergleich der Anregungsfunktionen für $Cs^+ \rightarrow H_2$ und $Cs^+ \rightarrow D_2$ in Fig. 5 zeigt, daß bei gleicher Beschleunigungsenergie der Cs-Ionen die Umladung in D_2 stärker ist als in H_2. Das erscheint nach Energie- und Impulssatz verständlich, weil beim Stoß auf die größere Masse D_2 ein größerer Bruchteil der kinetischen Energie der Cs-Ionen in innere Energie verwandelt werden könnte. Genau wie in der vorangehenden Arbeit über Lichtanregung bei $Cs^+ \rightarrow H_2, D_2$ ist hier die Umladung bei gleicher Energie der einmal als stoßend gedachten H_2- und D_2-Moleküle — wobei die Cs-Ionen ruhen würden — für $H_2 \rightarrow Cs^+$ häufiger als für $D_2 \rightarrow Cs^+$. Da beim Stoß leichter Teilchen (H_2, D_2) auf eine schwere Masse (Cs^+) der Bruchteil der kinetischen Energie von H_2 bzw. D_2, welcher maximal in innere Energie verwandelt werden könnte, bei H_2 etwas größer ist als bei D_2, ist auch dieses Ergebnis nach den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls verständlich. Da bei den Stößen $H_2, D_2 \rightarrow Cs^+$ der Schwerpunkt der beiden Stoßpartner praktisch mit dem Cs-Ion zusammenfällt, stimmen die Abszissenwerte der Fig. 5b praktisch mit der kinetischen Energie im Schwerpunktssystem überein. Im Gegensatz zur vorhergehenden Arbeit ist hier die Umladung auch bei kleinen „Schwerpunktsenergien" nicht allein von diesem Parameter abhängig.

Von Wolf[1]) stammen Umladungsmessungen von H^+, D^+ und H_2^+, D_2^+ in Ar. Danach ist die Umladung beim Übergang von leichtem zu schwerem Wasserstoff nur von der Relativgeschwindigkeit abhängig. Diese Stöße können nicht unmittelbar mit obigen Umladungen von Cs-Ionen verglichen werden, weil der Elektronenübergang bei H_2^+, $D_2^+ \rightarrow Ar$ in anderer Richtung erfolgt als bei $Cs^+ \rightarrow H_2, D_2$. Sieht man einmal davon ab, so ist festzustellen, daß hier zwischen dem Verhalten von Ar und Cs^+ dieselben Unterschiede bestehen, wie sie in der vorhergehenden Arbeit für Anregung in H_2 und D_2 beschrieben worden sind.

---

[1]) F. Wolf, Ann. d. Phys. **28**, 361, 1937.

Zusammenfassung.

Bei Lichtanregung durch Alkaliionenstoß gegen die Gase H_2, D_2, He und Hg treten neben den H_2-, D_2-, He-, Hg-Linien und den Alkalifunkenlinien auch Alkalibogenlinien auf. Da den Alkaliionen das erste Elektron fehlt, können die Alkalibogenlinien nicht durch eine einfache Anregung der Alkaliionen zustande kommen.

Die Messungen zeigen, daß ihre Intensität mit dem Gasdruck und mit dem Alkaliionenstrom — bei relativ kleinen Werten dieser Größen — linear anwächst. Außerdem zeigen die Alkalibogenlinien einen Doppler-Effekt, welcher der Lineargeschwindigkeit der primär beschleunigten Alkaliionen entspricht. Die Alkalibogenlinien sind deshalb als „Umladungsleuchten", d. h. durch eine Umladung der Alkaliionen mit einer *gleichzeitigen* Anregung des entstehenden Alkaliatoms zu deuten.

Das sogenannte Resonanzprinzip, welches sich bei den gewöhnlichen Umladungen, bei denen unangeregte Atome entstehen, bewährt hat, gilt auch für die hier beschriebenen Umwandlungen mit Anregung.

Es wurden die Anregungsfunktionen der Cs-Bogenlinie $\lambda = 4555$ $(3\,^2P_{3/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2})$ für Cs-Ionenstoß gegen leichten und schweren Wasserstoff gemessen. Bei gleicher Beschleunigungsenergie der Cs-Ionen ist die Umladung mit gleichzeitiger Anregung in D_2 stärker als in H_2. Wenn man die Stöße in umgekehrter Reihenfolge ausführen würde, d. h. wenn schnellbewegte H_2- und D_2-Moleküle auf ruhende Cs-Ionen stoßen würden, würde die Umladung bei $H_2 \rightarrow Cs^+$ häufiger sein als bei $D_2 \rightarrow Cs^+$. Beide Ergebnisse sind nach Energie und Impulssatz verständlich.

Das Intensitätsverhältnis der beiden Glieder des Dubletts $\lambda = 4555$ $(3\,^2P_{3/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2})$ und $\lambda = 4593$ $(3\,^2P_{1/2} \rightarrow 1\,^2S_{1/2})$ ergab sich zu 2 : 1. Da die statistischen Gewichte der beiden Ausgangsterme sich wegen der Werte für $j = {}^3/_2$ bzw. ${}^1/_2$ wie 4 : 2 verhalten, ist das verständlich.

Herrn Prof. Rau danken wir herzlichst für die Bereitstellung der Institutsmittel und für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Über die innere Reibung von Geigenholz.

Von **E. Rohloff.**

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 8. November 1940.)

Das ln-Dämpfungsdekrement von transversal schwingenden Stäben, die aus Fichtenholz, wie es zum Geigenbau benutzt wird, geschnitten waren, und die eine Stärke wie die Decke einer Geige hatten, wurde im Frequenzbereich von 10 bis 2000 Hz als von der Frequenz unabhängig gefunden. Im Zusammenhang mit einer früheren Arbeit ergibt sich, daß im Frequenzbereich von 10 bis 10000 Hz, der also den gesamten Klangbereich aller Streichinstrumente umfaßt, das ln-Dämpfungsdekrement von Holz bei der genannten Stärke von der Frequenz unabhängig ist.

In einer früheren Arbeit[1]) war die innere Reibung verschiedener Hölzer untersucht worden, und zwar an transversal schwingenden Stäben im Frequenzbereich von 10 bis 700 Hz und an longitudinal schwingenden Stäben im Frequenzbereich von 2000 bis 10000 Hz. Dabei wurde als Maß für die innere Reibung das ln-Dämpfungsdekrement der Schwingungen gewählt in Anbetracht der Tatsache, daß keine befriedigende Theorie der inneren Reibung fester Körper existiert. Es zeigte sich, daß dieses Dekrement für transversale und longitudinale Schwingungen gleich und von der Frequenz unabhängig, von der Art des Holzes und seiner Behandlung (z. B. feucht oder trocken) dagegen abhängig ist. Die bei der genannten Arbeit zur Verfügung stehenden Meßmethoden machten damals eine Bestimmung des Dekrements im Frequenzbereich von 700 bis 2000 Hz unmöglich, und zwar bei transversalen Schwingungen wegen der sehr kleinen Amplituden (es stand nur eine optische Methode zur Verfügung), bei longitudinalen Schwingungen wegen der zu großen Stablängen. Da es aber wünschenswert erschien, zu wissen, ob das Dekrement von Holz über den *ganzen* Frequenzbereich der Streichinstrumente von der Frequenz unabhängig ist, wurde jetzt diese Lücke zwischen 700 und 2000 Hz geschlossen. Die Messungen wurden an transversal schwingenden Stäben vorgenommen. Die Schwingungen wurden mit Hilfe elektrischer Verstärkermeßtechnik registriert. Die Meßanordnung zeigt Fig. 1.

Die Erregung des Stabes zu Transversalschwingungen geschah mit einer Anreißvorrichtung, die gleichzeitig die photographische Aufnahme auslöste. Zur Aufnahme dieser abklingenden Schwingung wurde für Frequenzen bis 1000 Hz ein Schleifenoszillograph, über 1000 Hz ein Elektronen-

[1]) F. Krüger u. E. Rohloff, ZS. f. Phys. **110**, 58, 1938 (im folgenden kurz I genannt).

strahloszillograph verwendet. In den erhaltenen Photoaufnahmen wurden von 10 zu 10 Schwingungen die Amplituden gemessen. Ist A eine Amplitude und a die Amplitude nach 10 Schwingungen, so ist das ln-Dämpfungsdekrement

$$\delta = \frac{\ln A - \ln a}{10}.$$

Diese Werte wurden graphisch aufgetragen und ergaben eine Kurve, welche das Dekrement in Abhängigkeit von der Amplitude zeigt. Aus diesen Kurven wurde das Dekrement auf die Amplitude 0 graphisch extrapoliert.

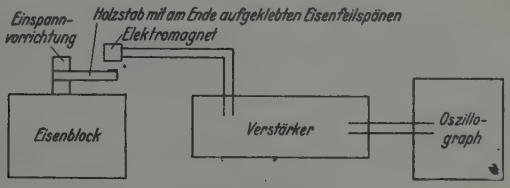


Fig. 1. Apparatur.

Die Genauigkeit des so erhaltenen Dekrements beträgt etwa 10%. Die Messungen wurden an Stäben gemacht, die aus Fichtenholz, wie man es zum Bau billigster Geigen in Markneukirchen verwendet, geschnitten waren. Und zwar waren die Stäbe parallel zur Wuchsrichtung geschnitten, also in Richtung der Längsachse der Decke der Geige. Die Jahresringe verliefen also in der Schwingungsebene. Die einzelnen Frequenzen wurden dadurch erreicht, daß ein Stab mit der tiefsten Frequenz allmählich verkürzt wurde. Die Stärke des Holzes betrug einige Millimeter, entsprach also der Stärke einer Geigendecke. Dies ist insofern von Wichtigkeit für das Ergebnis, als einerseits Bennewitz und Rötger[1]) und andererseits Zener[2]) bei schwingenden Stäben ein Maximum der Dämpfung gefunden haben, das abhängig ist von der Dicke des Holzes. Dieses Maximum ist eine Folge des Temperaturausgleichs zwischen den Kompressions- und Dilatationsstellen. Holz hat eine sehr geringe Wärmeleitzahl. Infolgedessen kann dieses Maximum bei Holz nur bei ganz geringen Holzdicken auftreten, so daß diese Verhältnisse bei der Stärke der Geigenplatten nicht in Erscheinung treten.

Fig. 2 zeigt das Meßergebnis. Es ist das auf die Amplitude 0 extrapolierte ln-Dämpfungsdekrement in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen.

---

[1]) K. Bennewitz u. H. Rötger, Phys. ZS. **37**, 578, 1936. — [2]) C. Zener, Phys. Rev. (2) **52**, 230, 1937; **53**, 90, 1938; C. Zener, W. Otis u. R. Nuckolls, ebenda (2) **53**, 100, 1938; C. Zener, ebenda (2) **53**, 582, 1938.

Es zeigt sich also, daß das Dekrement von Holz auch in der Lücke von 10 bis 2000 Hz und damit zwischen 10 und 10000 Hz (mit den Ergebnissen von I) von der Frequenz unabhängig ist. Es bestehen also im Klangbereich der Streichinstrumente *keine* Frequenzgebiete, in denen das Holz an sich schon stärkeren Energieverbrauch zeigt, so daß dort für die Abstrahlung zu geringe Energie zur Verfügung stände.

Der Wert $\delta = 0{,}029$ liegt höher als der in I für Fichtenholz gemessene. Das mag zum Teil an der Verschiedenheit des Holzes, sicher aber auch an der Verschiedenheit der Schnittrichtung der Hölzer liegen. In beiden Arbeiten sind die Hölzer zwar parallel zur Wuchsrichtung geschnitten. In I aber lagen die Jahresringe des Holzes senkrecht zur Schwingungsebene, hier jedoch in der Schwingungsebene (wie in der Längsachse der Geigendecke). Die Richtung des Schnittes ist von größter Wichtigkeit, wie ja die Messungen in I an Stäben zeigen, die senkrecht zur Wuchsrichtung, also in Richtung der Querachse der Geigendecke geschnitten waren. Diese verschiedenen Dekremente spiegeln sich in den Dekrementskurven[1]) von Streichinstrumenten wider. Es sollen daher systematische Messungen über die Dekremente in den verschiedenen Richtungen von Geigen-Fichtenholz und -Ahornholz, sowie über deren Unterschiede bei gutem und bei schlechtem Geigenholz und schließlich über deren Konstanz innerhalb der ganzen Geigenplatten folgen.

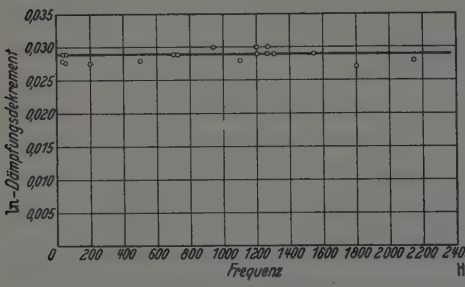


Fig. 2. Meßergebnisse an billigstem Geigen-Fichtenholz.

Herrn Prof. Dr. O. Reinkober danke ich für Unterstützung bei der Fertigstellung des Manuskriptes. Ferner danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung eines Schleifenoszillographen und der Helmholtz-Gesellschaft für die Überlassung eines Elektronenstrahloszillographen.

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

[1]) Siehe E. Rohloff, Ann. d. Phys. (5) **38**, 177, 1940.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG-Berlin.)

Über die sphärische Aberration bei elektronenoptischer Abbildung.

Von **A. Recknagel**, Berlin.

(Eingegangen am 12. November 1940.)

Die elektronenoptische Abbildung durch ein rotationssymmetrisches Magnetfeld, das formal keine sphärische Aberration bewirkt, wird untersucht. Es zeigt sich, daß dieses Feld nicht genügend Brechkraft besitzt, um die von einem Punkte, dem Gegenstandspunkt, ausgehenden Elektronen in einem reellen Bildpunkt zu vereinigen. Ein Feld, das eine reelle Abbildung vermittelt, muß notwendig sphärische Aberration bei der Abbildung bewirken. Analoge Überlegungen gelten für elektrische Elektronenlinsen.

Für die sphärische Aberration von Elektronenlinsen sind in der Literatur mehrere Formeln mitgeteilt worden, die in einem merkwürdigen Gegensatz zueinander stehen. Folgende beiden Formeln für den auf das Objekt bezogenen Radius δ des Zerstreuungskreises bei raumladungsfreien magnetischen Linsen sind hierbei gemeint:

$$\delta = \gamma^3 \frac{1}{16} \frac{e}{m\Phi} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \left(H' + H \frac{r'}{r} \right)^2 + H^2 \frac{r'^2}{r^2} + \frac{e}{4\,m\Phi} H^4 \right\} r^4 \, \mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\delta = \gamma^3 \frac{1}{96} \frac{e}{m\Phi} \int_{z_a}^{z_b} \left\{ \frac{2\,e}{m\Phi} H^4 + 5\,H'^2 - H H'' \right\} r^4 \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

In diesen Gleichungen bedeutet $H(z)$ das Magnetfeld auf der optischen Achse der Linse, H', H'' sind Differentialquotienten nach z, Φ ist die Beschleunigungsspannung der Elektronen, γ die Strahlapertur, z_a und z_b sind die Koordinaten von Gegenstands- bzw. Bildpunkt, r ist der Abstand der Elektronenbahn erster Näherung von der optischen Achse, d. h. r genügt der Differentialgleichung

$$r'' + \frac{e}{8\,m\Phi} H^2 r = 0 \tag{3}$$

und erfüllt dabei folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} r|_{z_a} &= 0, \\ r|_{z_b} &= 0, \end{aligned} \qquad r'|_{z_a} = 1, \right\} \tag{4}$$

Aus Gleichung (1) leitet Scherzer[1]) ab, daß die sphärische Aberration nicht exakt verschwinden kann, da das Integral als Summe von Quadraten nur dann Null sein könnte, wenn H identisch verschwindet. Aus Gleichung (2) leitet Glaser[2]) durch Nullsetzen des Klammerausdruckes unter dem Integral ab, daß ein Magnetfeld mit exakt verschwindender sphärischer Aberration existiert. Dieser Widerspruch klärt sich folgendermaßen auf: Die Form (2) der sphärischen Aberration erhält man aus der direkt — z. B. aus den Bewegungsgleichungen — berechneten Formel durch partielle Integration. Beim Einsetzen der Integrationsgrenzen — aber auch bereits vorher bei der Berechnung des Fehlers aus den Bahngleichungen — nimmt man an, daß die Bedingungen (4) erfüllt sind, daß also das Magnetfeld zu einem Objektspunkt z_a einen reellen Bildpunkt z_b liefert. Wir werden nun im folgenden zeigen, daß diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Das „aberrationsfreie" Feld vermag keine reelle Abbildung zu liefern, ein Feld, das eine reelle Abbildung bewirkt, zeigt notwendigerweise sphärische Aberration.

Den Nachweis für diese Behauptung liefern wir durch Bestimmen der Elektronenbahnen im „aberrationsfreien" Feld. Wir führen zunächst die in [II] benutzten Einheiten ein:

$$y = \frac{H}{H_0}, \quad x = \frac{z}{l}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l} \quad \text{mit} \quad l = \frac{1}{H_0}\sqrt{\frac{m\Phi}{2e}}, \tag{5'}$$

$$\alpha = \alpha_0\, y, \quad \xi = \frac{x}{\alpha_0}, \quad \varrho = \frac{\bar{r}}{\alpha_0} \quad \text{mit} \quad \alpha_0 = \sqrt[6]{3\,y_0'^2 + 1}. \tag{5''}$$

Dabei bedeutet y_0' den Wert von $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ an dem Raumpunkt, an dem y den Wert 1 (H den Wert H_0) annimmt. H_0 und α_0 sind willkürliche Parameter des aberrationsfreien Feldes, das nach [II] durch folgende Gleichungen bestimmt ist:

$$\xi = G(\alpha_0) - G(\alpha), \tag{6'}$$

$$G(\alpha) = \sqrt{8}\int_1^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2\sqrt{\alpha^6 - 1}}. \tag{6''}$$

Das Feld hat eine endliche Länge, die im ξ-System 0,74691 beträgt. Innerhalb dieser Länge müssen Objekt und Bild liegen. An der einen Grenze des Feldbereiches hat das Feld den Wert ∞ ($\alpha = \infty$), an der anderen Grenze hat es einen endlichen Wert ($\alpha = 1$). Wegen dieser endlichen Länge

[1]) O. Scherzer, ZS. f. Phys. **101**, 593, 1936. Im folgenden mit [I] bezeichnet. — [2]) W. Glaser, ebenda **116**, 19, 1940. Im folgenden mit [II] bezeichnet.

ergibt sich eine eigenartige Begrenzung der Wirkungsmöglichkeit des Feldes. Wenn man bei festgehaltener Elektronenbeschleunigungsspannung Φ die Stärke des Feldes durch Vergrößerung von H_0 erhöht, um die Brechkraft zu erhöhen, wird automatisch die Feldlänge (im z-System natürlich) kleiner, wodurch die Fokussierungswirkung entsprechend verkleinert wird. Eine ähnliche Überlegung gilt hinsichtlich des Parameters α_0. Mathematisch drückt sich diese Unbeeinflußbarkeit der Elektronenbahnen durch die Parameter H_0 und α_0 darin aus, daß die Differentialgleichung (3) und die Anfangsbedingungen (4) für die Elektronenbahn bei Benutzung von ξ, ϱ und α nicht mehr wesentlich[1]) von den Parametern abhängen. Es ergibt sich nämlich durch die Substitution (5) aus (3) und (4):

$$\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\alpha^2}{16}\varrho = 0, \tag{3'}$$

$$\varrho|_{\xi_a} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi_a} = 1. \tag{4'}$$
$$\varrho|_{\xi_b} = 0,$$

Im ϱ-ξ-System ist daher die durch (4) bestimmte Bahn für alle aberrationsfreien Felder durch eine einzige Funktion festgelegt, im r-z-System sind die entsprechenden Bahnen geometrisch ähnlich, wenn die Lagen der Objektpunkte in allen Feldern einander ähnlich sind. Wenn im ϱ-ξ-System nachgewiesen ist, daß keine reelle Abbildung vorhanden ist, ist es demnach für alle „aberrationsfreien" Felder nachgewiesen.

In (3') führen wir nun mit Hilfe von (6) die Größe α als unabhängig Veränderliche ein. Dabei ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\,\frac{5\alpha^6 - 2}{\alpha^6 - 1}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{3}{16}\,\frac{1}{\alpha^2(\alpha^6 - 1)}\,\varrho = 0. \tag{7}$$

Substituiert man schließlich

$$\frac{1}{\alpha^6} = \beta, \tag{8}$$

so findet man

$$\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\beta^2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{\beta}\,\frac{2 - 5\beta}{1 - \beta}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\beta} + \frac{1}{12\cdot 16}\,\frac{1}{\beta(1-\beta)}\,\varrho = 0 \tag{9}$$

und die Anfangsbedingungen

$$\varrho|_{\beta_a} = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta_a} = \frac{\sqrt{c}}{6}\,\frac{1}{\beta_a^{1/3}(1-\beta_a)^{1/2}}. \tag{10}$$
$$\varrho|_{\beta_b} = 0,$$

[1]) Exakt wäre es, die Größe $\xi - G(\alpha_0)$ als unabhängige Veränderliche einzuführen. Das bedeutet aber nur eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems.

Dem Bereich des aberrationsfreien Feldes entsprechen die Werte von β zwischen 0 und 1. Dem Feldanfang ($\alpha = \infty$) entspricht $\beta = 0$, dem Feldende ($\alpha = 1$) entspricht $\beta = 1$.

Die Gleichung (9) ist vom Typ der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\beta(1-\beta)\frac{d^2\varrho}{d\beta^2} + [c - (a+b+1)\beta]\frac{d\varrho}{d\beta} - ab\varrho = 0,$$

man hat nur zu setzen

$$a = -\frac{1}{12}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right), \quad b = -\frac{1}{12}\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right), \quad c = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Eine erste Lösung σ von (9) ist die hypergeometrische Funktion

$$\sigma = F(a,b,c;\beta) = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}\beta + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c\cdot(c+1)}\beta^2 + \cdots. \tag{12}$$

Eine zweite Lösung erhält man mit Hilfe dieser ersten Lösung durch eine Quadratur:

$$\varrho = \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma\int_0^\beta \frac{1}{\sigma^2}\frac{d\beta}{\beta^{1/3}(1-\beta)^{1/2}}. \tag{13}$$

Diese Lösung entspricht den Anfangsbedingungen

$$\varrho|_{\beta=0} = 0, \quad \frac{d\varrho}{d\xi}\Big|_{\beta=0} = 1.$$

Sie ist also diejenige Elektronenbahn, die in Gleichung (1) und (2) einzusetzen ist, wenn der Objektpunkt bei $\beta = 0$, dem Anfangspunkt des Feldes liegt. Für die Funktion ϱ müssen wir zeigen, daß sie außer bei $\beta = 0$ im Bereich $0 < \beta \leqq 1$ nicht noch einmal verschwindet, d. h. daß zu dem Objektspunkt $\beta = 0$ kein reeller Bildpunkt existiert. Für andere Lagen des Objektpunktes braucht man einen entsprechenden Beweis nicht zu führen, da ja die Elektronen in diesem Falle auf einer kürzeren Strecke der Wirkung des Feldes ausgesetzt sind, also sicher weniger beeinflußt werden als im Falle des am Feldanfang liegenden Objektpunktes. Übrigens läßt sich der folgende Beweis ohne weiteres auf andere Lagen des Objektpunktes ausdehnen.

Die Funktion σ nimmt von $\beta = 0$ an dauernd ab, da sämtliche Glieder der Reihe (12) mit Ausnahme des ersten negativ sind. Mit Hilfe von Formeln aus der Theorie der hypergeometrischen Funktion[1]) findet man

$$\sigma|_{\beta=1} = 0{,}969, \quad \lim_{\beta\to 1}\frac{d\sigma}{d\beta} = -0{,}022\frac{1}{\sqrt{1-\beta}}.$$

[1]) Vgl. z. B. E. Whittaker u. G. Watson, Modern Analysis, 4. Auflage, S. 282 u. 291.

Die Funktion σ ist also für $0 \leqq \beta \leqq 1$ dauernd positiv. Nach Gleichung (13) muß daher auch ϱ für $0 < \beta \leqq 1$ dauernd größer als Null sein, da in der Formel (13) für ϱ nur positive Größen vorkommen. Damit ist schon bewiesen, daß kein reeller Bildpunkt vorhanden ist.

Um die *Größe* der Fokussierungswirkung abschätzen zu können, wurde ϱ näherungsweise berechnet, indem in (13) unter dem Integral σ als Konstante eingesetzt wurde. Setzt man z. B. $\sigma = 1$, so erhält man sicher einen zu kleinen Wert für ϱ, man hat also dem Feld eine zu große Fokussierungswirkung zugeschrieben. In ähnlicher Weise kann man eine untere Grenze für die Differentialquotienten von ϱ gewinnen. Diese Abschätzung ist übrigens ziemlich scharf, da ja σ in der Tat nur sehr wenig veränderlich ist.

Es ergab sich

$$\varrho\,|_{\beta=1} > 0{,}72, \quad \left.\frac{d\varrho}{d\xi}\right|_{\beta=1} > 0{,}95.$$

Die von dem Feld hervorgerufene Abweichung der Funktion ϱ von der unabgelenkten Geraden $\bar{\varrho} = \xi$ ist außerordentlich gering. Am Feldende $\beta = 1$ hat die Entfernung dieser Geraden von der optischen Achse den Wert der Feldlänge, nämlich 0,746..., ist also nur wenig größer als ϱ. Die Neigung von ϱ ist von 1 nicht einmal auf 0,95 gefallen, sie müßte mindestens auf Null fallen, wenn eine reelle Abbildung möglich sein sollte. Man kann sich diese Ergebnisse einigermaßen veranschaulichen, wenn man die Fokussierung in einem homogenen Felde zum Vergleich heranzieht, dessen Stärke dem Wert $\alpha = 1$ entspricht. Das entspricht zwar dem kleinsten Wert des aberrationsfreien Feldes, doch ist dieses Feld im Mittel sicher nicht größenordnungsmäßig stärker, wie die Fig. 1 in [II] zeigt. Das homogene Vergleichsfeld müßte im ξ-System die Länge 4π haben, wenn es fokussieren sollte, also einen viel größeren Wert als die wirkliche Länge 0,74 ... des aberrationsfreien Feldes.

Wenn es auch nicht möglich ist, ein in Strenge aberrationsfreies Feld zu bilden, so bleibt doch die ebenfalls in [II] diskutierte Möglichkeit, mit Hilfe des berechneten Feldes Elektronenlinsen zu bauen, die wenigstens auf einzelnen Teilstücken keinen Beitrag zur sphärischen Aberration, genauer zu dem Integral (2), liefern. Wenn man dabei für übermikroskopische Zwecke das Objekt im Felde oder dicht vor dem Feldanfang anbringt, so zwingt die Kleinheit der Fokussierungswirkung im „aberrationsfreien" Feld dazu, eine große Anzahl solcher Feldstücke aneinander zu schließen. Damit wächst natürlich die Aberration des Gesamtfeldes, da die Zahl der aberrationsbehafteten Zwischenstücke anwächst. Wollte man mit einem einzigen „aberrationsfreien" Feld auskommen, das man an beiden Enden

schnell auf Null abnehmen läßt, so hätte man das Objekt um ein Vielfaches der Feldlänge vor dem Felde anzubringen, damit sich ein reelles Bild ergibt. Dieses Feld wäre eine „kurze, schwache" Linse, ein Feldtyp, den man für übermikroskopische Zwecke nicht benutzt.

Eine ähnliche Rechnung wie für magnetische Linsen kann man für elektrische durchführen. Der auf das Objekt bezogene Radius δ des Zerstreuungskreises kann durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\delta = \gamma^3 \frac{1}{64} \int_{z_a}^{z_b} \sqrt{\frac{\Phi}{\Phi_a}} \{4u'^2 + 3u^4 - 5u^2 u' - u u''\} r^4 \, \mathrm{d}z.$$

In dieser Formel bedeutet $u = \frac{\Phi'}{\Phi}$, wobei Φ das elektrostatische Potential auf der Achse ist. Die sphärische Aberration scheint zu verschwinden, wenn der Klammerausdruck unter dem Integral Null gesetzt wird. Die so entstehende Differentialgleichung für das Potential hat die Lösung

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{1 \pm \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^{2/3}}.$$

Die Größen Φ_0, z_0 und z_1 sind Integrationskonstanten. Das Feld erstreckt sich für das obere Vorzeichen von $z = z_0$, wo es unendlich groß wird, bis zu $z = \infty$, wo das Potential und die Elektronengeschwindigkeit verschwinden. Für das untere Vorzeichen liegt das Feld zwischen $z = z_0$, wo es unendlich groß wird, und $z = z_1$, wo Potential und Feld unendlich groß werden. Dieses Potential wird in die Differentialgleichung für die Elektronenbahnen, nämlich in

$$r'' + \frac{1}{2} \frac{\Phi'}{\Phi} r' + \frac{1}{4} \frac{\Phi''}{\Phi} r = 0$$

eingesetzt. Durch die Substitutionen

$$r = y \sqrt{1 \pm \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^{2/3}},$$

$$\zeta = \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^{2/3}$$

findet man

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta(1 \pm \zeta)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\zeta} \mp \frac{1}{8} \frac{1}{\zeta(1 \pm \zeta)} y = 0.$$

Das ist wieder eine hypergeometrische Differentialgleichung. Dem Feldbereich entspricht für das obere Vorzeichen der Wertebereich $0 \leqq \zeta \leqq \infty$, für das untere Vorzeichen der Bereich $0 \leqq \zeta \leqq 1$. Es genügt wieder, ein am Feldanfang startendes Elektron zu betrachten, der folgende Beweis

läßt sich aber auch leicht auf andere Objektlagen ausdehnen. Für das am Feldanfang $\zeta = 0$ startende Elektron gilt $\lim_{\zeta \to 0} y \sim \zeta^{3/2}$.

Für das obere Vorzeichen sieht man aus der Differentialgleichung sofort, daß $\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}\zeta^2$ dauernd positiv ist, daß also y dauernd konvex zur optischen Achse ist. Daher ist man sicher, daß y und daher auch r die Achse nur beim Objektpunkt $\zeta = 0$ schneidet, ein reeller Bildpunkt also nicht vorhanden ist. Für das untere Vorzeichen schneiden die Bahnen die Achse ein zweites Mal bei $\zeta = 1$, wo $\sqrt{1-\zeta}$ verschwindet. Es gilt hier $\lim_{\zeta \to 1} r \sim \sqrt{1-\zeta}$. Ein anderer Schnittpunkt ist nicht vorhanden, wie eine Überlegung zeigt, die analog der oben für das aberrationsfreie Magnetfeld durchgeführten Rechnung ist. Trotzdem verschwindet die sphärische Aberration nicht, sie wird vielmehr unendlich groß. Man kann das an Hand der aus den Bewegungsgleichungen direkt ohne partielle Integration zu gewinnenden Formel für den Zerstreuungskreis[1]) ableiten, indem man den Integranden bei $\zeta = 1$ untersucht. Überdies ist noch zu berücksichtigen, daß ein Feld mit Unstetigkeitseigenschaften, wie sie das hier berechnete Feld aufweist, praktisch überhaupt unbrauchbar ist. Es bleibt also auch für elektrische Elektronenlinsen der Scherzersche Satz [I] bestehen, daß eine reelle Abbildung ohne sphärische Aberration nicht möglich ist.

[1]) Vgl. z. B. E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin, Julius Springer, 1934. S. 128.

Die Leistungsgrenze thermischer Strahlungsmeßinstrumente *).

Von **W. Dahlke** und **G. Hettner**.

(Eingegangen am 11. November 1940.)

Es wird gezeigt, daß die Leistungsfähigkeit thermischer Strahlungsmeßinstrumente grundsätzlich begrenzt ist durch die spontanen Energie- und Temperaturschwankungen des Empfangssystems. Für die „Wärmekraftmaschinen" unter den Strahlungsmeßinstrumenten fällt diese Grenze zusammen mit der früher von M. Czerny angegebenen. Sie liefert die Erklärung für die Erfahrungstatsache, daß die besten thermischen Strahlungsmeßinstrumente der verschiedensten Konstruktionen ungefähr dasselbe leisten.

Es ist seit langem bekannt, daß das bewegliche System jedes Meßinstruments (z. B. die Spule eines Drehspulgalvanometers) eine Brownsche Molekularbewegung ausführt und daß diese Bewegung eine Grenze der Meßgenauigkeit darstellt. Da es sich um ein System mit *einem* Freiheitsgrad handelt, kommt ihm die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} kT$ ($\simeq 2 \cdot 10^{-14}$ erg bei Zimmertemperatur) und im allgemeinen der gleiche Betrag an mittlerer potentieller Energie zu. Jede dem beweglichen System zugeführte Energie ist also, auch wenn alle vermeidbaren Störungen ferngehalten werden, nur mit einem mittleren Fehler von der Größenordnung kT meßbar. Viele Instrumente sind soweit entwickelt, daß im wesentlichen dieser Meßfehler übrigbleibt, er hat daher größte praktische Bedeutung.

Die Leistungsfähigkeit thermischer Strahlungsmeßinstrumente ist von diesem Standpunkt aus von Czerny[1]) betrachtet worden. Czerny zeigt, daß man einen Teil dieser Instrumente als „Wärmekraftmaschinen" auffassen kann. In einem absorbierenden Körper, im folgenden „Empfangssystem" genannt, wird die Strahlung in Wärme verwandelt. Diese Wärme wird zum Teil in „Ausschlagsarbeit" umgesetzt, zum Teil geht sie in Wärme von der Temperatur der Umgebung über. Man kann daher von einem „Nutzeffekt" eines solchen Instrumentes sprechen und eine obere Grenze für ihn angeben. Für die Messung schwächster Strahlung (Temperaturerhöhung des Empfangssystems einige 10^{-7} grad) ergibt sich diese Grenze zu 10^{-9}; in Wirklichkeit erreicht man etwa 10^{-10}. Eine andere Gruppe von Instrumenten stellt keine Wärmekraftmaschinen dar. Hierher gehört z. B. das

*) Der erste Teil dieser Arbeit wurde auf der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 15. und 16. Juni 1940 in Leipzig vorgetragen.

[1]) Ann. d. Phys. **12**, 993, 1932.

Bolometer, bei dem die Ausschlagsarbeit von der Stromquelle geleistet wird und die Temperaturerhöhung nur auslösend wirkt. Überraschenderweise ist nun die Leistung der empfindlichsten Bolometer ungefähr dieselbe wie die der „Wärmekraftmaschinen". Czerny weist darauf hin, daß hier noch ein Problem vorliegt.

Außer den mechanischen Schwankungen des beweglichen Systems treten bei einem thermischen Strahlungsmeßinstrument auch Energie- und Temperaturschwankungen des Empfangssystems auf, die die Meßgenauigkeit begrenzen können. Ein Körper, der im Wärmeaustausch mit seiner Umgebung steht, hat keine konstante Energie. Diese schwankt vielmehr um Beträge δE; ist C die Wärmekapazität des Körpers, so ist die mittlere Energieschwankung[1])

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\overline{\delta E^2}} = \sqrt{\overline{CkT^2}} \tag{1}$$

und folglich die Schwankung der räumlich gemittelten Temperatur

$$\tau_0 = \sqrt{\overline{\delta T^2}} = \frac{\varepsilon_0}{C} = T\sqrt{\frac{k}{C}}. \tag{2}$$

Bei hochempfindlichen Instrumenten ist etwa $C \simeq 10^{-5}$ cal/grad, folglich $\varepsilon_0 \simeq 10^{-12}$ cal $\simeq 4 \cdot 10^{-5}$ erg. Dieser Wert gilt ungefähr für eine Folie von 4 mm² Größe und 5 μ Dicke aus beliebigem Metall. Wir werden weiter unten auch den zeitlichen Verlauf dieser Energie- und Temperaturschwankungen betrachten. Vor der Hand soll die Dauer einer Messung als so groß angenommen werden, daß die Schwankungen am Anfang und am Ende einer Messung als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Diese thermischen Schwankungen setzen sich in mechanische Schwankungen des beweglichen Systems um, ebenso wie bei dem Meßvorgang selbst Energiezufuhr zum Empfangssystem einen Ausschlag hervorruft. Es möge zunächst im folgenden stets angenommen werden, daß bei der Messung dem Empfangssystem ein vorgegebener Energiebetrag E zugeführt wird und daß während der Absorption dieser Energie kein wesentlicher Teil wieder abgeleitet wird, so daß die durch E bewirkte Temperaturerhöhung δT durch

$$\delta T = \frac{E}{C} \tag{3}$$

wenigstens der Größenordnung nach gegeben ist. Nach (2) und (3) ist dann die Temperaturerhöhung und damit der Ausschlag nur von dem zugeführten Energiebetrag abhängig, gleichgültig, ob es sich um eine spontane Schwan-

[1]) Vgl. z. B. R. Fürth, Handb. d. Phys. IV, S. 292 u. f.

kung ε_0 oder um den zu messenden Energiebetrag E handelt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß das räumliche Temperaturmittel des Empfangssystems für den Ausschlag maßgebend ist.

Es können nun zwei Fälle eintreten:

a) Die durch die Temperaturschwankungen des Empfangssystems verursachten mechanischen Schwankungen des beweglichen Systems sind kleiner als dessen Brownsche Bewegung. Dann sind die Meßfehler im wesentlichen durch die letztere bedingt und sind größer als der durch (1) gegebene Energiebetrag ε_0.

b) Die thermisch bedingten Schwankungen sind gleich den Brownschen oder größer als diese. Dann ist der mittlere Fehler einer Energiemessung durch (1) gegeben. Dieser Fehler läßt sich für ein bestimmtes Empfangssystem mit der Kapazität C bei der Temperatur T nicht unterschreiten. Diese Bedingung b) soll die Bedingung der hinreichenden Anzeigegenauigkeit der Ablesevorrichtung heißen.

ε_0 werde die *Energieschwelle* des Meßinstrumentes genannt. Fall a) ist z. B. realisiert bei einem Bolometer mit niedriger Spannung der Stromquelle. Eine Erhöhung der Spannung macht das Instrument leistungsfähiger. Sobald aber die Temperaturschwankungen der Bolometerwiderstände zu Schwankungen des Galvanometersystems führen, die größer als dessen Brownsche Bewegung sind (Fall b), nützt eine Erhöhung der Spannung nichts mehr. Das Bolometer wirkt dann als „Verstärker" der Widerstandsschwankungen.

Die Energieschwelle ε_0 stimmt bei den „Wärmekraftmaschinen" mit der von Czerny (l. c.) angegebenen Grenze überein. Denn eine dem Empfangssystem zugeführte Energie E, die die Temperaturerhöhung δT hervorruft, wird höchstens mit dem Nutzeffekt $\delta T/T$ in Ausschlagsarbeit verwandelt; es ist also im günstigsten Falle

$$\text{Ausschlagsarbeit} = E\frac{\delta T}{T} = \frac{E^2}{CT}$$

nach (3). Der mittlere Fehler ε_0 einer Energiemessung ist dadurch gegeben, daß die zugehörige Ausschlagsarbeit von der Größenordnung kT wird, also ist

$$\frac{\varepsilon_0^2}{CT} = kT,$$

was mit (1) übereinstimmt. Da z. B. die Leistungsgrenze der besten Thermoelemente in Verbindung mit hochempfindlichen Galvanometern diesem theoretischen Wert in der Größenordnung nahekommt, können hiernach die durch die Temperaturschwankungen der Lötstellen verursachten

Galvanometerschwankungen von den Brownschen Schwankungen in der Größenordnung nicht weit entfernt sein.

Aus (1) ergibt sich, daß eine Erniedrigung der Energieschwelle, also eine Erhöhung der Leistungsfähigkeit des Meßinstrumentes auf zwei Wegen zu erreichen ist:

1. Man verkleinert T, d. h. man bringt das Empfangssystem und alle mit ihm im Wärmeaustausch stehenden Körper auf niedrige Temperatur. Dieser Weg, auf den schon oft, wenn auch mit etwas anderer Begründung, hingewiesen wurde, wird meist auf erhebliche praktische Schwierigkeiten stoßen.

2. Man verkleinert C, die Wärmekapazität des Empfangssystems. Könnte man ein einziges Atom als Empfangssystem benutzen, so wäre C von der Größenordnung k und daher ε_0 von der Größenordnung kT. Das würde eine Herabsetzung der Leistungsgrenze um etwa 9 Zehnerpotenzen bedeuten. Der Querschnitt des zu messenden Strahlenbündels und verschiedene praktische Gründe lassen aber eine beliebige Verringerung von C nicht zu. Vor allem aber ist folgendes zu bedenken: Das Empfangssystem besitzt stets ein Wärmeabgabevermögen λ pro Sekunde und Grad Temperaturerhöhung, das sich aus Wärmeleitung und -strahlung und, wenigstens bei den „Wärmekraftmaschinen", aus demjenigen Prozeß zusammensetzt, der die Verwandlung von Wärme in Arbeit besorgt (z. B. Thermostrom und Peltier-Effekt). Nur solange die Zeitdauer t_M einer Messung höchstens von der Größenordnung

$$t_0 = \frac{C}{\lambda} \tag{4}$$

ist, gilt Formel (8) und damit die obigen Betrachtungen über die Leistungsgrenze ε_0. Bei längerer Meßdauer würde infolge der Wärmeabgabe eine geringere Temperaturerhöhung eintreten und sich damit die Leistung des Instrumentes verschlechtern. Bei Verringerung von C verkleinert sich t_0, und der zu messende Energiebetrag müßte in immer kürzerer Zeit zur Verfügung stehen.

Nur wird in Wirklichkeit meist nicht ein Energiebetrag E, sondern ein Energiestrom S gemessen, so daß der zur Verfügung stehende Energiebetrag

$$E = St_M \tag{5}$$

der Meßdauer t_M proportional ist. Als Maß für die Leistungsfähigkeit L eines Instrumentes kann man die Größe

$$L = \frac{1}{S} \cdot \frac{\text{Meßausschlag}}{\text{Schwankungsausschlag}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_M}} \tag{6}$$

ansehen, also den Ausschlag, gemessen mit dem mittleren Fehler als Einheit, für den Energiestrom 1, dividiert durch die Wurzel aus der Meßdauer. Es ist sinngemäß, die Meßdauer in dieser Weise zu berücksichtigen, weil der mittlere Fehler des Mittelwertes aus n Einzelmessungen $\sqrt{n}$-mal kleiner ist als der einer Einzelmessung und die in gegebener Zeit mögliche Zahl von Messungen proportional $1/t_M$ ist. Da es hierbei nun auf den Verlauf der Schwankungen innerhalb verschiedener Meßzeiten t_M ankommt, müssen wir uns zunächst mit dem zeitlichen Verlauf der Schwankungen beschäftigen. — Es sei

$q(t)$ die gesamte dem Empfangssystem pro sec zugeführte Wärmemenge,

$q_s(t)$ die spontan pro sec zugeführte Wärmemenge,

$\vartheta = T - T_0$ die Temperaturdifferenz gegen die Umgebung.

Dann ist

$$q(t) = S + q_s(t) - \lambda\vartheta = C\dot{\vartheta}$$

oder

$$\dot{\vartheta} + \frac{\vartheta}{t_0} = \frac{S}{C} + \varphi(t),$$

wo

$$\frac{q_s(t)}{C} = \varphi(t)$$

gesetzt ist. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\vartheta = \vartheta_a e^{-t/t_0} + \frac{S}{\lambda}(1 - e^{-t/t_0}) + e^{-t/t_0}\int_0^t \varphi(t)\, e^{t/t_0}\, \mathrm{d}t. \qquad (7)$$

Hierin ist die Integrationskonstante ϑ_a der Wert von ϑ für $t = 0$. Man erkennt, daß t_0 die Zeit bedeutet, in der ϑ ohne äußere Wärmezufuhr auf $1/e$ seines Wertes abklingen würde. Um das mittlere Schwankungsquadrat der Temperatur zu berechnen, benutzen wir eine von Ornstein[1]) angegebene Methode. Die Funktion $\varphi(t)$ ist unbekannt; aber es können über sie die folgenden Annahmen gemacht werden, wobei die Mittelwertsbildung über viele Beobachtungen durch Überstreichen angedeutet ist:

1. $\overline{\varphi(t)} = 0$, 2. $\overline{\varphi(t_1)\,\varphi(t_2)} = \psi(t_2 - t_1) = \psi(u)$;

3. $\psi(u)$ hat ein Maximum für $u = 0$ und ist nur für Werte von u merklich von 0 verschieden, die klein gegen die kürzesten Beobachtungszeiten sind; wir setzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, \mathrm{d}u = J.$$

[1]) L. S. Ornstein, Proc. Amsterdam **21**, 96, 1917; ZS. f. Phys. **41**, 848, 1927.

Mit Hilfe dieser Annahmen folgt

$$\overline{\int_0^t \varphi(t)\, e^{t/t_0}\, dt} = \int_0^t \overline{\varphi(t)}\, e^{t/t_0}\, dt = 0,$$

$$\overline{\left(\int_0^t \varphi(t)\, e^{t/t_0}\, dt\right)^2} = \overline{\int_0^t \varphi(\xi)\, e^{\xi/t_0}\, d\xi \cdot \int_0^t \varphi(\eta)\, e^{\eta/t_0}\, d\eta} = \int_0^t e^{\xi/t_0}\, d\xi \int_0^t \overline{\varphi(\xi)\, \varphi(\eta)}\, e^{\eta/t_0}\, d\eta$$

$$= \int_0^t e^{\xi/t_0}\, d\xi \int_{-\xi}^{t-\xi} \overline{\varphi(\xi)\, \varphi(\xi+u)}\, e^{\xi+u/t_0}\, du = J \cdot \int_0^t e^{2\xi/t_0}\, d\xi = J \cdot \frac{t_0}{2}\,(e^{2t/t_0} - 1).$$

Ohne die spontanen Schwankungen wäre $\vartheta_a = 0$ und $\varphi(t) = 0$, also

$$\vartheta = \vartheta_0 = \frac{S}{\lambda}(1 - e^{-t/t_0}). \tag{8}$$

Ablesungen zur Zeit 0 und zur Zeit t ergeben die Temperaturerhöhung $\vartheta - \vartheta_a$, ohne die Schwankungen würden sie die Temperaturerhöhung ϑ_0 ergeben. Das mittlere Fehlerquadrat vieler Messungen mit derselben Anfangstemperatur ϑ_a ist also

$$\tau^2 = \overline{(\vartheta - \vartheta_a - \vartheta_0)^2}$$

$$= \vartheta_a^2 (1 - e^{-t/t_0})^2 - 2\,\vartheta_a\, e^{-t/t_0} (1 - e^{-t/t_0}) \overline{\int_0^t \varphi(t)\, e^{t/t_0}\, dt} + e^{-2t/t_0} \overline{\left(\int_0^t \varphi(t)\, e^{t/t_0}\, dt\right)^2}$$

$$= \vartheta_a^2 (1 - e^{-t/t_0})^2 + J \cdot \frac{t_0}{2}(1 - e^{-2t/t_0}).$$

Für $t \gg t_0$ und $\vartheta_a = 0$ muß τ^2 in das oben (2) definierte mittlere Schwankungsquadrat τ_0^2 übergehen, also muß

$$J \frac{t_0}{2} = \tau_0^2$$

sein, folglich wird im allgemeinen Falle

$$\tau^2 = \vartheta_a^2 (1 - e^{-t/t_0})^2 + \tau_0^2 (1 - e^{-2t/t_0}). \tag{9}$$

Diese Beziehung gibt also das durch die Temperaturschwankungen verursachte mittlere Fehlerquadrat als Funktion der Zeit. Es besteht aus zwei Teilen: Der erste Teil ist hervorgerufen durch die Abweichung der Temperatur von derjenigen der Umgebung bei Beginn der Messung ($\vartheta = \vartheta_a$ statt $\vartheta = 0$), der zweite Teil durch die Schwankungen während der Messung; letzterer geht für $t \gg t_0$ gegen τ_0^2.

Mittelt man noch über viele Messungen mit beliebiger Anfangstemperatur ϑ_a, so wird

$$\overline{\vartheta_a^2} = \tau_0^2$$

und folglich

$$\tau^2 = 2\,\tau_0^2 (1 - e^{-t/t_0}). \tag{10}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (8) und (10) können wir nun die oben (6) definierte Leistungsfähigkeit L für verschiedene Meßdauern t_M berechnen:

$$L = \frac{1}{S}\frac{\vartheta_0}{\tau}\frac{1}{\sqrt{t_M}} = \frac{1}{\tau_0 \lambda}\sqrt{\frac{1-e^{-t_M/t_0}}{2\,t_M}} = \frac{1}{T\sqrt{2\,k\,\lambda}}\sqrt{\frac{1-e^{-t_M/t_0}}{t_M/t_0}}. \qquad (11)$$

Hierin ist der zweite Faktor für $0 < t_M \leqq t_0$ praktisch gleich 1, während er für $t_M > t_0$ gegen 0 abfällt. Es ist also am günstigsten, $t_M \leqq t_0$ zu wählen. Praktisch wird man t_M von der Größenordnung t_0 wählen, weil bei kleineren Meßdauern die Bedingung einer hinreichenden Anzeigegenauigkeit der Ablesevorrichtung schwerer erfüllbar wird. Die größte erreichbare Leistungsfähigkeit ist also

$$L_{opt} = \frac{1}{T\sqrt{2\,k\,\lambda}}. \qquad (12)$$

L_{opt} hängt also bei gegebener Temperatur nur von der Wärmeabgabe λ des Empfangssystems ab und wird um so größer, je kleiner λ ist. Bei den „Wärmekraftmaschinen" ist nun ein Teil der Wärmeabgabe grundsätzlicher Natur, er dient zur Erzeugung der Ausschlagsarbeit und dem damit notwendig verknüpften Übergang von Wärme zu tieferer Temperatur. Bei den Instrumenten vom Bolometertyp fällt diese Wärmeabgabe fort. Bei beiden Arten von Instrumenten ist die Ausstrahlung des Empfangssystems mindestens in demjenigen Spektralgebiet, in das die zu messende Strahlung fällt, unvermeidlich.

Außerdem gibt es noch unvermeidliche Wärmeverluste, die bei den einzelnen Typen verschieden sind, z. B. beim Vakuumthermoelement die Wärmeleitung in den Drähten des Elementes, beim Radiometer die Wärmeleitung im Gas, beim Bolometer die Wärmeleitung in den Zuführungsdrähten. Es ist leicht verständlich, daß die gesamten Wärmeverluste, die vermeidbaren und die unvermeidbaren, bei den besten Vertretern der verschiedenen Instrumenttypen von ungefähr der gleichen Größenordnung sind, und so erklärt es sich, daß auch ihre Leistungsfähigkeit ungefähr dieselbe ist.

Immerhin eröffnet sich hier ein Weg, durch beste Wärmeisolation des Empfangssystems die Leistungsfähigkeit der thermischen Strahlungsmeßinstrumente zu steigern. Ob er praktisch gangbar ist, läßt sich nur durch spezielle Betrachtungen über die einzelnen Instrumenttypen entscheiden und soll hier nicht untersucht werden.

Wir sind Herrn M. Czerny für eine Diskussion sehr dankbar, die zur Klärung wesentlicher Punkte beitrug.

Jena, Theoret.-Physikal. Seminar der Universität, im Oktober 1940.

Über den Aufbau zinnhaltiger Halogenidleuchtstoffe *).

Von **M. Hüniger** und **J. Rudolph.**

Mit 17 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Oktober 1940.)

Durch Zusatz geringer Mengen von Halogeniden des zweiwertigen Zinns erlangen die Halogenide der Alkalien, der Erdalkalien und des Ammoniums die Fähigkeit zu lumineszieren. Für eine Reihe dieser Leuchtstoffe wird die spektrale Erregungsverteilung nach einem besonderen Verfahren ausgemessen. Ihr Verlauf ist für alle Leuchtstoffe ähnlich. Das Erregungsspektrum stimmt, wie gleichzeitig ausgeführte Absorptionsmessungen zeigen, mit dem Absorptionsspektrum des einkristallinen Leuchtstoffes und dem der geringe Mengen Zinn enthaltenden, konzentrierten wässerigen Halogenidlösungen, welche das Zinn in Form koordinativ gesättigter Komplexsalze enthalten, überein. Hieraus ergibt sich die Folgerung, daß der Bau der Leuchtzentren ähnlich dem der Komplexverbindungen ist. Aus den Absorptionsmessungen läßt sich auch die Zahl der Leuchtzentren bestimmen: sie ist von der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5}. Zum Schluß werden für eine Reihe von Leuchtstoffen die spektralen Verteilungen der Emission gemessen, deren Vergleich mit den Emissionsspektren der bei der Reduktion der gasförmigen Sn^{4+}-Halogenide durch Alkalimetalldampf auftretenden Chemilumineszenzen Schlüsse über den Leuchtvorgang in den Zinnaktivierten Halogenidleuchtstoffen zuläßt.

Einleitung.

Eine große Reihe von Untersuchungen, insbesondere von Hilsch und Mitarbeitern[1]) hat ergeben, daß geringe Zusätze der Schwermetalle Thallium, Kupfer, Silber und Blei zu den Halogeniden der Alkalien diese instand setzen, bei Bestrahlung mit ultraviolettem Licht mehr oder weniger hell zu lumineszieren. Die Fähigkeit der genannten Metalle, zu lumineszieren, ist indessen nicht auf den Einbau in die Halogenide der Alkalien beschränkt; vielmehr vermögen diese Metalle auch in den Halogeniden der Erdalkalien, des Zinks, Cadmiums und Ammoniums Lumineszenz hervorzurufen. Darüber hinaus gibt es noch einige andere Schwermetalle, die bei Einbau in Alkali- oder Erdalkalihalogenide Leuchtstoffe bilden[2]).

Ganz besondere Fähigkeit zur Leuchtstoffbildung besitzt das Zinn, das in den Jodiden, Bromiden und Chloriden aller Alkalien und Erdalkalien und des Ammoniums z. T. sehr hell lumineszient. An diesen Leuchtstoffen soll nun gezeigt werden, daß die mit Zinn aktivierten Halogenide sowohl der Alkalien als auch der Erdalkalien trotz der Verschiedenheit ihrer Kristallstruktur und chemischen Wertigkeit zu ein und derselben Leucht-

*) D 11.

[1]) R. Hilsch, ZS. f. Phys. **44**, 860, 1927. — [2]) Hierüber soll eine spätere Veröffentlichung berichten.

stoffgruppe gehören. Zu diesem Zweck wird der Nachweis der Gleichartigkeit in der Leuchtzentrenbeschaffenheit bei Alkali- und Erdalkalihalogeniden erbracht.

Unmittelbare Kenntnis von der Beschaffenheit der Leuchtzentren ergibt die Untersuchung der spektralen Erregungsverteilung, d. h. des Verlaufs der Emissionslichtmenge bei Änderung der Wellenlänge des erregenden Lichtes. Läßt man also das ultraviolette Licht einer Lichtquelle mit möglichst energiegleichem Spektrum auf den Leuchtstoff fallen und mißt das jeder erregenden Wellenlänge zugehörige Emissionslicht, so muß man einen Verlauf der Emissionsintensität erhalten, welcher ganz dem Absorptionsspektrum des das Leuchtzentrum bildenden Molekülgebildes entspricht. Die spektrale Lage und Struktur des Spektrums der erregenden Absorption lassen in vielen Fällen die molekulare Beschaffenheit des Leuchtzentrums erkennen. Das im folgenden beschriebene Verfahren zur Bestimmung der spektralen Erregungsverteilung eines Leuchtstoffes läßt sich ohne weiteres für pulverförmige Leuchtstoffproben anwenden und ermöglicht somit die Untersuchung auch solcher Leuchtstoffe, die wegen der Unmöglichkeit ihrer Herstellung in Einkristallform durch andere Verfahren, z. B. direkte Absorptionsmessungen, nicht oder nur mit großen Schwierigkeiten erfaßt werden konnten.

Die spektrale Erregungsverteilung.

Die Messung der spektralen Erregungsverteilung erfordert die Kenntnis der Intensität des jeweilig erregenden Lichtes. Es wäre an sich zur Erregung der Leuchtstoffe eine Lichtquelle für UV-Licht mit energiegleichem Spektrum am geeignetsten.

Dieser Forderung entspricht am besten das UV-Spektrum des Wasserstoffkontinuums. Daher wurde zur Erregung der Leuchtstoffe ein Wasserstoffrohr, hergestellt von der Firma Hanff & Buest, benutzt, das bei 3000 Volt Sekundärspannung und 500 mA betrieben wurde. Das kontinuierliche UV wurde hinsichtlich seiner spektralen Verteilung mittels einer Cs-Vakuum-Photozelle mit Quarzfenster nach Durchgang durch einen Quarzdoppelmonochromator von C. Leiss ausgemessen. Aus dieser Messung ergab sich unter Berücksichtigung der spektralen Empfindlichkeit dieser Zelle laut einer Eichung durch die PTR die spektrale Intensität des Wasserstoffkontinuums (Fig. 1). Das Absinken der Intensität von etwa 300 mμ an wird bei den folgenden Messungen der Erregungsverteilung berücksichtigt. Dabei wird die Annahme gemacht, daß zwischen erregender und emittierter Lichtmenge Proportionalität besteht. Soweit es sich um Leuchtstoffe

ohne Nachleuchtdauer handelt, ist diese Proportionalität nachgewiesen[1]). Da nun die vorliegenden Leuchtstoffe bei Erregung in den zu untersuchenden Spektralgebieten ein Nachleuchten merklicher Dauer nicht zeigten, konnte mit der erwähnten Proportionalität gerechnet werden[2]).

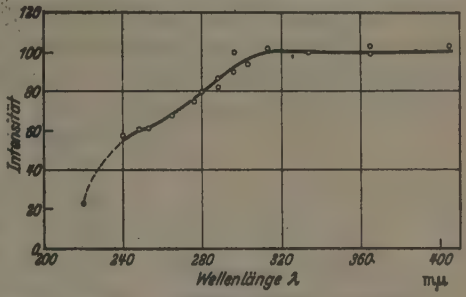


Fig. 1. Spektrale Verteilung des Lichtes des Wasserstoffrohres.

Die genaue Ermittlung der Erregungsverteilung verlangte ferner die Voraussetzung, daß die Emission eines Leuchtstoffes in ihrer spektralen Zusammensetzung unabhängig von der Wellenlänge des erregenden Lichtes ist. Diese Forderung war bei den für die Messungen in Frage kommenden Leuchtstoffen erfüllt. Die mit Hilfe eines König-Martensschen Spektralphotometers erfolgte Ausmessung der spektralen Lage des Lumineszenzlichtes ist z. B. für NaJ—Sn und KJ—Sn (Fig. 2) bei Erregung mit

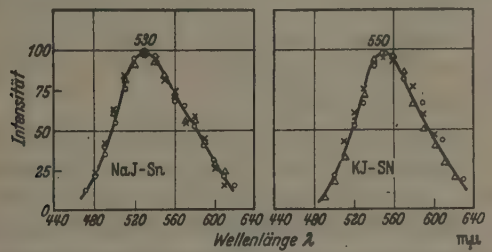


Fig. 2. Spektrale Emissionsverteilung bei Anregung mit verschiedenen Wellenlängen: ○○○ 365 mμ, △△△ 334 bis 280 mμ, ××× 253 mμ.

Wellenlängen in drei verschiedenen Gebieten (365 mμ, 334 bis 280 mμ und 253 mμ) die gleiche.

Die Versuche, die Ausmessung des Intensitätsganges der Emission bei Erregung mit verschiedenen Wellenlängen mit Hilfe des lichtelektrischen Verfahrens vorzunehmen, scheiterten an der Kleinheit der Leuchtintensitäten. Denn die geringe Anregungsenergie mittels des an sich nicht sehr hellen

[1]) N. Riehl, Ann. Phys. **29**, 636, 1937. — [2]) Phosphoreszenz tritt erst bei Erregung mit dem im Gebiet der kurzwelligen Eigenabsorption des Grundstoffes liegenden UV auf.

Lichtes der Wasserstofflampe wurde durch die spektrale Zerlegung überdies noch stark geschwächt.

Es wurde daher zu der empfindlicheren photographischen Methode gegriffen. Die Anordnung zur photographischen Messung der Erregungsverteilung ist schematisch in Fig. 3 wiedergegeben. Das zur Erregung dienende Licht der Wasserstofflampe L wurde durch den Quarz-Doppelmonochromator M spektral zerlegt und fiel in einem schmalen Bündel von 0,4 mm Breite und 10 mm Höhe auf eine unmittelbar hinter dem Monochromatoraustrittsspalt befindliche Glasplatte P, auf welcher der zu untersuchende Leuchtstoff in dünner Schicht aufgetragen war. Das Emissionslicht des erregten Leuchtstoffes fiel durch eine Spaltblende B hindurch auf einen dicht hinter der Platte vorbeilaufenden photographischen Film F. Zwecks Fernhaltung des nicht absorbierten erregenden UV-Lichtes von der Filmschicht war die Glasplatte mit einer nach Angaben von Heyne und Schön[1]) hergestellten Durophen-Lackschicht D bedeckt, welche alles Licht unterhalb von 400 mμ absorbierte.

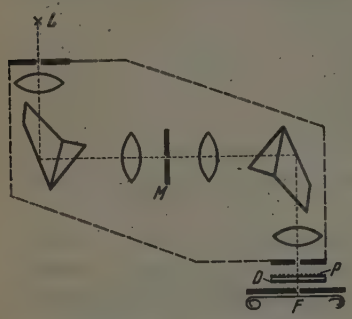
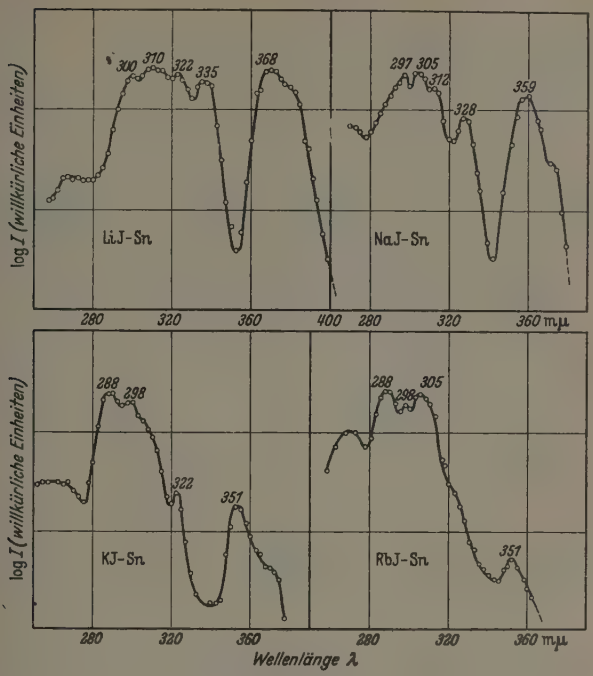


Fig. 3. Anordnung zur Messung der spektralen Erregungsverteilung.

Die den verschiedenen Emissionsintensitäten bei veränderter Erregung entsprechenden Schwärzungen wurden mit einem Mikrophotometer von Zeiss ausgemessen, und die Emissionsintensitäten nach einer für die benutzten Agfa-Isochrom-Rollfilme gemessenen Schwärzungskurve bestimmt.

Meßergebnisse. Nach dem geschilderten Verfahren wurde die spektrale Erregungsverteilung für folgende pulverförmige Stoffe gemessen: die mit Zinn aktivierten Jodide von Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium, Calcium, die Bromide von Natrium, Kalium, Rubidium, Caesium, Ammonium und die Chloride von Natrium, Kalium, Rubidium. Die Erregungsverteilungen der anderen Leuchtstoffe konnten wegen des z. T. sehr schwachen Lumineszenzlichtes nicht erfaßt werden. Zur Herstellung der Leuchtstoffe wurden analysenreine Stoffe von Schering und Merck benutzt. Die Zusätze des Zinns zum Halogenid bewegten sich zwischen 0,05 und 0,5%. Die Her-

[1]) G. Heyne u. M. Schön, Angew. Chem. 1936, S. 784.



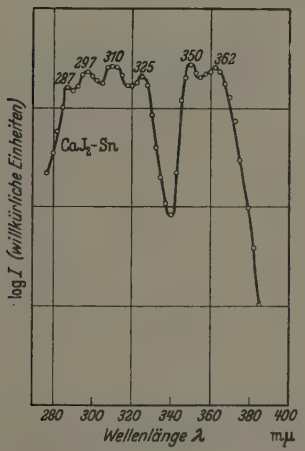


Fig. 4. Spektrale Erregungsverteilung der mit Sn aktivierten Jodide.

stellung der Leuchtstoffpulver erfolgte teils durch Schmelzen, teils durch Eindampfen der wässerigen Lösungen.

Das Ergebnis der in den Fig. 4 bis 6 wiedergegebenen Messungen bringt klar zum Ausdruck, daß das charakteristische Bandensystem der

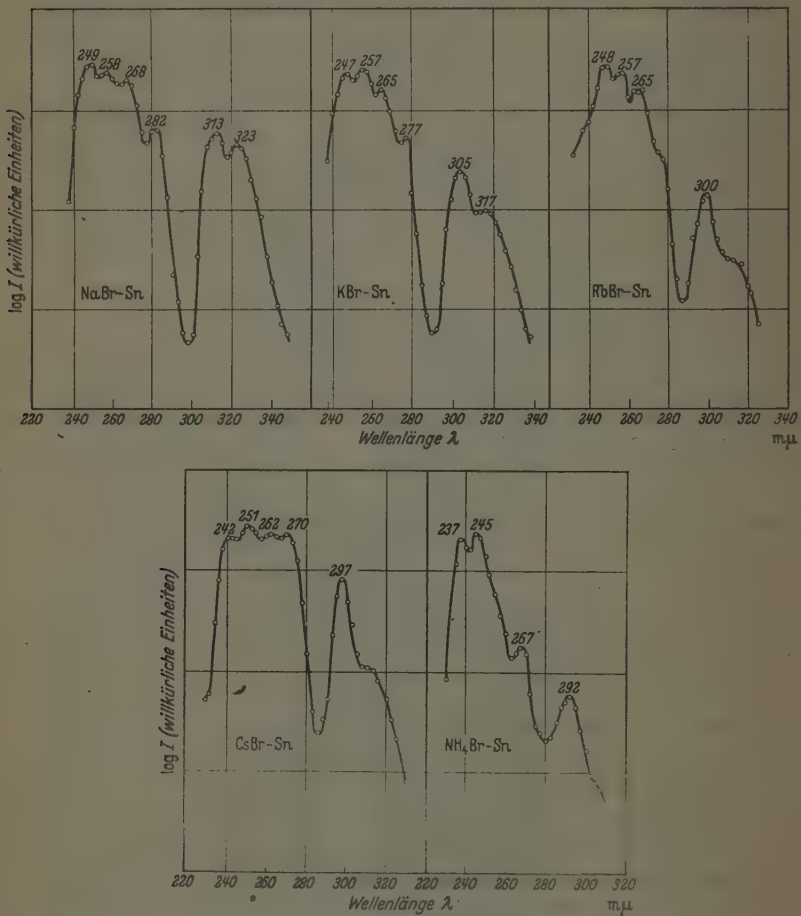


Fig. 5. Spektrale Erregungsverteilung der mit Sn aktivierten Bromide.

Erregungsverteilung (Logarithmus der Emissionsintensität in Abhängigkeit von der erregenden Wellenlänge) bei allen untersuchten Leuchtstoffen in seiner Grundform unverändert wiederkehrt. Indessen sind verschiedene

Einflüsse der Grundstoffbeschaffenheit auf die Lage der einzelnen Banden feststellbar. So tritt eine geringe Verschiebung der Erregungsverteilung nach kurzen Wellen mit zunehmendem Ionenradius des Grundstoffkations, also etwa in der Reihe Lithiumjodid—Rubidiumjodid ein. Eine größere

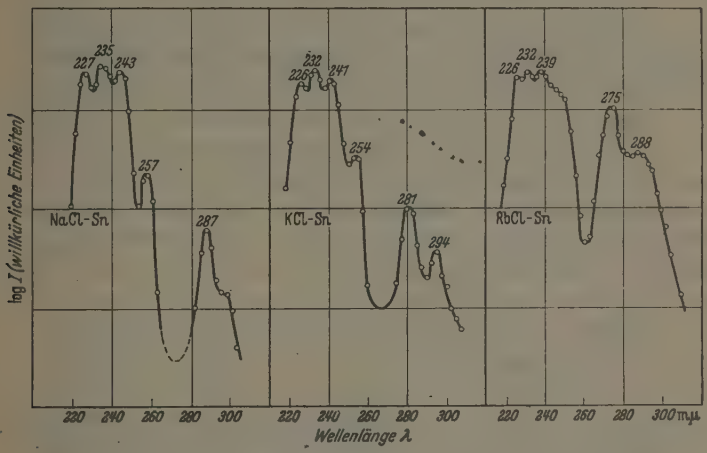


Fig. 6. Spektrale Erregungsverteilung der mit Sn aktivierten Chloride.

Verschiebung des Bandensystems nach kurzen Wellen zeigt sich bei abnehmendem Radius des Grundstoffanions, also in der Reihe Jodid—Bromid—Chlorid.

Trotz dieser Lagenunterschiede bleibt der allgemeine Charakter der Erregungsverteilung für alle Leuchtstoffe derselbe. Es scheint also dementsprechend in allen das gleiche Leuchtzentrum vorhanden zu sein. Und zwar ist offenbar in erster Linie das Zinnion dafür verantwortlich zu machen. Darüber hinaus ist indessen auch eine Beteiligung der Halogenionen und in geringem Maße auch der Grundstoffkationen anzunehmen, da diese auf die Lage des Bandensystems einen Einfluß haben.

Diese Tatsachen gaben zu der Vermutung Veranlassung, daß die Leuchtzentren der untersuchten Leuchtstoffgruppe eine Beschaffenheit von der Art Wernerscher Komplexsalze aufweisen, ähnlich wie die von Hilsch untersuchten Halogenidleuchtstoffe, für die erstmalig Fromherz[1]) den Nachweis eines komplexartigen Aufbaues der Leuchtzentren erbrachte. Zuvor wird jedoch zwecks Feststellung, wieweit eine Übereinstimmung

[1]) H. Fromherz, ZS. f. Phys. 68, 233, 1931.

zwischen der spektralen Erregungsverteilung und der Absorption des kristallinen Leuchtstoffes besteht, die durch den Zinnzusatz hervorgerufene Absorption an Einkristallen gemessen.

Die Kristallabsorption zinnhaltiger Kaliumhalogenide.

Die Messungen der spektralen Absorption wurden nach der Ausschlagsmethode ausgeführt. Das von dem als Lichtquelle dienenden Wasserstoffrohr (Hanff & Buest) kommende Licht wird durch einen Quarzdoppelmonochromator (C. Leiss) spektral zerlegt und fällt nach Durchlaufen des zu messenden Gegenstandes auf eine lichtelektrische Zelle (Cs-Vakuum-Photozelle). Der ausgelöste Photostrom wird mit einem empfindlichen Instrument für die beiden Lichtintensitäten J_0 (auffallende Lichtmenge) und J (durchgelassene Lichtmenge) gemessen. Der Logarithmus des Verhältnisses der beiden Photoströme ergibt die Extinktion E, mit deren Hilfe nach dem Beer-Lambertschen Gesetz $E = \log J_0/J = k \cdot c \cdot d$ der Extinktionskoeffizient k bei Kenntnis der Konzentration c und der Schichtdicke d berechnet werden kann.

Die zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit bei Absorptionsmessungen mit Hilfe der Ausschlagsmethode notwendigen Bedingungen, gute Konstanz des Lichtes der Lichtquelle und Proportionalität zwischen Lichtintensität und Photostrom, waren bei der benutzten Anordnung in genügendem Maße erfüllt[1]).

Zur Messung des Photostroms reichte die Empfindlichkeit eines Spiegelgalvanometers nicht aus. Infolgedessen wurde eine für die Verstärkung kleiner Ströme geeignete Anordnung in Form eines Röhrenvoltmeters (Brückenschaltung nach Brentano[2]) (Fig. 7) benutzt. Der Verstärkungsfaktor der Anordnung war etwa $1 \cdot 10^4$ bis $1 \cdot 10^5$, so daß unter Berücksichtigung der Empfindlichkeit des verwendeten Spiegelgalvanometers (Ruhstrat; 1000 Ohm innerer Widerstand) von $4 \cdot 10^{-9}$ Amp./mm, 1 m noch Ströme von $4 \cdot 10^{-13}$ bzw. $4 \cdot 10^{-14}$ Amp. nachgewiesen werden konnten.

Wie die Nachprüfung der gesamten Meßanordnung ergab, ist die erreichbare Wiederholbarkeit der einzelnen Meßergebnisse im allgemeinen gut; der mittlere Fehler der Messungen, welcher durch Ableseungenauigkeit, kleine Schwankungen des Photostromes, ungenaue Wellenlängeneinstellung am Monochromator usw. hervorgerufen wird, liegt im allgemeinen unter 0,5%.

[1]) Eine ausführliche Beschreibung der Meßanordnung sowie die Prüfung ihrer Fehlerhaftigkeit befindet sich in der Diss. Berlin 1939. — [2]) J. C. M. Brentano, Nature **108**, 532, 1921.

Für die Messungen der Absorption der kristallinen zinnhaltigen Halogenidleuchtstoffe war es erforderlich, diese in Einkristallform zu bringen. Nach dem Kyropoulos-Verfahren[1]) konnten die Leuchtstoffe KJ—Sn, KBr—Sn und KCl—Sn als Einkristalle hergestellt werden. Aus den Einkristallwürfeln wurden dünne Platten von einer Stärke von etwa 0,5 mm abgesprengt und zwischen die Photozelle und den 2 mm hohen und 0,4 mm breiten Austrittsspalt des Monochromators gebracht. Die von ihnen durchgelassene Lichtmenge J wurde gemessen. Zur Ausschaltung

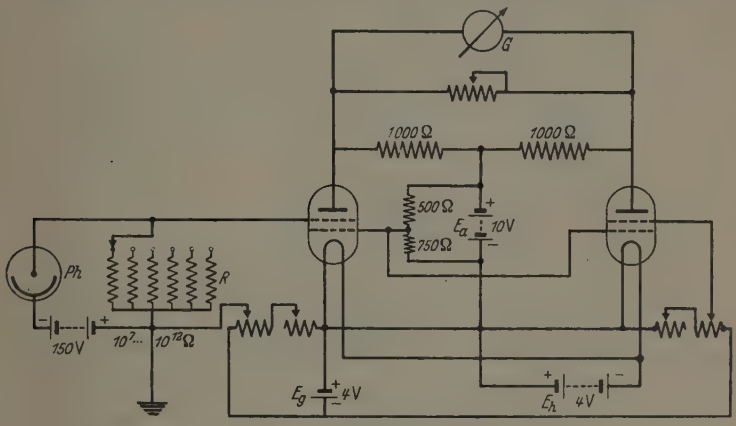


Fig. 7. Verstärkeranordnung.

der Reflexionsverluste an den Kristallflächen wurde nach jeder J-Meßreihe eine gleich dicke Kristallplatte des reinen, zinnzusatzfreien Kaliumhalogenids, dessen Eigenabsorption ja erst im kurzwelligen UV beginnt, in den Strahlengang gebracht. Die durchgelassene Lichtmenge wurde gemessen und als J_0 eingesetzt.

Auf diese Weise gelang es gleichzeitig, das lediglich durch das Zinnhalogenid im Kaliumhalogenidkristall verursachte Absorptionsbandensystem zu erhalten, frei von jeder Überlagerung durch die Eigenabsorption der Kaliumhalogenide oder irgendwelcher Verunreinigungen, die auch in den hier verwendeten analysenreinen Stoffen, wenn auch in sehr geringem Maße, vorhanden sind.

Auf die geschilderte Art wurde für die drei Leuchtstoffe KJ—Sn, KBr—Sn und KCl—Sn die Extinktion für verschiedene Wellenlängen im Gebiet von 200 bis 400 mμ bestimmt. Fig. 8 zeigt die Absorptionskurven.

[1]) S. Kyropoulos, ZS. anorg. Chem. **154**, 308, 1926.

Als Abszisse sind die Wellenlängen in mμ, als Ordinate der Logarithmus des Extinktionskoeffizienten in willkürlichen Einheiten aufgetragen.

Es zeigt sich, daß die Absorptionskurven mit den entsprechenden Erregungsverteilungen in Form und Lage übereinstimmen (vgl. Fig. 4 bis 6).

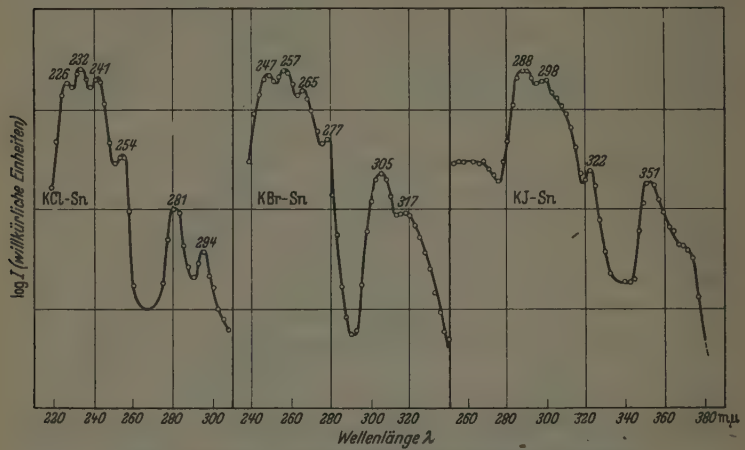


Fig. 8. Absorption der einkristallinen Kaliumhalogenid-Leuchtstoffe.

Diese Übereinstimmung ist um so bemerkenswerter, als es sich doch um zwei recht verschiedene Vorgänge handelt, die überdies nach zwei verschiedenen Verfahren meßtechnisch erfaßt wurden.

Im folgenden wird nun der Versuch unternommen, das Erregungsspektrum einem bestimmten Molekülsystem zuzuordnen, und zwar an Hand der Absorptionsspektren der wässerigen Lösungen der Leuchtstoffgemische.

Die Absorption von zinnhaltigen Halogenidlösungen.

Bei der Auflösung geringer Mengen eines Zinnhalogenids in wässerigen Lösungen mit verschiedener Konzentration an Halogenionen wird nach Prytz[1]) das Zinn ganz nach Maßangabe der Halogenionenkonzentration in verschiedenen Verbindungsformen in der Lösung aufgenommen. So bilden sich, angefangen vom doppelt positiv geladenen Zinnion, mit zunehmender Konzentration der Halogenionen Verbindungen der Art $SnCl^{\cdot}$, $SnCl_2$, $(SnCl_3)'$, und schließlich in höchstkonzentrierten Halogenidlösungen der gesättigte Komplex $(SnCl_4)''$.

[1]) M. Prytz, ZS. anorg. Chem. **172**, 147, 1928.

Die Zinn-Halogenidleuchtstoffe stellen nun ganz ähnliche Mischsysteme von kleinen Mengen Zinn in einem großen Überschuß von Halogenionen dar. Da überdies die Herstellung der Leuchtstoffe aus den wässerigen Lösungen ohne nachfolgende Hitzebehandlung durchaus möglich ist (z. B. sehr schön beim Na J—Sn oder $MgBr_2$—Sn), war anzunehmen, daß als Komplexionen in der Lösung vorhandene Zinnmengen beim Auskristallisieren auch in dieser Form vom Grundstoffkristall aufgenommen werden.

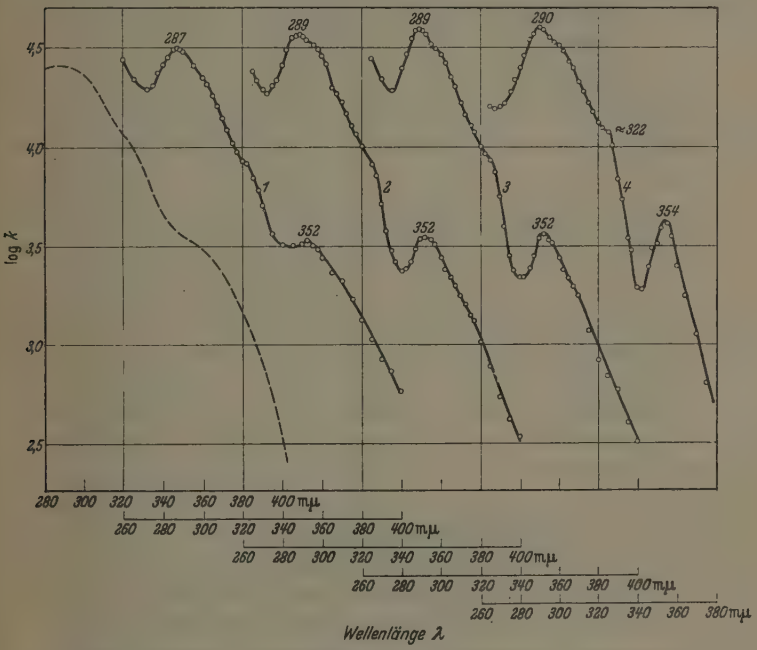


Fig. 9. Absorption der Lösungen von SnJ_2 in konzentrierten Jodidlösungen.

Eine Bestätigung dieser Vermutung soll eine Untersuchung der Absorptionsverhältnisse in den wässerigen Lösungen der Leuchtstoffkomponenten erbringen.

Die Absorption des Systems: wässerige Alkalihalogenidlösung und Zinn ist erstmalig von Fromherz[1]) untersucht worden. Der Verlauf der Absorptionskurven (s. die gestrichelten Kurven in Fig. 9, 10, 11) ist indessen zu verwaschen, um eine Identität mit der Erregungsverteilung der kri-

[1]) H. Fromherz, ZS. phys. Chem. (A) **178**, 29, 1936.

stallinen Leuchtstoffe eindeutig feststellen zu können. Es wurde daher der Versuch unternommen, durch Konzentrationsänderungen der maßgebenden Partner eine Auflösung des Absorptionsspektrums in einzelne Banden zu erreichen.

Die Ausmessung der Absorption der wässerigen Leuchtstofflösungen erfolgte wiederum mit Hilfe des lichtelektrischen Verfahrens. Die Meßanordnung war die gleiche wie die bereits beschriebene. An Stelle des ab-

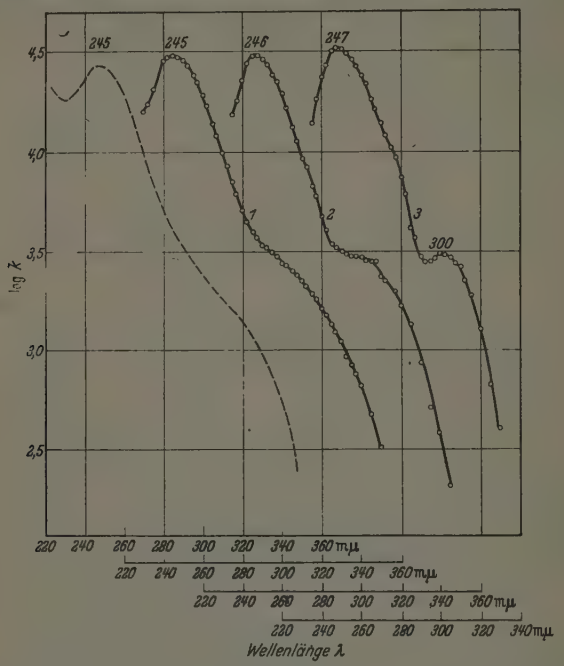


Fig. 10. Absorption der Lösungen von $SnBr_2$ in konzentrierten Bromidlösungen.

sorbierenden Einkristalles befand sich jetzt die zu untersuchende Lösung in einer Quarzküvette (von 77 mμ Dicke) im Strahlengang. Die Lösungen wurden stets unmittelbar vor Beginn der Messungen zubereitet und möglichst wenig mit der Luft in Berührung gebracht, um eine Oxydationswirkung durch den Luftsauerstoff zu vermeiden. Wegen der beschränkten Löslichkeit der Alkalihalogenide in Wasser wurden, um den Halogenüberschuß gegenüber dem $Sn^{\cdot\cdot}$ möglichst groß zu machen, z. T. löslichere Halogenverbindungen, wie Calciumjodid, Bromwasserstoff und Chlorwasserstoff

verwendet. Dies konnte ohne Bedenken geschehen, da ja in der Lösung der Einfluß des Kations auf den Absorptionsverlauf unwesentlich ist. Die Ausgangsstoffe für die Lösungen bildeten analysenreine Salze von Schering-Kahlbaum und Merck. Der Einfluß der unter Umständen vorhandenen Verunreinigungen auf die Absorption wurde wieder wie bei der Messung der Kristallabsorption dadurch beseitigt, daß bei der Berücksichtigung der Reflexion an den Wandungen der Küvette diese bei der J_0-Messung nicht leer, sondern mit einer zinnfreien Halogenidlösung der gleichen Konzentration an Halogenionen wie die zinnhaltigen Halogenidlösungen gefüllt war. Auf diese Weise konnte auch wieder die im kurzen UV einsetzende, die Zinn-Komplexabsorption überlagernde Eigenabsorption der Halogenionen ausgeschaltet werden.

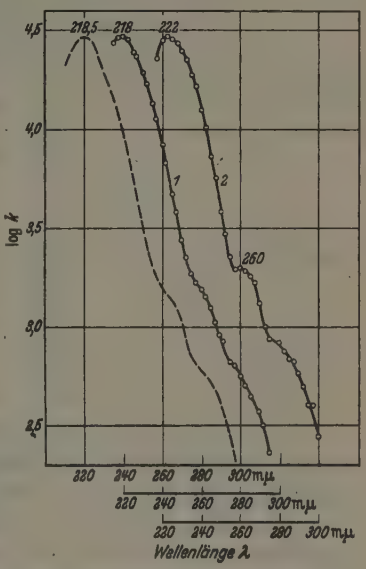


Fig. 11. Absorption der Lösungen von $SnCl_4$ in konzentrierten Chloridlösungen.

Die Meßergebnisse der Absorptionsbestimmungen an einer Reihe von Lösungen des Systems Jodid + Zinn sind in Fig. 9 enthalten. Darin ist der Logarithmus des Extinktionskoeffizienten k als Funktion der Wellenlänge dargestellt. Die gestrichelte Kurve ist die von Fromherz gemessene; die weiteren Kurven 1 bis 4 geben die Absorptionen der Sn-Komplexionen bei steigender Jodionenkonzentration wieder.

Es zeigt sich, daß mit wachsender Konzentration der Halogenionen in der Lösung eine starke Auflösung des Absorptionsspektrums in einzelne Banden erfolgt. So gewinnen die Banden bei 290 mμ und besonders die bei 350 mμ an Schärfe, während zwischen diesen neue, allerdings nur durch Wendepunkte angedeutete Banden entstehen. Gleichzeitig rücken die Banden mit zunehmender Jodkonzentration nach längeren Wellen.

Genau dieselben Erscheinungen treten beim System Bromid + Zinn auf. Auch hier gelang durch Erhöhung der Bromionenkonzentration eine Auflösung des Absorptionsspektrums (Fig. 10). Dagegen konnte bei den entsprechenden Chloridlösungen durch Erhöhung der Halogenkonzentration

kaum eine wesentliche Verschärfung im Absorptionsverlauf erreicht werden (Fig. 11). Die Konzentrationsangaben der Lösungen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Lösung	Hal'-Konzentration C_{Hal} in Mol/Liter	Sn''-Konzentration C_{Sn} in Mol/Liter	Art der Lösung
Lösung von $(SnJ_4)''$			
Fromherz . . .	2,784	0,0175	Sn'' in KJ
Lösung 1	3,426	0,0108	Sn'' in KJ
„ 2	5,512	$0{,}0094_3$	Sn'' in KJ
„ 3	6,030	$0{,}0088_4$	Sn'' in KJ
„ 4	7,725	$0{,}0020_3$	Sn'' in CaJ_2
Lösung von $(SnBr_4)''$			
Fromherz . . .	6,549	0,0981	
Lösung 1	6,844	0,0118	HBr: 1,35
„ 2	8,820	$0{,}0019_4$	HBr: 1,49
„ 3	11,00	$0{,}0019_4$	$CaBr_2$
Lösung von $(SnCl_4)''$			
Fromherz . . .	7,635	0,753	
Lösung 1	7,705	$0{,}0052_2$	HCl: 1,126
„ 2	12,15	$0{,}0052_2$	HCl: 1,19

Der Vergleich der Lösungsabsorptionen mit den spektralen Erregungsverteilungen der entsprechenden Leuchtstoffe und den Kristallabsorptionen zeigt, daß — abgesehen von nur geringen Abweichungen in der Lage der Bandenmaxima — der allgemeine Verlauf von Erregungsverteilung und Absorption ganz ähnlich ist. Dies geht aus den Fig. 12 und 13 hervor, in welchen für die Systeme KJ—Sn und KBr—Sn die Erregungsverteilung (Kurve 1), die Lösungsabsorption (Kurve 2) und die Absorption des Kristalls (Kurve 3) übereinander eingezeichnet sind.

Aus der Übereinstimmung der in den Fig. 12 und 13 wiedergegebenen Kurven ergibt sich, daß ein und dasselbe Molekülgebilde für die Absorption sowohl der Lösung, wie des Kristalles, wie auch für den Leuchtvorgang im Leuchtstoff verantwortlich zu machen ist. Die Absorption der Lösung ist koordinativ gesättigten Komplexen des zweiwertigen Zinns zuzuordnen, und der Bau der für das Leuchten maßgebenden Leuchtzentren ist desgleichen im Sinne dieser Wernerschen Komplexsalze anzunehmen.

Die Zentrenform ist nun, wie aus dem ähnlichen Verlauf der Erregungsverteilungen zu schließen ist, in allen mit Zinn aktivierten Halogenidleuchtstoffen vorhanden und ist unabhängig von der Art des Grundstoffes, gleichgültig, ob dieser nun ein Halogenid der Alkalien oder des Ammoniums oder der Erdalkalien ist. Dies ist um so bemerkenswerter, als diese Stoffe außer ihrer Verschiedenheit in chemischer Hinsicht auch hinsichtlich ihrer

Kristallform sehr unterschiedlich sind: die Mehrzahl der Alkalihalogenide kristallisiert im kubischen Gitter des Steinsalzes, die Halogenide des Caesiums und Ammoniums kristallisieren im Caesiumchlorid-Typ, Calciumjodid besitzt ein Gitter vom Schichtgittertyp. Trotzdem muß der Bau der Zentren in allen Stoffen als gleich angesehen werden.

An Hand eines Vergleiches der Absorptionen der Lösungen mit den Kristallabsorptionen ist außer auf den Bau der Zentren auch ein Schluß

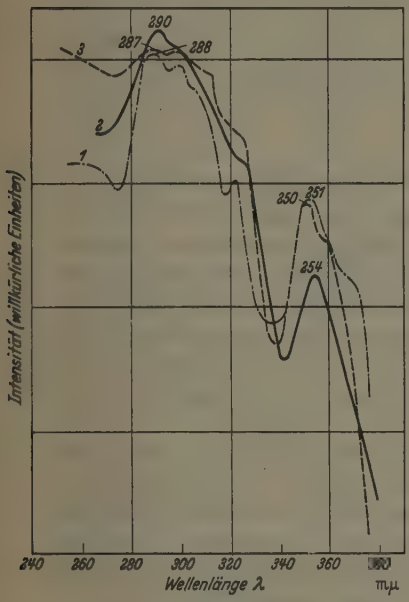


Fig. 12.

1. Spektrale Erregungsverteilung des Leuchtstoffes K J—Sn.
2. Absorption der Lösung von SnJ_2 in konzentrierter Jodidlösung.
3. Absorption des einkristallinen Leuchtstoffes K J—Sn.

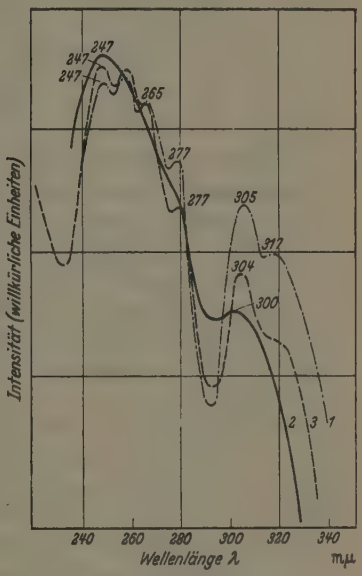


Fig. 13.

1. Spektrale Erregungsverteilung des Leuchtstoffes K Br—Sn.
2. Absorption der Lösung von $SnBr_2$ in konzentrierter Bromidlösung.
3. Absorption des einkristallinen Leuchtstoffes K Br—Sn.

auf die Zahl der absorbierenden Zinn-Komplexmoleküle und damit auf die Zahl der Leuchtzentren möglich. Aus der Gleichheit des Baues der absorbierenden Moleküle in der Lösung und im Kristall folgt, daß auch die Extinktionskoeffizienten k_L der Lösung und k_K des Kristalls gleich sein müssen. Bei Kenntnis der Größe $k_L = k_K$ ist dann nach dem Beer-Lambertschen Gesetz der Gehalt des Kristalles an Zinnionen berechenbar. Es ist $k_L = k_K = E_K \cdot 1/c_K \cdot 1/d_K$. Auf diese Weise wurden für die drei

Leuchtstoffe KJ—Sn, KBr—Sn und KCl—Sn mit Hilfe der gemessenen Extinktionen E_K, der Schichtdicke der Kristallplatten d_K und mit Hilfe des Extinktionskoeffizienten der entsprechenden Lösungen die Zinnkonzentrationen im Kristall c_K bestimmt. Die zugrunde gelegten Werte sind aus der Tabelle 2 zu ersehen, deren letzte Spalte die berechneten Werte von c_K enthält.

Tabelle 2.

Leuchtstoff	Wellenlänge in mμ	Extinktionskoeffizient $k_L = k_K$	Extinktion E_K	Schichtdicke d_K in cm	Sn-Konz. Mol/Liter	Ber. Mol/Mol K Hal
KJ—Sn	290	39 900	0,9133	0,0574	$4 \cdot 10^{-4}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$
KBr—Sn	247	31 600	0,8640	0,0537	$5 \cdot 10^{-4}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$
KCl—Sn	225	31 600	0,4444	0,0536	$2{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$

Die Lumineszenzspektren der zinnhaltigen Halogenidleuchtstoffe.

Irgendwelche Aussagen über den Mechanismus des Leuchtens und über den Erregungsvorgang in den zinnhaltigen Leuchtstoffen zu machen, begegnet großen Schwierigkeiten. Die Erregungs- bzw. Absorptionsspektren sind zu kompliziert, um aus ihnen einen bestimmten Vorgang ablesen zu können. Indessen scheinen die Emissionsspektren der untersuchten Leuchtstoffgruppe in Verbindung mit anderen Lumineszenzerscheinungen der Zinnhalogenide am ehesten eine Möglichkeit zur Deutung des Leuchtvorganges zu bieten.

Aus diesem Grunde wurden die Lumineszenzspektren zwecks Feststellung ihrer Form und ihrer genauen Lage für eine Reihe von Leuchtstoffen mit Hilfe des König-Martensschen Spektralphotometers ausgemessen (Fig. 14 bis 17). In den Figuren ist die Intensität in willkürlichen Einheiten in Abhängigkeit von der Wellenlänge eingezeichnet und im Maximum für alle Leuchtstoffe auf gleiche Höhe gebracht.

Aus den Messungen geht der einfache, glockenförmige Aufbau der Lumineszenzspektren hervor. Deutlich zu ersehen ist ferner die Verschiebung der Emission nach langen Wellen sowohl mit wachsendem Grundstoffanion als auch in geringem Maße mit steigendem Grundstoffkation.

Ganz ähnliche Emissionsspektren und auch eine gleichsinnige Änderung der Leuchtfarbe bei verschiedenem Halogen zeigen nach Polanyi und Schay[1]) die Chemilumineszenzspektren, die bei der Einwirkung von dampfförmigem Natrium und Kalium auf die Halogenide des vierwertigen Zinns auftreten.

[1]) M. Polanyi u. G. Schay, ZS. f. Phys. **47**, 814, 1928; siehe auch G. Schay, Fortschr. d. Chem. **21**, 74, 1931/32.

Die Spektren des bei diesen Reaktionen ausgesandten Lichtes sind reine Kontinua. Sie zeigen einen glockenförmigen Aufbau. Die große Ähnlichkeit der Chemi- und Photolumineszenzspektren hinsichtlich ihrer

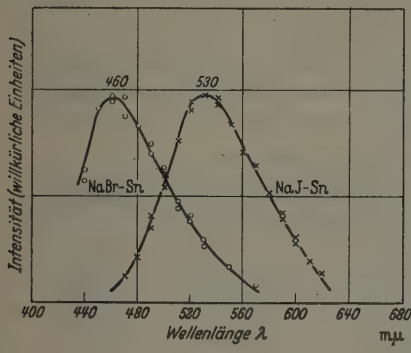


Fig. 14.

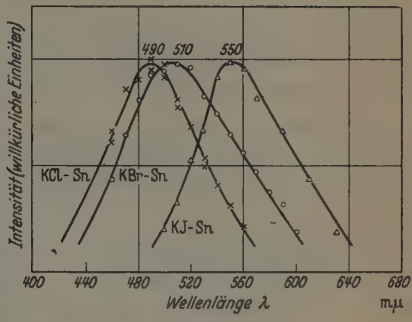


Fig. 15.

Spektrale Verteilung der Emission.

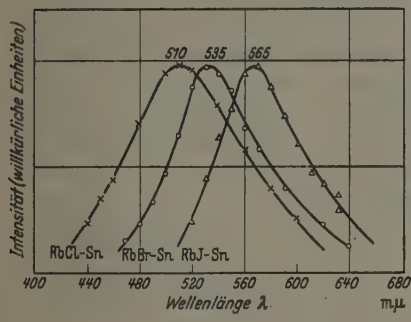


Fig. 16.

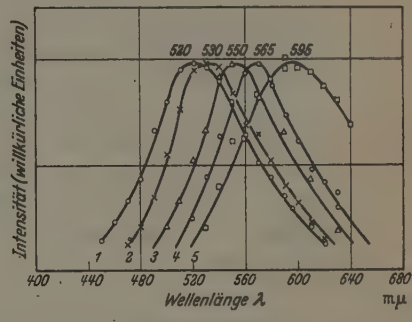


Fig. 17. 1. Li J—Sn, 2. Na J—Sn, 3. K J—Sn, 4. Rb J—Sn, 5. NH_4 J—Sn.

Spektrale Verteilung der Emission.

spektralen Lage geht aus der Gegenüberstellung der Emissionsgrenzen der beiden Lumineszenzen nach den Angaben von Polanyi bzw. nach eigenen Messungen hervor (Tabelle 3).

Die bei den beiden Arten von Lumineszenzspektren beobachtete Ähnlichkeit hinsichtlich ihrer Form und Lage gibt zu der Vermutung Anlaß, daß den beiden Leuchterscheinungen ein ähnlicher Vorgang zugrunde liegt. Polanyi und Schay haben nun eine Deutung des Leuchtvorganges bei der Reduktion der gasförmigen Halogenide des vierwertigen Zinns durch Alkalimetalldämpfe gegeben. Auf Grund energetischer Betrachtungen

am Beipiel der Reaktion $Na + SnCl_4$ gelangen die Verfasser zu der Ansicht, daß diese Reaktion, als deren Endprodukte $NaCl$ und $SnCl_2$ festgestellt wurden, in zwei Stufen nach dem Schema

$$\text{I} \quad SnCl_4 + Na = NaCl + SnCl_3 + 0\ \text{kcal},$$
$$\text{II} \quad SnCl_3 + Na = NaCl + SnCl_2 + 74\ \text{kcal}$$

verläuft. Die freiwerdende Energie der Reaktion II entspricht ungefähr derjenigen des bei der Reaktion ausgestrahlten Lichtes.

Tabelle 3.

		Emissionsgrenzen in mμ im System		
		Sn-Chlor	Sn-Brom	Sn-Jod
Chemilumineszenz (nach Polanyi)	Na	405—540	440—600	500—620
	K	400—550	—	—
Photolumineszenz	Na	400—540 [1])	400—580	460—630
	K	410—580	430—600	480—650

Unter Berücksichtigung der geschilderten Ähnlichkeit der Chemilumineszenzspektren mit den Leuchtstoffspektren könnte man geneigt sein, für die Lichtaussendung im kristallinen Leuchtstoff einen der Reaktion II ähnlichen Vorgang anzunehmen. Das Vorhandensein von $SnCl_3$ und metallischem Natrium wäre demnach als Ausgangszustand für den Emissionsvorgang anzusehen. Da nun im kristallinen Leuchtstoff das Zinn ursprünglich als zweiwertiges Ion und das Natrium als einwertiges Ion vorhanden sind, muß das System $SnCl_3$ + Na-Metall erst geschaffen werden. Es ist naheliegend, für diesen Vorgang die erregende Absorption verantwortlich zu machen.

Für den Leuchtvorgang in den Leuchtstoffen ergäbe sich nach diesen Überlegungen, wenn überdies die komplexe Beschaffenheit der Leuchtzentren berücksichtigt wird, etwa folgendes Bild:

$$\text{Absorption:} \quad (Sn^{2+}Cl_4)^{--} + 2Na^+ = (Sn^{3+}Cl_4)^- + Na + Na^+,$$
$$\text{Emission:} \quad (Sn^{3+}Cl_4)^- + Na + Na^+ = (Sn^{2+}Cl_4)^{--} + 2Na^+.$$

Der Absorptionsvorgang bestände demnach in einem Übergang eines Elektrons vom Komplexion $(SnCl_4)^{--}$ zu einem der außerhalb des komplexen Anions stehenden Natriumionen.

[1]) Die Werte stammen aus einer photographischen Spektralaufnahme, da das subjektive Verfahren mit Hilfe des König-Martens-Spektralphotometers infolge der geringen Helligkeit des Leuchtstoffes und der geringen Blauempfindlichkeit des Auges hier versagte.

Diese Vorstellung vom Leuchtvorgang der zinnhaltigen Leuchtstoffe würde übrigens ganz den von Schenck[1]) über den Leuchtvorgang in den Sulfidphosphoren gegebenen Ansichten entsprechen. Die Vorstellungen über den Leuchtvorgang in den Zinn-Halogenidleuchtstoffen, die auf Grund der Ähnlichkeit der Photolumineszenz- und der Leuchtstoffspektren in der geschilderten Weise denkbar sind, gründen sich auf die von Polanyi gegebene mögliche Erklärung für den Chemilumineszenzvorgang.

Wieweit diese Vorstellungen nun zu Recht bestehen, hängt von der völligen Klärung des Chemilumineszenzvorganges ab. Die genaue Untersuchung der Reaktionen der gasförmigen Tetrahalogenide des Zinns mit Alkali- oder Erdalkalimetalldampf würde diese Frage entscheiden. Es läßt sich indessen wohl mit großer Wahrscheinlichkeit sagen, daß der Vorgang der Erregung und des Leuchtens in den zinnhaltigen Halogenidleuchtstoffen im Sinne einer Oxydations-Reduktionserscheinung verläuft.

Berlin, Osram, Studien-Gesellschaft für elektrische Beleuchtung.

[1]) R. Schenck, Naturwissensch. **25**, 260, 1937.

(Mitteilung aus dem Institut für Allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.)

Die Diffusion von Wasserstoff durch Eisen in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit und ihre Beziehung zur Katalyse *).

Von Dipl.-Ing. **Hans Betz**, Dresden.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 4. November 1940.)

Die Diffusion von Wasserstoff, der aus einer Glimmentladung auf eine Eisenkathode geschossen wird, durch das Eisen hindurch, wird fast völlig unterdrückt, wenn die Eintrittsseite des Eisens geschmirgelt wird. Dagegen steigt die Diffusion auf den etwa 2,4fachen Wert, wenn die Austrittsseite geschmirgelt wird. Zur näheren Untersuchung dieser Erscheinung wurde die Eisenfläche statt mit unregelmäßigen Schmirgelstrichen mittels einer Rasierklinge mit Strichen in von Versuch zu Versuch verschiedenen Abständen bedeckt und die Verringerung der Diffusion in Abhängigkeit vom Strichabstand sowohl für Striche auf der Eintritts- wie auch auf der Austrittsseite gemessen. Als Ursache der Verringerung wurde vermutet, daß die beim Schmirgeln oder dem Strichezieheu aufgeworfenen scharfen Kanten als aktive Zentren wirken, die dem auf der Eisenoberfläche befindlichen Wasserstoff die Rückkehr in den Entladungsraum erleichtern, so daß er in diesen zurückkehrt, anstatt durch das Eisen hindurchzudiffundieren. Eine auf Grund dieser Annahme abgeleitete Gleichung für die Diffusion in Abhängigkeit vom Strichabstand wird durch die Versuche gut bestätigt. — Die Erscheinung hat enge Beziehung zur Oberflächenkatalyse. Die scharfen Kanten wirken als aktive Zentren, an denen sich die katalytische Vereinigung der Wasserstoffatome zu Wasserstoffmolekülen vollzieht. Es ist hier also gelungen, die Wirksamkeit derartiger aktiver Zentren quantitativ zu untersuchen.

I. Einleitung.

In einer Arbeit von Güntherschulze, Betz und Kleinwächter[1]) wird zum ersten Male diejenige Diffusion von Wasserstoff durch Eisen behandelt, bei der der Wasserstoff mittels einer Glimmentladung in das Eisen eingeführt wird. Das Eisen war Kathode.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es wichtig, auf das wesentlichste der Versuche oben erwähnter Verfasser kurz einzugehen. Man kann die Versuche in zwei Gruppen einteilen, einmal in eine Versuchsgruppe an Eisenplatten von 12 mm Stärke und einmal in eine solche an 0,1 mm starken Fe-Blechen.

---

*) D 88.

[1]) A. Güntherschulze, Hans Betz u. Hans Kleinwächter, ZS. f. Phys. **111**, 657, 1939.

Die bei den Versuchen an einer 12 mm dicken Eisenplatte durch das Eisen hindurchdiffundierende Wasserstoffmenge war nur ein geringer Bruchteil der aus dem Entladungsraum auf das Eisen strömenden Wasserstoffmenge N. Sie betrug vielleicht 1% von N.

Die Wasserstoffströmung durch das Eisen erreichte nach einer Anlaufzeit von etwa 1 Stunde bei konstant gehaltenen Versuchsbedingungen ihren konstanten Endwert. Wurde hiernach die Glimmentladung ausgeschaltet und die nun aus beiden Seiten der Eisenplatte austretende Wasserstoffmenge gemessen, so ergab sich, daß aus der Eintrittsseite doppelt soviel Wasserstoff herauskam als aus der Austrittsseite der Fe-Platte. Dies bestätigte die Annahme, daß für die Diffusion durch das Eisen die normalen Diffusionsgesetze gelten, und führte zu dem in Fig. 1 dargestellten Konzentrationsverlauf. Hiernach nimmt die Konzentration im Eisen linear von dem Wert C an der Eintrittsseite auf einen wenig von Null verschiedenen Wert c ab. Der Wert von C ist bedingt durch N. Da die an der Austrittsseite austretende Wasserstoffmenge beispielsweise 1% von N beträgt,

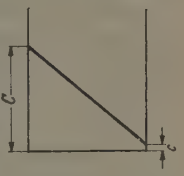


Fig. 1.

ist auch c gegenüber C verschwindend klein und kann näherungsweise gleich Null gesetzt werden. Aus der nach dem Ausschalten aus dem Eisen herausdiffundierenden Wasserstoffmenge wurde C berechnet und daraus mit der von den Diffusionsgesetzen geforderten linearen Abnahme der Konzentration der Diffusionskoeffizient des Wasserstoffes im Eisen.

Die zweite Versuchsgruppe wurde an 0,1 mm starken Fe-Blechen durchgeführt. Die Messungen ergaben recht verblüffende Ergebnisse, und die daraus abgeleiteten Annahmen wurden von den Verfassern mit großem Bedenken wiedergegeben. Untersucht wurde die Wasserstoffdiffusion in Abhängigkeit vom Kathodenfall. Es ergab sich, daß die Wasserstoffstromstärke, das heißt, die an der Austrittsseite austretende Wasserstoffmenge in cm^3-Torr pro Minute und 1 mA Ionenstrom in erster Annäherung proportional mit dem Kathodenfall ansteigt. Als Ursache für diesen proportionalen Anstieg wurde angenommen, daß die auf die Kathode zufliegenden Protonen in das Eisen hineingeschossen werden, und daß die Eindringtiefe um so größer ist, je größer der Kathodenfall ist. Diese Annahme zwang zu einer Folgerung, die von vornherein größtes Bedenken auslöste. Wenn nämlich beispielsweise an der Austrittsseite genau die Hälfte des auf der Eintrittsseite eintretenden Wasserstoffes herauskommt, müssen die Ionen bis in die Mitte der Platte, also 0,05 mm tief, eingedrungen sein. Dies ist schlecht vorstellbar. Noch weniger vorstellbar wurden aber

die Verhältnisse, als Versuche mit Elektrolyteisen ergaben, daß bei 3000 Volt Kathodenfall an der Austrittsseite mehr als das Vierfache der sich aus i_+, dem Strom der positiven Ionen auf die Kathode, ergebenden Wasserstoffmenge herauskam.

Diese Tatsache zwingt zu der Annahme, daß nicht nur die durch i_+ gegebene Wasserstoffmenge auf die Eisenoberfläche trifft, sondern weit mehr. Diese Annahme ist im Einklang mit einer anderen auffälligen Erscheinung der Glimmentladung. Die auf die Kathode zufliegenden positiven Ionen erleiden im Fallraum eine größere Anzahl Zusammenstöße. Da bei gleich schweren Teilchen bei jedem Stoß im Mittel die Hälfte der Stoßenergie übertragen wird, sollte ein wesentlicher Bruchteil der im Fallraum aufgenommenen Energie $u \cdot i_+$ auf das Gas übertragen werden und dieses erhitzen. Das ist aber durchaus nicht der Fall. Beispielsweise nimmt bei Wasserstoff das Gas vor der Kathode statt der unter obiger Annahme berechneten vielen hundert Grade eine Übertemperatur von der Größenordnung 2 bis 5° C an. Praktisch die gesamte im Fallraum aufgenommene Energie wird unmittelbar auf die Kathode übertragen, offenbar dadurch, daß die von den Ionen getroffenen Wasserstoffmolekeln in der Stoßrichtung, das heißt also auf die Kathode zu weiterfliegen und die empfangene Energie an sie übertragen. Wenn aber ein Wasserstoffmolekül mit einer Energie auf eine Eisenoberfläche aufprallt, die größer ist als seine Aktivierungsenergie im Betrage von etwa 1 e-Volt, so wird es in die beiden Atome zerlegt und kann in das Eisen hineindiffundieren. Andererseits ist die Dissoziationsenergie des Wasserstoffs im Gaszustand 4,34 e-Volt. Wird einmal angenommen, die gesamte Kathodenfallenergie würde zur Dissoziation des Wasserstoffs verbraucht, so würden beispielsweise bei 2000 Volt 2000/4,34 oder 450mal so viel Wasserstoffatome zur Diffusion zur Verfügung stehen, als sich aus i_+ allein berechnen, also außerordentlich viel mehr als zur Erklärung der Versuchsergebnisse erforderlich sind. Zur Erklärung des angegebenen Befundes genügt also die Annahme, daß außer den in Form i_+ auf die Kathode geschossenen Wasserstoffionen noch eine Anzahl im Fallraum gebildeter Wasserstoffatome oder auch genügend schnelle Wasserstoffmoleküle auf die Kathode treffen.

Infolgedessen kann an die Stelle der Annahme der mit dem Kathodenfall zunehmenden normalen Eindringtiefe die Annahme gesetzt werden, daß die Zahl der an der Oberfläche des Eisens verfügbaren Wasserstoffatome proportional der an die Kathode abgegebenen Energie $u \cdot i_+$ steigt. Dann ist es aber gleichgültig, ob einzelne Protonen größerer Energie primär mehr oder weniger tief in das Eisen hineingeschossen werden. Die Er-

scheinungen werden dann *oberflächenbedingt*. Die auf die Oberfläche treffenden Atome führen zu einer bestimmten Oberflächendichte, diese zu einer von ihr abhängigen Volumenkonzentration im Eisen an der Eintrittsoberfläche und diese wiederum vermöge des im Eisen entstehenden Diffusionsgefälles zur Strömung des Wasserstoffs durch das Eisen.

Die Versuche an 0,1 mm starken Fe-Blechen führten aber noch zu einer weiteren außerordentlich verblüffenden Erscheinung. Wurde die Eintrittsseite des Eisens geschmirgelt, so ging fast überhaupt kein Wasserstoff mehr durch das Eisen hindurch.

Diese Erscheinung kann zwei Gründe haben. Entweder wird die Eisenoberfläche durch das Schmirgeln undurchlässig, eine schwer vorstellbare Annahme, oder die Durchlässigkeit der Eisenoberfläche wird durch das Schmirgeln nicht verändert, sondern die Rückkehr der Wasserstoffatome in den Gasraum wird dadurch sehr erleichtert, so daß sie vorziehen, in den Gasraum zurückzukehren, anstatt in das Eisen hineinzugehen.

Eine Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten ist leicht durch einen einfachen Versuch zu treffen. Es wird nicht die Eintritts-, sondern die Austrittsseite des Eisens geschmirgelt. Ist die erste Annahme richtig, daß die Oberfläche dadurch undurchlässig wird, so muß das die Wasserstoffdiffusion genau so verringern wie Schmirgeln der Eintrittsseite. Stimmt dagegen die zweite Annahme, so muß durch das Schmirgeln der Rückseite die Wasserstoffströmung vergrößert werden, weil ja jetzt der Austritt in den Meßraum erleichtert wird. Der Versuch ergab, daß durch das Schmirgeln der Rückseite die Wasserstoffstromstärke auf das 2,4fache vergrößert wurde.

Also wird durch das Schmirgeln des Eisens die Rückkehr der Wasserstoffatome in den Gasraum erleichtert.

Die Aufklärung dieser seltsamen Erscheinung ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Sie führt uns mitten in das Gebiet der Oberflächenerscheinungen der Katalyse. Nur mit Hilfe klar entwickelter Vorstellungen über diese Erscheinung lassen sich die beobachteten Ergebnisse verstehen. Diese Vorstellungen sollen deshalb hier zunächst entwickelt werden. Wasserstoffmoleküle sind, chemisch gesprochen, in sich gesättigt. Gelangen sie auf eine Metalloberfläche, so sind zwischen ihnen und der Oberfläche lediglich die van der Waalsschen Kräfte wirksam. Diese sind so schwach, daß die Moleküle wohl bei der Temperatur der flüssigen Luft, nicht aber bei gewöhnlicher Temperatur von der Metalloberfläche festgehalten werden können.

Wasserstoff*atome* dagegen werden durch die Oberflächenkräfte einer Metalloberfläche polarisiert, das heißt also in Dipole verwandelt, deren

Dipolachse auf der Oberfläche senkrecht steht und infolgedessen mit recht beträchtlichen Kräften festgehalten, so daß sie bei gewöhnlicher Temperatur nur dann wieder entweichen können, wenn sie ausnahmsweise einmal eine sehr große Energie erhalten haben. Immerhin genügt aber die Energie der Wärmebewegung, ihnen ein Wandern auf der Oberfläche zu gestatten. Dabei werden sie, da das Kraftfeld der Oberfläche nicht das einer absoluten Ebene ist, bevorzugte Punkte größter Anziehungskräfte besetzen und durch Wärmebewegung von einem Punkt zum nächsten befördert werden. Da sie aber sämtlich Dipole gleicher Richtung sind, stoßen sie sich gegenseitig ab und halten sich im allgemeinen gegenseitig auf Abstand. Sie bilden also auf der Oberfläche gewissermaßen einen einlagigen, durch Wärmebewegung gestörten Kristall.

Werden der Oberfläche jetzt aber dauernd weitere Wasserstoffatome zugeführt, so wird die Besetzung der Oberfläche immer dichter, weil sie nicht wieder entweichen können, bis sie schließlich so dicht wird, daß unter Hinzunahme der Wärmebewegung die Atome auf denjenigen Abstand sich nähern, bei welchem die Reaktion $H + H = H_2$ vor sich geht. Diese Reaktion ist im Gasraum nur als Dreierstoß möglich, weil die Reaktionsenergie von 4,34 e-Volt so groß ist, daß sie die beiden Partner sofort wieder auseinandertreiben würde. Kann aber die Reaktionsenergie auf einen im Augenblick der Reaktion anwesenden Dritten abgegeben werden, so kann die Reaktion vor sich gehen. Da aber Dreierstöße bei geringen Gasdrucken sehr selten sind, läßt sich Wasserstoff durch Gasentladungen bis zu fast 100% in seine Atome dissoziieren. Eine feste Metalloberfläche dagegen vermag ohne weiteres die freiwerdende Energie aufzunehmen, so daß jede Annäherung zweier Wasserstoffatome auf die Reaktionsabstände auch zur Reaktion führt. Das entstandene, nur noch durch van der Waalssche Kräfte gehaltene Molekül aber verdampft sofort in den Gasraum. Das ist der Vorgang der katalytischen Bildung von Wasserstoffmolekeln aus den Atomen auf Metalloberflächen.

Diese Katalyse findet nun an allen Metalloberflächen vollständig statt mit Ausnahme der Oberfläche dünner Eisenbleche. Der Grund ist einleuchtend. Längst, ehe die Besetzung der Eisenoberfläche so dicht wird, daß die Wasserstoffatome sämtlich auf Reaktionsabstand kommen, verschwinden sie von der Oberfläche in das Innere des Eisens und diffundieren zur anderen Seite.

Offenbar ist jetzt aber die Konzentration der Wasserstoffatome im Eisen auf der Austrittsseite nicht annähernd Null wie bei den 12 mm dicken

Blechen, sondern zwar geringer als auf der Eintrittsseite, aber durchaus nicht zu vernachlässigen. Es ergibt sich jetzt also die Fig. 2.

Diese Vorstellungen ermöglichen uns nun die Wirkung des Schmirgelns zu verstehen. Durch das Schmirgeln werden überall scharfe Kanten aufgerissen. Im Atommodell hat aber eine solche Kante den Querschnitt der Fig. 3. Während nun auf einer Ebene die Anziehungskräfte des Eisens auf Wasserstoffatome auf der Fläche senkrecht stehen, stehen die von Eisenatomen der Kante selbst ausgeübten Kräfte auf der Oberfläche schräg. Sie ziehen also die Wasserstoffatome an die Kante heran und bringen sie in so geringen Abstand voneinander, daß sie ein Molekül bilden, das sogleich in den Gasraum verschwindet. Infolge der gegenseitigen Dipolabstoßung

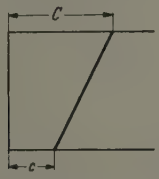


Fig. 2.

Fig. 3.

in Verbindung mit der Energie der Wärmebewegung rücken alsbald die nächsten Wasserstoffatome nach, bilden H_2 und verschwinden ihrerseits. So ergibt sich ein dauernder Strom der Wasserstoffatome auf der Oberfläche zu den Kanten und von den Kanten in den Raum. Katalytisch würde man sagen: Die Kanten sind katalytisch aktive Zentren. Sobald aber dieser Oberflächenstrom groß gegen den Diffusionsstrom durch das Eisen wird, scheint das Eisen für den Wasserstoff fast völlig undurchlässig geworden zu sein.

Offenbar waren quantitative Ergebnisse über den Einfluß der Kanten nur dann zu erwarten, wenn der völlig ungeordnete Vorgang des Schmirgelns durch eine geordnete meßbare und variable Kantenbildung ersetzt wurde. Dies geschah, wie nachfolgend beschrieben ist, durch Ritzen mittels eines Stichels.

II. Der Einfluß von Kanten auf der Eintrittsseite auf die Wasserstoffdiffusion bei Fe*-Blechen mit vollkommen glatter Rückseite.*

1. Versuchsmaterial. Die Versuche wurden mit blankgewalztem, ungehärtetem 0,1 mm starkem Stahlblech durchgeführt. Das Blech wurde aus einer Dresdner Eisenhandlung in blankem, gewalztem Zustande bezogen.

Um eine einigermaßen gleichmäßige Oberfläche zu bekommen, wurde das für eine Versuchsreihe notwendige Stahlblech in einer Wasserstoffglimmentladung als Kathode etwa 30 Stunden lang eingeschaltet. Dabei wurde eine etwaige auf der Oberfläche sitzende Oxydschicht reduziert und durch die Kathodenzerstäubung die noch auf der Oberfläche haftenden Verunreinigungen beseitigt. Der Kathodenfall betrug etwa 1000 Volt und die Kathodenstromdichte etwa 0,005 mA/cm². Das so vorbehandelte Blech wurde bis zum Versuch in einem Exsikkator unter Vakuum aufbewahrt. Zum Schutz gegen Feuchtigkeit befand sich noch eine Schale mit P_2O_5 im Exsikkator.

2. Das Ritzen der Kanten. Es bestand die Aufgabe, auf der Oberfläche der Eintrittsseite der Fe-Bleche Striche mit scharfen Kanten zu ziehen. Um möglichst klare und übersichtliche Verhältnisse zu bekommen, war folgendes anzustreben:

1. Geringe Breite der Striche, damit auf einen gegebenen Abstand möglichst viel Striche gezogen werden können.

2. Konstante Breite der Striche.

3. Konstanter Abstand der Striche bei einem Blech.

4. Konstante Tiefe der Striche.

Da Striche von mindestens 6 cm Länge gezogen werden mußten, wurde eine besondere Vorrichtung zum Ziehen der Striche zusammengestellt. Das Blech wurde auf eine vollkommen ebene Messingscheibe gelegt und an den Ecken mit Schrauben befestigt. Unmittelbar über dem Blech konnte eine kleine Stahlreißschiene, die mit einer Spindel mit 1 mm Steigung fest verbunden war, bewegt werden. Am Ende der Spindel war ein Teilkreis angebracht. Hiermit konnte man bequem die Stahlreißschiene auf Abstände von 0,01 mm einstellen. Die Striche wurden mittels eines Stichels, der an die Stahlreißschiene angelegt wurde, mit der Hand gezogen. Als Stichel diente eine an einen Metallstab angelötete Rasierklingenkante. Die Breite der auf diese Weise gezogenen Striche betrug im Mittel 0,035 mm. Es gelang, mit dieser Anordnung die angegebenen Forderungen einigermaßen befriedigend zu erfüllen.

Die Fig. 4 zeigt die photographische Aufnahme eines Bleches mit einem mittleren Strichabstand von 0,167 mm.

3. Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung entsprach der in den früheren Veröffentlichungen beschriebenen.

4. Ergebnisse. a) Die Wasserstoffstromstärke durch das Eisen in Abhängigkeit von der Einschaltdauer bei in verschieden großem Abstand geritzten Blechen. Als erste Versuchsreihe wurde bei jedem Blech die Wasserstoffstromstärke, das heißt die an der Austrittsseite pro Minute und pro 1 mA Ionenstrom austretende Wasserstoffmenge in $cm^3 \cdot$ Torr als Funktion der Einschaltdauer aufgenommen. Das hierfür verwendete Gas wurde vorher im Ballastvolumen 10 Stunden bei 400 Volt und 50 mA saubergebrannt und dabei gleichzeitig über P_2O_5 getrocknet. Der Versuch selbst wurde bei

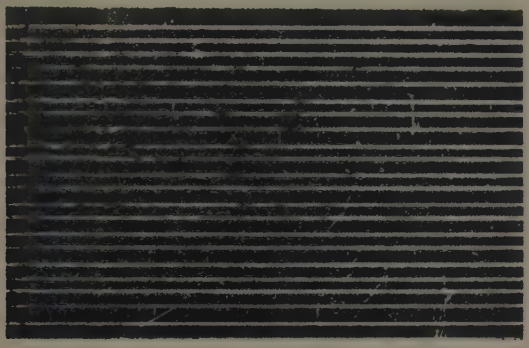


Fig. 4.

850 Volt durchgeführt. Hierbei lag das Versuchsgefäß parallel zum Ballastvolumen. Das Gasdruck wurde so eingestellt, daß die Stromstärke beim Einschalten rund 6 mA betrug. Dies entspricht einer Stromdichte von rund 0,33 mA/cm^2. Die Spannung wurde während des Versuchs streng konstant gehalten. Die Stromstärke bzw. die Stromdichte nahm mit zunehmender Einschaltdauer ab, da der durch das Fe-Blech wegdiffundierende Wasserstoff den Gasdruck im Entladungsgefäß und Ballast stetig verringerte. Hierzu kommt noch, daß während des Versuchs das Entladungsgefäß, um eine Verunreinigung des Gases durch Fremdgase, wie z. B. durch Kohlenwasserstoff, die beim Auftreffen von Elektronen auf die Glaswand frei werden können, möglichst gering zu halten, von Zeit zu Zeit leer gepumpt wurde. Gegen Ende des Versuches war die Stromstärke auf rund 3,5 mA zurückgegangen.

Während der Versuchsdauer wurde in regelmäßigen Abständen die Wasserstoffstromstärke gemessen. Das Ergebnis für die einzelnen Bleche ist in Fig. 5 dargestellt. Es zeigt, daß erstens die Wasserstoffstromstärke

mit der Einschaltdauer ansteigt und zweitens die einzelnen Kurven um so höher liegen, je größer der Strichabstand ist. Die Kurve für 1 mm Strichabstand fällt mit der Kurve des vollkommen glatten Bleches nahezu zusammen. Es sieht so aus, als ob schon bei 1 mm Strichabstand der Einfluß der Kanten nicht mehr hervortritt.

Für den Anstieg des Wasserstoffstromes mit der Einschaltdauer kann man verschiedene Gründe anführen. Man könnte einmal annehmen, daß das Fe-Blech trotz Vorbehandlung in einer Wasserstoffglimmentladung noch mit einer dünnen Oxydhaut bedeckt ist und daß diese nach und nach

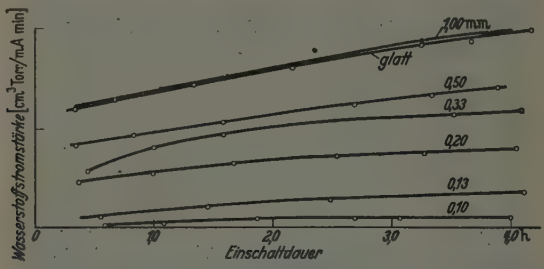


Fig. 5. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der Einschaltdauer für verschiedene Strichabstände. Rückseite der Bleche glatt.

verschwindet. Ferner könnte man annehmen, daß die einzelnen Bleche von vornherein trotz des Blankwalzens keine vollkommen glatte Oberfläche besitzen, sondern sehr feine Kanten, die mit zunehmender Einschaltdauer infolge der einsetzenden Kathodenzerstäubung nach und nach eingeebnet werden.

Den nachfolgend angestellten Betrachtungen sind die nach 4 Stunden Dauereinschaltung gemessenen Wasserstoffstromstärken zugrunde gelegt. In Tabelle 1 sind diese Werte angegeben.

Tabelle 1.

Strichabstand von Mitte zu Mitte mm	Die zwischen 2 Kanten wirksame Flächenbreite mm	Fläche in % der vollständigen	Wasserstoffstromstärke nach 4 Std. Dauereinschaltung cm³ Torr/mA min	Durchlässigkeit in % (die Wasserstoffstromstärke für Strichabstand ∞ ist gleich 2,0 gesetzt)
0,10	0,067	67	0,11	5,5
0,13	0,097	75	0,36	18,0
0,20	0,167	83,3	0,80	40,0
0,33	0,30	90	1,17	58,5
0,50	0,467	93,3	1,43	71,5
1,0	0,967	96,7	1,99	99,4
∞	—	100	1,96	98,0

In der zweiten Rubrik ist die zwischen zwei Kanten für die Diffusion wirksame Flächenbreite angegeben. Hierbei ist die Diffusion innerhalb

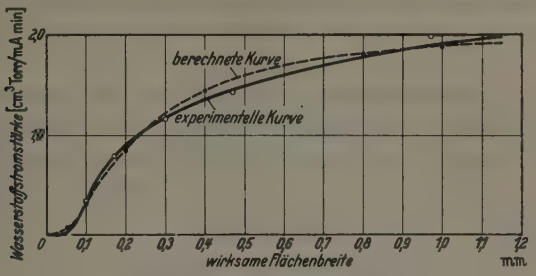


Fig. 6. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der wirksamen Flächenbreite. Rückseite der Bleche glatt.

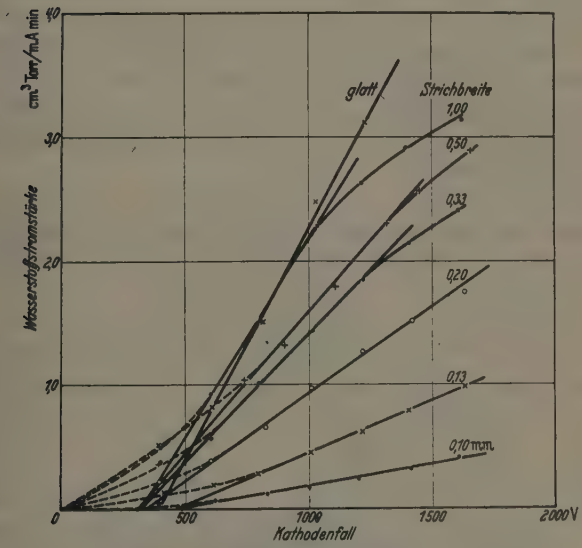


Fig. 7. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit vom Kathodenfall für verschiedene Strichabstände. Rückseite der Bleche glatt.

der Striche selbst außer acht gelassen, da hier der Abstand bis zu den Kanten außerordentlich klein ist. Außerdem kann man annehmen, daß die Furchenflächen nicht glatt sind, sondern eine Anzahl von feinen Kanten und Spitzen aufweisen, die eine Diffusion durch das Eisen vollkommen unterdrücken.

In Fig. 6 ist die Abhängigkeit der Wasserstoffstromstärke von der wirksamen Flächenbreite dargestellt. Wie die Kurve zeigt, steigt die Wasserstoffstromstärke anfangs stark beschleunigt an, verzögert sich dann und strebt einem konstanten Endwert zu. Die Kurve zeigt, daß bei einer Flächenbreite von 1 mm der Einfluß der Kanten nur noch sehr gering ist.

b) Die Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit vom Kathodenfall bei in verschieden großem Abstand geritzten Blechen. Damit die einzelnen Meßpunkte bei konstanter Blechtemperatur aufgenommen wurden, wurde die Kathodenbelastung und die Temperatur des Kühlwassers der Messingdeckplatte (20° C) konstant gehalten. Diese Kathodenbelastung $i_+ \cdot U$ betrug 8 Watt.

In Fig. 7 sind die Meßergebnisse für die einzelnen Bleche dargestellt. Die einzelnen Kurven zeigen, daß die Wasserstoffstromstärke mit dem Kathodenfall um so schneller ansteigt, je größer der Strichabstand ist. Weiterhin sieht man, daß die Wasserstoffstromstärke zunächst beschleunigt mit dem Kathodenfall ansteigt, dann bei etwa 600 Volt in einen linearen Anstieg übergeht und schließlich, wie bei einigen Kurven deutlich zu sehen ist, bei höheren Spannungen nur noch verzögert mit dem Kathodenfall ansteigt. Zum Vergleich der einzelnen Kurven miteinander betrachten wir ihren gradlinigen Teil.

Wird dessen Steigung ($\mathrm{tg}\,\alpha$) über der wirksamen Flächenbreite aufgetragen, so ergibt sich eine Kurve, die im wesentlichen mit der der Fig. 6 übereinstimmt. Sie bestätigt den angegebenen Zusammenhang zwischen Wasserstoffstromstärke und wirksamer Flächenbreite.

Tabelle 2.

Strichbreite	Wirksame Flächenbreite	$\mathrm{tg}\,\alpha$	Strichbreite	Wirksame Flächenbreite	$\mathrm{tg}\,\alpha$
0,1	0,067	0,173	0,5	0,467	1,145
0,13	0,097	0,427	1,0	0,967	1,632
0,20	0,167	0,716	∞	—	1,91
0,333	0,30	1,058			

III. Rechnerische Prüfung der Diffusion von Wasserstoff durch Eisen bei Einwirkung von Kanten.

Wird angenommen, daß die Diffusion durch das Eisen hindurch gegenüber der Wasserstoffströmung längs der Oberfläche vernachlässigt werden kann, was für die geringsten Strichabstände annähernd zutrifft, so ergibt eine einfache Rechnung, daß die Wasserstoffstromstärke durch das Eisen hindurch dem Quadrat des Strichabstandes proportional ansteigt.

Wird die Strömung durch das Eisen hindurch als so groß angenommen, daß sie neben der Oberflächenströmung berücksichtigt werden muß, was bei größeren Strichabständen der Fall ist, und zugleich die auch ohne Vorhandensein von Kanten stattfindende Rückströmung des Wasserstoffs in den Entladungsraum berücksichtigt, und werden die beiden Annahmen gemacht:

1. Die *Konzentration* der adsorbierten Wasserstoffschicht hat genau in der Mitte von je zwei Kanten einen maximalen Wert.

2. Die Wasserstoffkonzentration nimmt nach den Kanten zu ab und ist an den Kanten selbst gleich Null, so ergibt sich der in Fig. 8 schematisch wiedergegebene Strömungsverlauf.

Es bedeutet:

c = Flächenkonzentration an der Stelle $x + \mathrm{d}x$ $\frac{\text{Moleküle}}{\text{cm}^2}$,

$c + \mathrm{d}c$ = Flächenkonzentration an der Stelle x.

$$N_{ers} = F\,\mathrm{d}x = \text{konst}\,\frac{\text{cm}^3\,\text{Torr}}{\text{min mA}},$$

ist gleich dem aus dem Gasraum in das Intervall strömenden Wasserstoff;

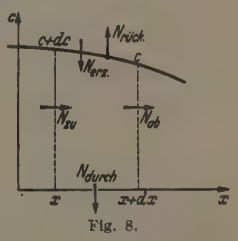


Fig. 8.

$$N_{ab} = D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\frac{\text{cm}^3\,\text{Torr}}{\text{min mA}},$$

ist gleich dem aus dem Intervall quer zur Platte herausdiffundierenden Wasserstoffstrom;

$$N_{su} = D\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\text{cm}^3\,\text{Torr}}{\text{min mA}},$$

ist gleich dem quer zur Platte in das Intervall hineindiffundierenden Wasserstoffstrom;

$$N_{durch} + N_{rück} = k\,c\,\mathrm{d}x\,\frac{\text{cm}^3\,\text{Torr}}{\text{min mA}},$$

ist gleich dem aus dem Intervall in das Eisen hineindiffundierenden Wasserstoffstrom und dem aus dem Intervall ohne Kantenwirkung in den Gasraum zurückströmenden Wasserstoff.

Im Gleichgewichtszustand ist:

$$N_{ab} + N_{durch} + N_{rück} = N_{ers} + N_{su}.$$

In Differentialform geschrieben:

$$D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} + k\,c\,\mathrm{d}x = F\,\mathrm{d}x + D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} + D\,\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Gleichung kann man verschiedenes herauskürzen, so daß man erhält:

$$\frac{d^2c}{dx^2} - \frac{kc}{D} = -\frac{F}{D} = \text{konst.} \quad (1)$$

Diese nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich nach der „Methode der Variation der Konstanten" nach Lagrange lösen. Die Rechnung führt für den Wasserstoffstrom N_H, der pro Streifen durch das Eisen geht, zu der Gleichung

$$N_H = 2Fl - 2F\sqrt{\frac{D}{k}}\,\mathrm{Tg}\sqrt{\frac{k}{D}}\,l, \quad (2)$$

wobei $2l$ die Streifenbreite ist.

Es wird nun versucht, mit Hilfe der Gleichung für N_H eine theoretische Kurve zu berechnen. In der Gleichung für N_H setzen wir $\sqrt{\frac{D}{k}} = y$, dadurch führen wir diese auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten zurück.

Für N_H ergibt sich:

$$N_H = 2Fl - 2Fy\,\mathrm{Tg}\,\frac{l}{y}. \quad (3)$$

Diese Gleichung nach F aufgelöst ergibt:

$$F = \frac{N_H}{2l - 2y\,\mathrm{Tg}\,\frac{l}{y}}.$$

Aus der Kurve der Fig. 6, die die Abhängigkeit des Wasserstoffstromes von der wirksamen Flächenbreite darstellt, wurden für verschiedene Flächenbreiten die dazugehörigen Wasserstoffstromstärken entnommen. In Tabelle 3 sind diese Werte angegeben.

Tabelle 3.

Flächenbreite mm	Wasserstoffstromstärke $\frac{cm^3\ Torr}{mA\ min}$	Anzahl der Flächen des entsprechenden Fe-Bleches	Mittlere Wasserstoffstromstärke pro Fläche $\frac{cm^3\ Torr}{mA\ min}$
0,05	0,052	554	$0{,}0939 \cdot 10^{-3}$
0,1	0,380	346	1,10
0,15	0,725	251	2,89
0,20	0,915	197,4	4,64
0,30	1,170	138	8,48
0,50	1,480	86,3	17,15
0,75	1,745	58,8	29,7
1,00	1,900	44,5	42,7

Weiter ist in der Tabelle die mittlere Wasserstoffstromstärke pro Fläche angegeben. Zwischen dieser mittleren Wasserstoffstromstärke und der Flächenbreite besteht die in Fig. 9 dargestellte Abhängigkeit. Die Figur zeigt, daß die Wasserstoffstromstärke mit der Flächenbreite zunächst beschleunigt ansteigt und dann bei 0,6 mm Flächenbreite mit dieser linear zunimmt. Nun wurde aus der Kurve die Wasserstoffstromstärke für $l = 0{,}1$ und $l = 0{,}4$ mm entnommen. Diese Werte wurden in die Gleichung für F

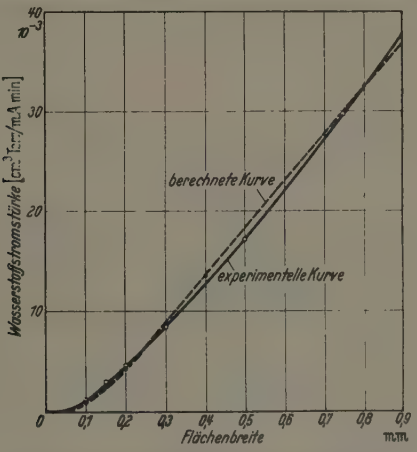


Fig. 9. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der Flächenbreite. Rückseite der Bleche glatt.

eingesetzt. Für verschiedene Werte von y wurden nun F berechnet und aus den berechneten Werten und den dazugehörigen y-Werten zwei Kurven konstruiert. Die beiden F- und y-Werte des Schnittpunktes der Kurven wurden nun in die Gleichung für N_H (3) eingesetzt und daraus eine Kurve für N_H berechnet.

In Tabelle 4 sind die berechneten Werte angeführt.

Tabelle 4.

l	N_H cm³ Torr / mA min	l	N_H cm³ Torr / mA min	l	N_H cm³ Torr / mA min
0,025	$0{,}13 \cdot 10^{-3}$	0,10	$4{,}29 \cdot 10^{-3}$	0,4	$32{,}4 \cdot 10^{-3}$
0,05	0,90	0,20	13,5	0,5	41,9

In Fig. 9 ist die berechnete Kurve mit eingetragen. Im Bereich von $l = 0$ bis $l = 0{,}1$ mm stimmt diese berechnete Kurve relativ gut mit den

experimentellen Kurve überein. Sodann verläuft die berechnete Kurve geradlinig weiter, und zwar zunächst oberhalb und später unterhalb der experimentellen Kurve. Bemerkenswert ist noch, daß der geradlinige Teil bei der berechneten Kurve erheblich früher beginnt als bei der experimentellen Kurve. Trotz dieser Unterschiede kann man doch aussagen, daß die beiden Kurven im wesentlichen übereinstimmen.

Außerdem wurde auch die theoretische Kurve für den Gesamtstrom berechnet und in die Fig. 6 mit eingezeichnet. Auch hier sieht man, daß die experimentelle und die theoretische Kurve im wesentlichen gut übereinstimmen.

IV. Der Einfluß von Kanten auf der Rückseite der Fe-*Bleche auf die Wasserstoffdiffusion.*

Es liegt nahe anzunehmen, daß der auf der Rückseite des Eisens austretende Wasserstoff nicht sofort die Oberfläche verläßt, sondern daß sich auch hier zunächst eine Adsorptionsschicht mit einer bestimmten Konzentration ausbildet, und daß genau wie auf der Vorderseite eine Querdiffusion möglich ist. Treffen infolge der Querdiffusion H-Atome zusammen, dann können diese als H_2-Moleküle von der Oberfläche entweichen. Im Gleichgewichtszustand ist die Menge des von der Oberfläche entweichenden Wasserstoffs gleich der Menge des aus dem Eisen in die Adsorptionsschicht eintretenden Wasserstoffs.

Wenn es tatsächlich der Fall ist, daß auch auf der Austrittsseite eine Adsorptionsschicht besteht, dann muß auch hier eine Kantenwirkung festzustellen sein.

Für die Wasserstoffströmung ist der Unterschied in der Dichte des Wasserstoffs im Eisen unmittelbar an der Eintritts- und Austrittsseite maßgebend. Wird angenommen, daß an einer Oberfläche die Konzentration im Eisen und auf der Oberfläche einander proportional sind, so folgt, daß die Wasserstoffströmung durch das Eisen dem Unterschied der Wasserstoffdichten auf den beiden Oberflächen proportional ist. Diese Differenz nimmt zu, wenn die Wasserstoffdichte auf der Austrittsseite verringert wird und erreicht ein Maximum, wenn sie Null wird.

Aus diesen Überlegungen müssen wir folgern, daß Kanten auf der Austrittsseite die Wasserströmung vergrößern.

In einer besonderen Meßreihe wurde der Einfluß der Kanten auf der Rückseite systematisch untersucht. Die Versuche wurden mit den gleichen

Blechen, mit denen die Kantenwirkung auf der Eintrittsseite untersucht wurde, durchgeführt. Die Bleche wurden so eingebaut, daß die unbearbeitete Seite Eintrittsseite, und die geritzte Seite Austrittsseite wurde. Gemessen wurde in der üblichen Weise, und zwar die Wasserstoffstromstärke als Funktion von der Einschaltdauer. Um noch einen Wert bei einer möglichst kleinen Flächenbreite zu erhalten, wurde eins der Fe-Bleche auf der Rückseite geschmirgelt. Die mittlere Flächenbreite betrug hierbei etwa 0,001 mm.

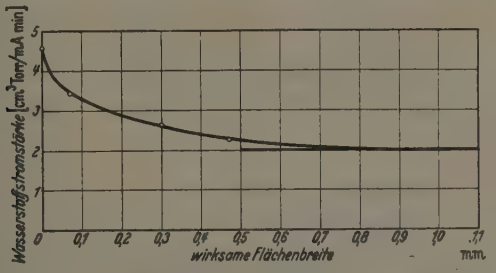


Fig. 10. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der Flächenbreite bei glatter Vorderseite und gestrichelter Rückseite.

In Fig. 10 ist das Ergebnis dargestellt. Das Bild zeigt, daß die Wasserstoffstromstärke mit abnehmender Flächenbreite ansteigt und einem Maximalwert zustrebt. Dieser Maximalwert liegt um das 2.3fache höher als die bei vollkommen glatter Rückseite gemessene Wasserstoffstromstärke.

V. Der Einfluß von Kanten auf der Eintrittsseite auf die Diffusion von Wasserstoff durch Eisen bei geschmirgelter Rückseite.

Von besonderem Interesse waren nun noch Versuche mit auf der Eintrittsseite in verschiedenem Abstand geritzten Blechen, bei denen die Ausbildung einer Adsorptionsschicht auf der Rückseite unterdrückt wurde, das heißt an Blechen, an denen an der Austrittsseite die Wasserstoffkonzentration gleich Null war. Dadurch ist der ganze Diffusionsvorgang leichter zu übersehen. Die für die Versuchsreihe vorbehandelten Bleche wurden auf der Rückseite mit Schmirgelpapier Nr. 120 geschmirgelt. Man darf wohl auf Grund der bisher angestellten Überlegungen annehmen, daß sich dadurch auf der Rückseite bei der Wasserstoffdiffusion keine Adsorptionsschicht mit nennenswerter Wasserstoffkonzentration ausbilden kann. Ebenso kann man daraus folgern, daß auch die Wasserstoffkonzentration im Eisen an der Austrittsseite Null ist.

Die Kanten auf der Eintrittsseite der verschiedenen Bleche wurden in der üblichen Weise geritzt. Die mittlere Strichbreite betrug 0,044 mm. Gemessen wurde die Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der Einschaltdauer. Die Versuche selbst wurden in der gleichen Weise wie die Versuche mit Blechen mit glatter Rückseite durchgeführt.

Auch hier zeigte sich wieder, daß abgesehen von dem Blech mit einem Strichabstand von 0,13 mm die Wasserstoffstromstärke mit der Einschalt-

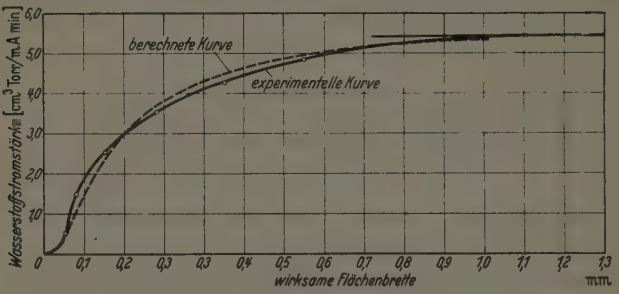


Fig. 11. Wasserstoffstromstärke in Abhängigkeit von der Flächenbreite auf der Vorderseite bei geschmirgelter Rückseite.

dauer zunimmt. Außerdem liegen auch hier die einzelnen Kurven um so höher, je größer die Strichabstände sind. In Tabelle 4 sind die nach 4 Stunden Dauereinschaltung gemessenen Wasserstoffstromstärken angegeben.

Tabelle 4.

Strichabstand von Mitte zu Mitte mm	Die zwischen 2 Kanten wirksame Flächenbreite mm	Wasserstoffstromstärke nach 4 Std. Dauereinschaltung $\frac{cm^3\ Torr}{mA\ min}$
0,1	0,056	0,4
0,13	0,086	1,2
0,2	0,156	2,01
0,33	0,286	2,82
0,5	0,456	3,39
0,7	0,656	3,86
∞	—	4,35

In der Fig. 11 sind diese Werte in Abhängigkeit von der wirksamen Flächenbreite aufgetragen. Der Kurvenverlauf stimmt mit dem der Fig. 6 vollkommen überein. Die Wasserstoffstromstärke steigt zunächst stark beschleunigt an, verzögert sich dann und strebt schließlich einem konstanten Endwert zu. Auch hier zeigt sich, daß bei einer wirksamen Flächenbreite

von etwa 1 mm die Kantenwirkung nur noch gering ist. In der Tabelle 5 ist die mittlere Wasserstoffstromstärke pro Fläche angegeben.

Tabelle 5.

Flächenbreite mm	Wasserstoffstromstärke $\frac{\text{cm}^3 \text{ Torr}}{\text{mA min}}$	Anzahl der Flächen des entsprechenden Fe-Bleches	Mittlere Wasserstoffstromstärke pro Fläche $\frac{\text{cm}^3 \text{ Torr}}{\text{mA min}}$
0,05	0,28	490	$0{,}57 \cdot 10^{-3}$
0,10	1,42	320	4,44
0,15	1,96	237	8,27
0,20	2,35	188	12,5
0,30	2,88	134	21,5
0,50	3,51	84,6	41,5
0,75	4,04	57,9	69,7
1,00	4,29	44,1	97,3

Die Fig. 11 zeigt nun die Wasserstoffstromstärke pro mittlere Fläche in Abhängigkeit von der Flächenbreite. Außerdem zeigt die Figur die theoretische Kurve. Diese wurde mit Hilfe der Gleichung für

$$N_H = 2Fl - 2F\sqrt{\frac{D}{k}}\,\mathrm{Tg}\sqrt{\frac{k}{D}}\,l$$

berechnet. Man sieht, daß beide Kurven recht gut übereinstimmen. Die Wasserstoffstromstärke steigt anfangs stark beschleunigt und dann, schon relativ früh, nur noch linear mit der Flächenbreite an. Im linearen Gebiet ist der Tg von $\sqrt{\frac{k}{D}}\,l = 1$ und wirkt sich infolgedessen nicht mehr aus. Zieht man parallel zum geradlinigen Teil der Kurve eine Gerade durch den Nullpunkt, so entspricht diese Gerade dem ersten Teil, $2Fl$, der Gleichung. Die Differenz der Ordinaten von beiden Geraden entspricht dem Wert $2F\sqrt{D/k}$.

In Fig. 11 ist die theoretische Kurve für den Gesamtstrom mit eingezeichnet.

VI. Schlußbemerkungen.

Kanten auf der Eintrittsseite eines Fe-Bleches vermindern die Wasserstoffdiffusion durch das Eisen, Kanten auf der Austrittsseite erhöhen sie. Zwischen dem Kantenabstand, das heißt zwischen der wirksamen Flächenbreite und der Wasserstoffdiffusion durch das Eisen, besteht ein gesetzmäßiger Zusammenhang. Es wurde gefunden, daß bei den benutzten Blechdicken von 0,1 mm schon bei einem Kantenabstand von etwa 1 mm ab die Wirkung der Kanten auf die Diffusion durch das Eisen nur noch

verschwindend klein ist. Durch Rechnung, die mit den Versuchsergebnissen recht gut übereinstimmt, wird der in der Einleitung entwickelte Diffusionsvorgang im wesentlichen bestätigt.

Die Vorgänge, die sich auf den Fe-Oberflächen abspielen, sind identisch mit denen an Oberflächen von festen Katalysatoren. Es wird allgemein angenommen, daß bei den meisten Reaktionen nicht die gesamte Oberfläche des betreffenden Katalysators beteiligt ist, sondern nur ganz bestimmte Stellen. Nach Taylor bezeichnet man diese mit aktiven Zentren. Als solche werden in der Literatur unter anderem Kristallkanten, Korngrenzen und Störungsstellen, die z. B. bei mechanischen Beanspruchungen auftreten, bezeichnet.

Durch die vorliegenden Versuche dürfte es zum erstenmal gelungen sein, die katalytische Wirkung von Kanten direkt meßbar zu verfolgen.

Die Veröffentlichungen über den Einfluß von Störungsstellen auf die katalytische Wirksamkeit sind in bezug auf die vorliegenden Versuche von besonderem Interesse, da anzunehmen ist, daß hier eine gewisse Analogie vorliegt. So findet man in der Literatur, daß an Kratzstellen eine erhöhte Aktivität beobachtet wurde. Fricke[1]) konnte z. B. Kohlendioxyd aus übersättigten Lösungen an Kratzlinien zur Abscheidung bringen.

Meinem hochverehrten Lehrer und Chef, Herrn Prof. Dr.-Ing. Güntherschulze, möchte ich an dieser Stelle für das stetige Interesse an dieser Arbeit und die wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

[1]) H. Fricke, ZS. f. Elektrochem. **29**, 44, 1923.

Zur Statistik der Vielfachstöße.

Von **F. Möglich** und **R. Rompe**, Berlin.

(Eingegangen am 16. November 1940.)

Die Temperaturabhängigkeit des Ausdruckes für die Häufigkeit der Vielfachstöße zwischen Elektronen und Schallquanten eines Festkörpers wird berechnet aus der Forderung, daß das durch die Plancksche Formel beschriebene thermodynamische Gleichgewicht durch die Vielfachstöße nicht gestört werden soll.

In einigen Arbeiten[1]) haben wir zeigen können, daß eine Reihe von Erscheinungen in Isolatoren sich mit Hilfe des Bändermodells des Elektronengases befriedigend deuten lassen, wenn man noch die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter berücksichtigt. Es ergab sich dabei die fundamentale Tatsache, daß die Kopplung der Elektronen mit dem Gitter nicht immer als klein angesehen werden kann, sondern daß diese Kopplung bei höheren Temperaturen und bei hohen Elektronenenergien denkbar eng ist. Der Übergang von schwacher zu starker Kopplung geschieht äußerst abrupt und ist gekennzeichnet durch das Häufigwerden eines Prozesses, den wir als Vielfachstöße bezeichnet haben. Er ist dadurch charakterisiert, daß ein von dem Elektronengas an das Gitter abgegebener Energiebetrag im Gitter durch das Auftreten nicht eines, sondern sehr vieler Schallquanten repräsentiert wird. Ebenso gibt es einen inversen Prozeß, der darin besteht, daß die Energie sehr vieler Schallquanten simultan zur Anregung eines Elektronenzustandes auf das Elektronengas übergeht.

Es gelang uns, für die Häufigkeit dieses Vorganges einen Ausdruck anzugeben, der sowohl von der Energiedichte der beteiligten Schallquanten wie auch von gewissen für das Elektronengas charakteristischen Größen abhängt. Zur qualitativen Anwendung auf die Phänomene des festen Körpers benutzen wir vorerst nur denjenigen Faktor der Formel, der die Energiedichten der Schallquanten enthält, während der in Einzelheiten schwer zu berechnende Faktor der Elektroneneigenschaften, der im wesentlichen das Quadrat eines Matrixelementes der Wechselwirkungsenergie

[1]) F. Möglich u. R. Rompe, ZS. f. Phys. **115**, 707, 1940; Phys. ZS. **41**, 236, 1940; ZS. techn. Phys. **21**, Dezemberheft, 1940; F. Möglich, N. Riehl u. R. Rompe, ebenda, S. 128.

ist, außer acht gelassen wird. Unter diesen Umständen fragt es sich, ob nicht ein einfaches und physikalisch anschauliches Verfahren existiert, das gerade von der Häufigkeitsformel soviel herzuleiten gestattet, wie bei dem augenblicklichen Stande der Theorie gebraucht wird.

Ein solches Verfahren existiert in der Tat. Es macht Gebrauch von der Forderung des detaillierten Gleichgewichtes. Ausgehend von der Planckschen Formel für das Gleichgewicht eines Schallquantengases verlangen wir: Der Ausdruck für die Häufigkeit eines Vielfachstoßprozesses muß derart sein, daß das durch die Plancksche Formel dargestellte thermodynamische Gleichgewicht durch die Existenz der Vielfachstöße als Folge der Kopplung des Schallquantengases mit dem Elektronengas nicht gestört wird.

Die hier vorgetragene Ableitung schließt sich, wie man sofort sieht, an Einsteins[1]) heute schon klassisch gewordene Herleitung der Planckschen Formel an. Ebenso wie bei den Lichtquanten müssen wir zwischen spontanen und induzierten Prozessen unterscheiden. Bei uns aber gibt es außer diesen noch gemischte Prozesse, bei denen ein Übergang teils induziert, teils spontan verläuft, was so gedeutet werden muß, daß bei der Herstellung einer Schallquantenkaskade durch Vielfachstoß einige Schallquanten durch Spontanprozeß, der Rest induziert erzeugt worden ist. Es ist selbstverständlich, daß der Prozeß der simultanen Absorption mehrerer Schallquanten nur induziert erfolgen kann.

Wir betrachten zwei Gebiete des Elektronenenergiespektrums eines Festkörpers, ε_i; $\varepsilon_i + \delta\varepsilon$ und ε_s; $\varepsilon_s + \delta\varepsilon$ $(\varepsilon_i > \varepsilon_s)$ und nehmen an, daß die Größe $\delta\varepsilon$ zwar klein ist, aber doch viele einzelne Energieniveaus enthält. Mit den Bezeichnungen: z_i gleich der Zahl der Phasenzellen und n_i der Zahl der besetzten Zellen im betrachteten Energiegebiet, ε_i, $\varepsilon_i + \delta\varepsilon$ ist der Prozeß des Überganges von ε_i nach ε_s proportional zu $n_i\,(z_s - n_s)$ und entsprechend der inverse Übergang proportional zu $n_s\,(z_i - n_i)$ (Fermi-Statistik).

Wir wollen jetzt ferner annehmen, daß folgender Prozeß möglich ist: Das Elektronengas gibt eine Energie vom Betrage $\varepsilon_i - \varepsilon_s$ an das Schallquantengas ab. Der abgegebene Energiebetrag mag größer sein als $h\nu_{max}$, wo ν_{max} die maximale Frequenz des Festkörpers ist. Die Energie $\varepsilon_i - \varepsilon_s$ soll dadurch von dem Schallquantengas aufgenommen werden, daß eine

[1]) A. Einstein, Phys. ZS. **18**, 121, 1917.

gewisse Anzahl g von Schallquanten mit den untereinander verschiedenen Frequenzen $\nu_1; \nu_2; \nu_3 \ldots \nu_g$ entstehen, und es soll der Energiesatz gelten:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_s = h\,(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \ldots + \nu_g). \qquad (1)$$

Ähnlich wie in der vorgenannten Arbeit von Einstein ist nötig, anzunehmen, daß es bei dem ins Auge gefaßten Vorgang der Energieübertragung spontane Emission und erzwungene Emission gibt. Die erstere ist von der Energiedichte der Schallquanten unabhängig, während die letztere proportional zu $\varrho_{\nu_1} \cdot \varrho_{\nu_2} \cdot \varrho_{\nu_3} \ldots \varrho_{\nu_g}$ sein muß, wo ϱ_ν die Energiedichte der Schallquanten der Frequenz ν bedeutet. Diesen Ansatz aber kann man nur dann machen, wenn die verschiedenen ϱ_{ν_i} voneinander unabhängig sind, und daher müssen wir die Einschränkung machen, daß die ν_i alle voneinander verschieden sein sollen.

Für unsere Zwecke ist es übrigens nicht günstig, die Größen ϱ_{ν_i} zu benützen; wenn wir nämlich die Intensitäten verschiedener Frequenzen zu vergleichen haben, so muß berücksichtigt werden, daß die Zahl der Zustände von der Frequenz ν_i, die sich lediglich durch die Richtung des Schallquantenimpulses unterscheiden, gerade von der Frequenz abhängig ist. Und zwar ist diese Zahl (Anzahl der Phasenzellen im Frequenzgebiet $\nu; \nu + \Delta\nu$) bei Berücksichtigung der verschiedenen Polarisationszustände gegeben durch den Faktor $\frac{12\pi\nu^2}{q^3}\Delta\nu$ (q Schallgeschwindigkeit). Aus diesem Grunde ist es besser, an die Stelle der ϱ_{ν_i} die Zahl der Schallquanten N_{ν_i} einzuführen, wobei sich diese Größe immer nur auf eine bestimmte Impulsrichtung und einen Polarisationszustand beziehen soll. Im Falle des thermischen Gleichgewichtes gilt also für

$$N_\nu = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \qquad \varrho_\nu = h\nu N_\nu \cdot \frac{12\pi\nu^2}{q^3}.$$

Wir können daher den eben betrachteten Vorgang der vollständig erzwungenen Emission einer Anzahl g von Schallquanten von bestimmter Fortpflanzungsrichtung, Frequenz und Polarisation proportional setzen zu

$$N_{\nu_1} \cdot N_{\nu_2} \cdot N_{\nu_3} \ldots N_{\nu_g}.$$

Wie schon ausgeführt, wird es aber außer dem Gliede der spontanen und dem der erzwungenen Emission noch Zwischenglieder geben, die den Fall darstellen, daß z. B. m der Schallquanten spontan und $g - m$ der Schall-

quanten erzwungen emittiert werden, und diese Zahl m kann alle Werte zwischen 0 (vollständige erzwungene Emission) und g (vollständige spontane Emission) annehmen. Das Glied z. B. bei dem 1 Quant erzwungen und $g-1$ Quanten spontan auftreten, wird offenbar proportional zu N_{ν_1} oder N_{ν_2} oder N_{ν_3} usw. sein, je nachdem, welche Frequenz erzwungen emittiert wird. Werden zwei Quanten erzwungen und $g-2$ Quanten spontan emittiert, so werden die Produkte bzw. $N_{\nu_1} \cdot N_{\nu_2}$, $N_{\nu_1} \cdot N_{\nu_3} \ldots$ in Erscheinung treten usf.

Damit sieht man, daß die gesuchte Häufigkeit des Emissionsprozesses eine Summe aus Produkten der verschiedenen N_{ν_i} sein wird. Da aber alle bei der Emission auftretenden ν_i offenbar gleichberechtigt sein müssen, so können nur solche Summen aus Produkten der N_{ν_i} auftreten, die sich nicht ändern, wenn man zwei der auftretenden ν_i miteinander vertauscht. Wenn wir ferner den Koeffizienten der spontanen Emission proportional zu r^g setzen, wo r eine noch zu bestimmende Zahl ist, so wird der Prozeß, bei dem p Schallquanten spontan und $g-p$ Schallquanten erzwungen emittiert werden, proportional zu r^p gesetzt werden müssen. Damit aber ist die Größe, die die Häufigkeit einer Vielfachstoßemission als Funktion der N_{ν_i} angibt, bis auf einen Faktor vollkommen bestimmt. Indem wir diesen Faktor, der von der Wechselwirkung zwischen Elektronengas und Gitter abhängt, mit $\widetilde{X}_{i\,s}$ bezeichnen, bekommen wir schließlich als Zahl der Vielfachstoßemissionsprozesse die Größe

$$n_i\,(z_s - n_s) \cdot \widetilde{X}_{i,s} \cdot (N_{\nu_1} + r)\,(N_{\nu} + r)\,(N_{\nu_3} + r)\,, \ldots (N_{\nu_g} + r).$$

Der Ausdruck für den inversen Prozeß (Verschwinden von g Schallquanten mit den Energien $h\nu_1\, h\nu_2 \ldots h\nu_g$ und Übergang des Elektronengases aus dem Zustand s in den Zustand i) ist einfacher anzugeben, da ein Absorptionsprozeß seiner Natur nach immer ein vollständig erzwungener Prozeß ist. Denn wenn die Größe N_{ν_i} auch nur einer einzigen Schallquantenart gleich Null ist, so kann der Prozeß offenbar überhaupt nicht stattfinden. Es ergibt sich also für die Häufigkeit des inversen Prozesses:

$$n_s\,(z_i - n_i)\,\widetilde{X}_{s,i}\,N_{\nu_1} \cdot N_{\nu_2} \cdot N_{\nu_3} \ldots N_{\nu_g}.$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht haben wir die beiden letzten Ausdrücke gleichzusetzen, wobei wir nach der Fermi-Statistik zu setzen haben:

$$\frac{n_i}{z_i - n_i} = c^{-\frac{\varepsilon_i}{kT} + \frac{\alpha}{kT}} \tag{2}$$

und daraus unter Berücksichtigung der Gleichung (1):

$$\frac{n_s\,(z_i - n_i)}{n_i\,(z_s - n_s)} = e^{+\frac{h}{kT}(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_g)} \tag{3}$$

Da schließlich nach allgemeinen quantentheoretischen Prinzipien immer $\widetilde{X}_{is} = \widetilde{X}_{si}$ sein muß, findet man sofort für das Eintreten eines Gleichgewichtes, bei dem die N_{ν_i} durch die Plancksche Formel bestimmt sind, die Bedingung:

$$e^{+\frac{h}{kT}(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_g)} N_{\nu_1} N_{\nu_2} \cdots N_{\nu_g} = (N_{\nu_1}+r)(N_{\nu_2}+r)\cdots(N_{\nu_g}+r) \tag{4}$$

bzw.

$$\prod_i \left(\frac{e^{\frac{h\nu_i}{kT}}}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} \right) = \prod_i \left(\frac{1 + r\,e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - r}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}} - 1} \right).$$

Hieraus folgt unmittelbar als Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichung, daß die bisher unbekannte Größe r den Wert 1 haben muß. Wenn wir uns aber nicht für die Emission und Absorption von Schallquanten mit wohldefinierter Impulsrichtung und Polarisation interessieren, sondern nur die Emission bzw. Absorption vorgegebener Frequenzen verlangen, so haben wir noch jeden der Faktoren in dem Ausdruck für die Häufigkeit von Emission bzw. Absorption mit $\frac{12\pi\nu_\sigma^2}{q^3}$ zu multiplizieren und erhalten schließlich:

$$\left.\begin{aligned} &n_i\,(z_s - n_s)\,X_{is} \prod_\sigma \left(\varrho_{\nu_\sigma} + \frac{12\pi h \nu^3}{q^3} \right) \quad \text{(Emission)}, \\ &n_s\,(z_i - n_i)\,X_{is} \prod_\sigma \varrho_{\nu_\sigma} \qquad\qquad\qquad\quad \text{(Absorption)}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wobei

$$X_{is} = (\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 \ldots \nu_g)^{-1} h^{-g}\, \widetilde{X}_{is}$$

gesetzt wurde. Der Koeffizient der vollständigen spontanen Emission von g Schallquanten der Frequenzen $\nu_1;\ \nu_2;\ \ldots\ \nu_g$ wird damit

$$A_{is}^{(g)} = \left(\frac{12\pi h}{q^3}\right)^g \nu_1^3 \cdot \nu_2^3 \cdots \nu_g^3 \cdot X_{i,s}.$$

Für nicht zu kleine Temperaturen werden die ϱ_{ν_i} die Größen $\frac{12\pi h \nu_i^3}{q^3}$ überwiegen und ein Vielfachstoß, der g Quanten erzeugt, wird dann, da jedes der ϱ_{ν_i} porportional T ist, insgesamt proportional zu T^g sein.

Dieses Ergebnis stimmt vollkommen mit den quantenmechanischen Rechnungen der Verfasser überein. Allerdings bleiben die Größen X_{is} prinzipiell unbestimmt, während bei den zitierten Rechnungen der Verfasser sich auch für diese Größen ein geschlossener Ausdruck angeben läßt. Auch läßt sich quantenmechanisch der Fall unschwer mitbehandeln, daß mehrere der absorbierten oder emittierten Schallquanten untereinander die gleiche Frequenz haben. Doch ist dies unerheblich, da bei der ungeheuer großen Zahl der möglichen Frequenzen die Häufigkeit von Vielfachstößen mit mehreren Quanten gleicher Frequenz im Vergleich zu den Stößen mit Schallquanten untereinander verschiedener Frequenz vernachlässigbar klein ist.

Berlin, Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung m. b. H.

Über die elektrische Leitfähigkeit der Metalle*).

Von **Ivan Supek** in Leipzig.

(Eingegangen am 23. November 1940.)

In Analogie zur kinetischen Gastheorie wird die für die elektrische Leitfähigkeit maßgebende freie Weglänge der Elektronen berechnet. Daraus ergibt sich die spezifische Leitfähigkeit im ganzen Temperaturbereich, die für die hohen und tiefen Temperaturen mit der Blochschen übereinstimmt. Die Unterschiede der beiden Methoden werden untersucht.

1. Einleitung.

Die Ansätze zur Theorie der Leitfähigkeit haben Drude und Lorentz gemacht, indem sie ihren Betrachtungen die Hypothese des Elektronengases im Metall zugrunde legten. Die für die Leitfähigkeit maßgebende freie Weglänge des Elektrons sollte durch die Stöße mit den Metallionen begrenzt werden; ihre Berechnung blieb aber in dem Rahmen der klassischen Physik unmöglich. Erst der Quantentheorie gelang es, den Begriff der „freien" Elektronen im Metall zu klären und die in der klassischen Theorie auftretende große spezifische Wärme des Elektronengases zu beseitigen. Von verschiedenen Physikern (Brillouin, Frenkel, Houston) wurde mit der Entwicklung der Wellenmechanik gleich erkannt, daß die thermischen Schwingungen des Gitters für das Zustandekommen des elektrischen Widerstandes wesentlich sind. Damit fand das Verschwinden des elektrischen Widerstandes der reinen Metalle beim absoluten Temperaturnullpunkt eine natürliche Erklärung. Auf den neuen Grundlagen, insbesondere auch Sommerfelds Behandlung der elektrischen Eigenschaften der Metalle mit der Termi-Statistik, entwickelte F. Bloch (1928/30) die strenge Theorie der elektrischen Leitfähigkeit[1]). Er behandelte die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und Gitterschwingungen mit Hilfe des Diracschen Störungsverfahrens und stellte für die Verteilung der Elektronen im elektrischen Felde eine Integralgleichung auf, die er unter den speziellen Voraussetzungen für hohe und tiefe Temperaturen angenähert löste. Die Berechnung der Leitfähigkeit bei mittleren Temperaturen stößt auf große mathematische Schwierigkeiten, und der Verlauf der Leitfähigkeit im ganzen Temperaturbereiche läßt sich aus der Integralgleichung schwer erkennen. Ţiţeica[2]) gelangte durch die Betrachtung

*) D 15.

[1]) Die Darstellung der Theorie der Metalle und das Verzeichnis der zu diesem Problemkreis zugehörigen Literatur findet der Leser im Handbuch d. Physik, Bd. 24/2 (Sommerfeld-Bethe) 1933. — [2]) Ann. d. Phys. **22**, 129, 1935.

der Elektronen im magnetischen Felde unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen zu einer Leitfähigkeitsformel für alle Temperaturen, die richtig die Blochschen Grenzfälle ergab.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Näherungsverfahren für alle Temperaturen eingeschlagen, bei dem man von vornherein die Integralgleichung vermeidet. Durch die Einführung anschaulicher Begriffe, wie Stoßzeit und freie Weglänge, läßt sich die Verteilung der Elektronen im elektrischen Felde berechnen, ohne daß man mit der gestörten Verteilungsfunktion selbst zu rechnen braucht. Die schwache Seite des Verfahrens besteht darin, daß man ähnlich wie in der kinetischen Theorie gewisse Faktoren nicht genau angeben kann. Dafür aber erhält man einen recht guten qualitativen Einblick in die physikalischen Verhältnisse, die durch die Integralgleichung allzu summarisch erfaßt werden. Das entwickelte Näherungsverfahren schien auch aus dem Grunde naheliegend, daß die Blochsche Integralgleichung unter sehr einschränkenden Voraussetzungen gewonnen wurde. Bloch betrachtet die Energiefläche $E(\mathfrak{k})$, die die Abhängigkeit der Energie des Elektrons von seiner Wellenzahl $\mathfrak{k}$ ausdrückt, als kugelsymmetrisch. Diese Vereinfachung dürfte aber bei den tiefen Temperaturen zu großen Abweichungen von den wirklichen Leitfähigkeitswerten führen. Unter Verzicht auf die Integralgleichung wird hier die Berücksichtigung der Beschaffenheit der Energiefläche ermöglicht, und diese Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Gestalt der Fläche dürfte von wesentlicher Bedeutung bei den tiefen Temperaturen sein. Bei tiefen Temperaturen wird die Leitfähigkeitstheorie auch durch die von Peierls diskutierte Abweichung der Gitterwellen vom thermischen Gleichgewicht erschwert. Bisher haben sich die zum Gleichgewicht führenden „Umklappprozesse" einer quantitativen Erfassung entzogen, und es läßt sich ihr Einfluß auf den Wert des Widerstandes nur grob abschätzen.

2. Berechnung der freien Weglänge.

Der elektrische Widerstand eines Metalls ist durch diejenige stationäre Verteilung der Elektronen bestimmt, die sich im äußeren elektrischen Felde einstellt. Aus der empirisch bekannten Linearität des elektrischen Stromes mit der elektrischen Feldstärke ergibt sich, daß die Verschiebungen der Elektronenverteilung beim Einschalten des äußeren Feldes nur gering sind. Solange kein äußeres Feld vorhanden ist, sind die Elektronen im Metall auf die Energieniveaus nach der Fermi-Statistik verteilt. Die Verteilungsfunktion $f_0(E)$ der Elektronen, die die Anzahl der Elektronen pro Zustand angibt, ist infolge des Paulischen Ausschließungsprinzips bis zu einem relativ hohen Energiewert $E = \zeta$ praktisch konstant mit dem Wert 1

und zeigt dann einen steilen Abfall nach Null. Jeder Elektronenzustand in einem Band ist charakterisiert durch die Angabe der Wellenzahl $\mathfrak{k}$, Zahl der Wellen je 2π cm. Das Produkt der Wellenzahl mit der Planckschen Konstante $\hbar$ hat die Dimension eines Impulses und stimmt bei den schwach an das Gitter gebundenen Elektronen im wesentlichen mit dem Impuls des Elektrons überein. Die charakteristische Abweichung der Elektronen im Metallgitter vom Verhalten eines freien Gases äußert sich darin, daß die Elektronenzustände periodische Funktionen der Wellenzahl sind. Für ein kubisches Gitter mit der Gitterkonstanten a ist der Periodizitätsbereich für jede Komponente von $\mathfrak{k}$ gleich $2\pi/a$. Diese Periodizität ist die Folge der Invarianz des Systems Elektron—Gitter gegen die Verschiebung des Gitters um die Strecke a. Bei der Berechnung des elektrischen Stromes wird man sich zweckmäßig auf einen einzigen Periodizitätsbereich des $\mathfrak{k}$-Raumes beschränken. Für diesen reduzierten $\mathfrak{k}$-Raum ist:

$$-\frac{\pi}{a} < k_x, k_y, k_z < \frac{\pi}{a}. \tag{1}$$

Wirkt ein elektrisches Feld, so ändert sich die Wellenzahl des Elektrons im Gitter genau so wie die Wellenzahl des freien Elektrons. Es ist:

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{k}}{\mathrm{d}t} = \frac{e\mathfrak{F}}{\hbar}. \tag{2}$$

Die Verteilung der Elektronen im $\mathfrak{k}$-Raume würde sich also kongruent in der Richtung des Feldes verschieben, wenn die Elektronen durch die Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen nicht zurückgedrängt würden. Solange man von der thermischen Bewegung des Gitters absieht, bewegen sich die Elektronen ungehindert durch die periodisch angeordneten Potentialmulden der Gitterionen hindurch. In Wirklichkeit aber schwingt das Gitter, und bei den Zusammenstößen mit den Gitterwellen wird die Wellenzahl des Elektrons in der Richtung des Feldes gestreut. Dadurch wird die freie Laufzeit des Elektrons begrenzt, und diese Begrenzung ist für das Zustandekommen des elektrischen Widerstandes von wesentlicher Bedeutung. Von der Laufzeit τ des Elektrons im Zustande $\mathfrak{k}$ hängt es ab, wie weit sich die Verteilung der Elektronen durch Einwirkung eines elektrischen Feldes im betreffenden Punkte des $\mathfrak{k}$-Raumes verschiebt. Hat das elektrische Feld die x-Richtung, so ist die verschobene Verteilung offensichtlich gegeben durch:

$$f(k_x, k_y, k_z) = f_0(E) - \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}E}\,\frac{\partial E}{\partial k_x}\,\frac{eF\tau(\mathfrak{k})}{\hbar}. \tag{3}$$

Die Energie E soll als Funktion von $\mathfrak{k}$ gegeben sein. Mit der Einführung der freien Weglänge $l = v\tau$ läßt sich die obige Gleichung bequemer schreiben. Da die Geschwindigkeit nach der fundamentalen de Broglieschen Beziehung gleich:

$$v = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \tag{4}$$

so läßt sich die freie Weglänge ausdrücken als

$$l = \frac{1}{\hbar} \operatorname{grad} E \cdot \tau. \tag{5}$$

Für die verschobene Verteilung erhält man:

$$f = f_0 - \frac{\mathrm{d} f_0}{\mathrm{d} E} e F l \cos \Theta_1, \tag{6}$$

Θ_1, Θ_2 und Θ_3 sind die Winkel des grad E mit den k_x-, k_y-, k_z-Achsen. Infolge der besonderen Form der Fermischen Verteilungsfunktion wird die Störung der ursprünglichen Verteilung durch das elektrische Feld nur in der Umgebung der Grenzenergie $E(k_x k_y k_z) = \zeta$ von Belang sein. Die lineare Abhängigkeit des Stromes mit der elektrischen Feldstärke bedeutet, daß die Verschiebung der Verteilung der Elektronen nur gering ist; danach läßt sie sich in der Form (6) schreiben. Diese Darstellung entspricht der Situation, daß nach dem Einschalten der elektrischen Spannung die Elektronenverteilung kongruent in der Richtung des Feldes nachläuft und etwaige Verzerrungen sich erst am Ende der Laufzeit auswirken. Der verschobene Raum ist bei allen praktisch vorkommenden Temperaturen klein gegen das Gesamtvolumen des besetzten $\mathfrak{k}$-Raumes. Es ist zu berücksichtigen, daß es nur auf die freie Weglänge in der Umgebung der Besetzungsgrenze $E = \zeta$ der Elektronen ankommt. Aus der verschobenen Verteilung berechnet sich der elektrische Strom nach der Gleichung:

$$J = 2e \int \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} f(k_x k_y k_z) \frac{\mathrm{d} k_x \mathrm{d} k_y \mathrm{d} k_z}{(2\pi)^3}. \tag{7}$$

Der Faktor 2 kommt vom Spin des Elektrons. Das Volumenelement im $\mathfrak{k}$-Raume läßt sich durch Energieelement und Flächenelement ausdrücken. Es ist

$$\mathrm{d} k_x \mathrm{d} k_y \mathrm{d} k_z = \frac{\mathrm{d} E \cdot \mathrm{d} o}{\operatorname{grad} E} \tag{8}$$

und danach berechnet sich der Strom bei der Beachtung der Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d} f_0}{\mathrm{d} E} \mathrm{d} E = f_0(\infty) - f_0(0) = -1 \tag{9}$$

durch eine Integration über die Grenzenergiefläche:

$$J = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{e^2 F}{\hbar} \int l \cos^2 \Theta_1 \, \mathrm{d} o = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{e^2 F}{\hbar} \overline{l \cos^2 \Theta_1} \cdot o, \tag{10}$$

o ist der Flächeninhalt der Grenzfläche. Beim Vergleich mit der Leitfähigkeitsformel der freien Elektronen kann man $\frac{2}{3(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2} \operatorname{grad} E \, o$ als die Anzahl der „freien" Elektronen definieren. Bei einem vollbesetzten Band ist o = Null, also auch der Strom. Das trifft bei den Isolatoren zu.

Die Hauptaufgabe der Leitfähigkeitstheorie besteht in der Ermittlung der freien Weglänge der Elektronen. Die freie Weglänge wird als diejenige Strecke definiert, nach deren Zurücklegung sich die Richtung des Elektrons völlig geändert hat. Bei der Leitfähigkeit handelt es sich natürlich um die Änderung in der x-Richtung. Bei den Zusammenstößen gleichartiger Partikel ist die freie Weglänge identisch mit der im Mittel zurückgelegten Strecke zwischen zwei Zusammenstößen. Kennt man die Anzahl der Zusammenstöße in der Sekunde, so ist auch die freie Weglänge bekannt. Bei den Zusammenstößen eines Elektrons mit dem Gitter ist die Sachlage wesentlich komplizierter. Hier „stößt" ein Teilchen gegen ein schwingendes System von allen möglichen Frequenzen und Richtungen. Daß es trotzdem einen Sinn gibt, von Zusammenstößen zu reden, liegt darin, daß das Elektron jeweils mit bestimmten Gitterwellen die Energie und die Wellenzahl austauscht. Die Verzerrungen des Gitters lassen sich durch eine Superposition von Eigenschwingungen scharf gegebener Energie $\hbar\omega$ und Wellenzahl $\mathfrak{q}$ darstellen. Die allgemeinste Verrückung $\mathfrak{u}_\mathfrak{n}$ der Gitterpunkte aus der Ruhelage $\mathfrak{n}$ läßt sich durch eine Fourier-Summe über alle Gitterwellenzahlen $\mathfrak{q}$ und Polarisationsrichtungen $\mathfrak{e}_{\mathfrak{q}j}$ darstellen:

$$\mathfrak{u}_\mathfrak{n} = \sum_{\mathfrak{q}} \sum_{j=1}^{3} \mathfrak{e}_{\mathfrak{q}j} \left(A_{\mathfrak{q}j} e^{-i(\omega_{\mathfrak{q}j} t - \mathfrak{q}\mathfrak{n})} + A^*_{\mathfrak{q}j} e^{i(\omega_{\mathfrak{q}j} t - \mathfrak{q}\mathfrak{n})}\right), \tag{11}$$

$A_{\mathfrak{q}j}$ sind die Amplituden der einzelnen Gitterschwingungen. Dabei ist die Wellenzahl bequemlichkeitshalber durch die Periodizitätsforderung für kubische Bereiche der Länge Ga diskret gemacht. Die zulässigen Werte für die Wellenzahl sind dann:

$$q_x, k_x = \frac{2\pi}{Ga} n_x, \quad q_y, k_y = \frac{2\pi}{Ga} n_y, \quad q_z, k_z = \frac{2\pi}{Ga} n_z.$$

Die ganzen Zahlen n_x, n_y und n_z erstrecken sich von $-\frac{1}{2}G$ bis $\frac{1}{2}G$. Die Anzahl der Gitterschwingungen im Volumenelement des $\mathfrak{q}$-Raumes ist gleich

$$3\left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \Omega \, \mathrm{d}q_x \, \mathrm{d}q_y \, \mathrm{d}q_z, \tag{12}$$

Ω ist das Volumen eines Gitteratoms, gleich $1/n$, wenn n die Anzahl der Atome pro cm³ bedeutet. Bei der Berechnung der Leitfähigkeit darf man nicht alle diese Schwingungen zählen, sondern nur diejenigen, durch welche die Bewegung des Elektrons gestört wird. Nun ändert sich bei den transversalen Schwingungen die Dichte des Gitters nicht, also breitet sich die Elektronenwelle ungehindert aus. Man muß also nur die longitudinalen Gitterwellen in Betracht ziehen. Mit diesen einzelnen Gitterschwingungen tritt das Elektron in Wechselwirkung. Wie bei den gewöhnlichen Stößen gelten auch hier die Erhaltungssätze. Die Energie und die Wellenzahl des Gesamtsystems Elektron + Gitter bleiben erhalten. Wird eine Gitter-

welle der Wellenzahl q und der Energie $\hbar\omega$ absorbiert, so übernimmt das Elektron ihre Energie und Wellenzahl. Und umgekehrt bei der Emission einer Gitterwelle. Es gilt immer:

$$\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2 = \pm \mathfrak{q}. \tag{13}$$

Es liegt im Wesen der quantentheoretischen Behandlung der Wechselwirkung, zwischen dem Elektron und dem schwingenden System für das Energieprinzip nicht die entsprechende scharfe Interferenzbedingung zu stellen. Die Genauigkeit der Bestimmung der Energie hängt nämlich von der Zeit T ab, in welcher die Wechselwirkung zwischen dem Elektron und der bestimmten Gitterwellengruppe stattgefunden hat. Dementsprechend führt man eine Funktion $T(E_1 - E_2 \mp \hbar\omega)$ ein, die ein ausgesprochenes Maximum an der Stelle

$$\varepsilon = E(\mathfrak{k}_1) - E(\mathfrak{k}_2) \mp \hbar\omega = 0 \tag{14}$$

besitzt. Für $\varepsilon \neq 0$ soll sie rasch verschwinden. Für diese Funktion fordert man dann, daß das Integral über die Unschärfe der Energie ε

$$\int T(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \hbar. \tag{15}$$

Wenn die Unschärfe der Energie vom Betrag ΔE ist, so finden die Übergänge des Elektrons durch die Wechselwirkung mit den Gitterwellen statt, deren Energie um die Größe ΔE verwaschen ist. Der Mittelwert der Funktion T bei dieser Unschärfe der Energie beträgt dann:

$$T = \frac{\hbar}{\Delta E}. \tag{16}$$

Das ist die Ungenauigkeitsrelation, die die Zeitdauer der Wechselwirkung bei einer Energieverwaschenheit um ΔE angibt. Im Einklang mit dem Diracschen Störungsverfahren sind dann die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge, bei welchen das Elektron vom Zustand $\mathfrak{k}_1$ in den Zustand $\mathfrak{k}_2$ übergeht und ein Gitterquant emittiert oder absorbiert wird, proportional zu $T(E_1 - E_2 \mp \hbar\omega)$. Damit ist ausgedrückt, daß nur solche Übergänge merklich stattfinden, für die das Energieprinzip erfüllt ist. Wenn im folgenden von einem einzelnen Übergang gesprochen wird, so bedeutet das immer einen von den Übergängen, die im verwaschenen Energiegebiet ΔE liegen.

Bei der Berechnung der freien Weglänge für die elektrische Leitfähigkeit kommt es nur darauf an, wie sich die Wellenzahl des Elektrons bei den Zusammenstößen mit den Gitterwellen in der x-Richtung ändert. Es sollen $w(\mathfrak{k} - \mathfrak{q}, N_\mathfrak{q} + 1)$ und $w(\mathfrak{k} + \mathfrak{q}, N_\mathfrak{q} - 1)$ die Anzahl der Zusammenstöße in einer Sekunde bedeuten, bei welchen eine Gitterwelle $\mathfrak{q}$ emittiert bzw. absorbiert wird. Die Wellenzahl des Elektrons ändert sich bei diesen Zusammenstößen pro Sekunde in der x-Richtung um den Betrag

$-q_x w(\mathfrak{k}-\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}+1)$ bzw. $q_x w(\mathfrak{k}+q, N_\mathfrak{q}-1)$. Die gesamte von einem Elektron in der Sekunde abgegebene Wellenzahl $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ in der x-Richtung erhält man durch Summation über alle Gitterwellen:

$$\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t} = \sum_\mathfrak{q} -q_x w(\mathfrak{k}-\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}+1) + q_x w(\mathfrak{k}+\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}-1). \tag{17}$$

Wäre $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ von der Größenordnung der x-Komponente der Wellenzahl des Elektrons, so würde in jeder Sekunde das Elektron seine Wellenzahl in der Richtung des Feldes zerstreuen. Die freie Laufzeit des Elektrons wäre dann gleich einer Sekunde. Allgemein wollen wir für die freie Laufzeit des Elektrons die Beziehung setzen:

$$\tau\left|\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}|k_x|. \tag{18}$$

Die freie Laufzeit des Elektrons ist diejenige Zeit, in welcher die Wellenzahl des Elektrons in der Richtung des Feldes um die Hälfte geändert ist. Um $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ ausrechnen zu können, wird man die Summation durch die Integration ersetzen. Bequem ist es dabei, noch das Vorzeichen von $\mathfrak{q}$ im ersten Summand zu ändern. Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{\tau} = 2\left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \Omega \left|\frac{1}{k_x}\right| \int q_x [w(\mathfrak{k}+\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}+1) + w(\mathfrak{k}+\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}-1)]\,\mathrm{d}q_x\,\mathrm{d}q_y\,\mathrm{d}q_z. \tag{19}$$

Die Stoßzeit τ muß natürlich unabhängig von der speziellen Wahl der Normierung G sein. Die Wahrscheinlichkeiten w enthalten G^{-3} als Faktor. Sie müssen noch einen anderen Faktor enthalten, der dem Pauli-Prinzip Rechnung trägt. Ein Elektron im Zustande $\mathfrak{k}_1$ wird nur dann einen Übergang nach $\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{q}$ erleiden, wenn der Endzustand unbesetzt ist. Es ist danach:

$$\left.\begin{aligned} w(\mathfrak{k}+\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}+1) &= W_e\,(1 - f(E - \hbar\omega)),\\ w(\mathfrak{k}+\mathfrak{q}, N_\mathfrak{q}-1) &= W_a\,(1 - f(E + \hbar\omega)).\end{aligned}\right| \tag{20}$$

W_e, W_a sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Quantenzuständen im $\mathfrak{k}$-Raume unter Emission bzw. Absorption eines Gitterquants. Ohne auf die spezielle Natur der Wechselwirkung zwischen den Elektronen und Gitterwellen einzugehen, läßt sich folgende allgemeine Eigenschaft der Übergangswahrscheinlichkeiten erschließen. Sie müssen die folgende Form haben:

$$W_{e,a} = \frac{2\pi}{\hbar^2} V_{e,a}^2 \cdot T = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{V_{e,a}^2}{\Delta E}. \tag{21}$$

V gibt die Wechselwirkungsenergie zwischen Elektronen und Gitter, die für den betrachteten Übergang verantwortlich ist. Im Falle der freien Elektronen wird $V = 0$, weil dann keine Übergänge vorkommen. V wird also der Bindungsenergie C des Elektrons an das Gitter proportional sein. Je größer die Amplitude A der Gitterschwingungen ist, desto mehr Über-

gänge werden die Elektronen erleiden. Werden gleichzeitig alle Gitterionen um dieselbe Strecke aus der Gleichgewichtslage entfernt, so wird das natürlich keine Störung auf die Bewegung des Elektrons ausüben. Es kommt daher nur auf das Verhältnis der Amplitude zur Wellenlänge an. Eine strenge Rechnung nach der Diracschen Störungstheorie zeigt, daß V^2 die folgende Form hat:

$$V^2 = \frac{4}{9} C^2 q^2 A^2. \tag{22}$$

Das Quadrat der Amplitude bei der Emission bzw. bei der Absorption ist aus der Quantentheorie der harmonischen Schwingungen bekannt und beträgt:

$$A_e^2 = \frac{\hbar}{2 G^3 M \omega} (N_q + 1), \quad A_a^2 = \frac{\hbar}{2 G^3 M \omega} N_q. \tag{23}$$

Für die Verteilungsfunktion der Gitterwellen N_q ist die Plancksche Verteilung einzusetzen. Dabei ist noch erforderlich, daß die Energie $\hbar\omega$ des Gitterquants als die Funktion der Wellenzahl q bekannt ist. Dann ergibt sich für die Stoßwahrscheinlichkeit der Ausdruck:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{16\pi}{9} \left(\frac{G}{2\pi}\right)^3 \Omega \frac{C^2}{\hbar^2 k_x} \int q_x \left[A_e^2 (1 - f(E - \hbar\omega)) + \right.$$
$$\left. + A_a^2 (1 - f(E + \hbar\omega))\right] T q^2 \, \mathrm{d}q_x \, \mathrm{d}q_y \, \mathrm{d}q_z. \tag{24}$$

Der Integrand wird im allgemeinen eine komplizierte Funktion von q, weil E und ω keine einfachen Funktionen der Wellenzahl sind. Nun kann man sich überzeugen, daß bei hohen Temperaturen die Form der Energieflächen $E(\mathfrak{k})$ und $\hbar\omega(\mathfrak{q})$ keine wesentliche Rolle spielt. Unter hohen Temperaturen sind solche zu verstehen, für die die höchsten Frequenzen angeregt sind, also die Bedingung:

$$\hbar\omega_{max} \ll \varkappa T$$

erfüllt ist. $\varkappa$ ist die Boltzmannsche Konstante. Bei den Zusammenstößen mit diesen kurzwelligen Gitterquanten springt das Elektron nach den Punkten $\mathfrak{k}_2$, die weit entfernt vom Ausgangspunkt der Fläche $E(\mathfrak{k})$ liegen. Die Beschaffenheit der Fläche am Ausgangspunkte spielt dabei keine Rolle. In der Gleichung (24) kann man für q_x angenähert k_x setzen, jeder Quantenübergang ist als ein voller Stoß zu rechnen. Die Energiefläche $E = \hbar\omega$, an welcher sich das Elektron nach dem Übergang befindet, liegt so nahe der Fläche $E(\mathfrak{k})$, daß man überhaupt alle Übergänge an derselben Fläche ausgeführt denken kann, soweit man nur über die geometrischen Verhältnisse im $\mathfrak{k}$-Raume Übersicht gewinnen will. Die Absorption und Emission erfolgt bei festem ω in zwei Kegeln, die beinahe zusammenfallen, solange nur $\hbar\omega \ll \operatorname{grad} E \frac{q^2}{2k^2}$ oder $\varkappa T \gg mu^2$, was bei allen praktisch vorkommenden Fällen erfüllt ist. Bei hohen Temperaturen wird man in guter Näherung

die wirkliche Energiefläche $E(\mathfrak{k})$ durch die kugelsymmetrische ersetzen. Die Leitfähigkeit hängt bei diesen Temperaturen nur vom Flächeninhalt o der Energiefläche und vom Mittelwert $(\operatorname{grad} E)^2$ ab. Durch diese Elemente ist die ersetzende kugelsymmetrische Energiefläche festgesetzt. Weiter soll noch die Rechnung vereinfacht werden durch die Einführung der Beziehung:

$$\omega = uq, \tag{25}$$

wo u die Schallgeschwindigkeit ist. Im Integral für die Stoßwahrscheinlichkeit kann man die Integration über T als den stärksten veränderlichen Faktor zunächst ausführen. Bei der Transformation auf Polarkoordinaten mit der Achse in der Richtung der Flächennormale im Punkte $\mathfrak{k}$ wird das Volumenelement:

$$\mathrm{d}q_x\,\mathrm{d}q_y\,\mathrm{d}q_z = q^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{26}$$

Bei festem ω, also auf der Kugel mit dem Radius q läßt sich $q\sin\vartheta$ umformen in $-\,d\,(q\cos\vartheta)$. Und dieses Linienelement ist in der Umgebung der Energiefläche $E(\mathfrak{k})$ gleich:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\operatorname{grad} E}. \tag{27}$$

grad E soll den Betrag von grad E bedeuten. Jetzt kann man sich zunutze machen, daß die Übergänge dicht in der Umgebung der Energiefläche $E = \zeta$ stattfinden, und so über $T(\varepsilon)$ integrieren:

$$\int T(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \hbar. \tag{28}$$

Daraus ergibt sich für die Stoßwahrscheinlichkeit der Ausdruck:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{C^2 G^3 \Omega}{\operatorname{grad} E}\left|\frac{1}{k_x}\int \mathrm{d}q\,q^3\,\bar{q}_x\left[A_e^2\left(1 - f(E - \hbar\omega)\right) + A_a^2\left(1 - f(E + \hbar\omega)\right)\right]\right|, \tag{29}$$

wo $\bar{q}_x$ der Mittelwert über

$$\bar{q}_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_x\,\mathrm{d}\varphi. \tag{30}$$

Für den noch von ϑ abhängigen Faktor im Integral ist der Wert an der Stelle des Maximums von T einzusetzen. Da

$$q_x = q\,(\cos\Theta_1\cos\vartheta + \sin\Theta_1\sin\vartheta\cos\varphi) \tag{31}$$

und $\cos\vartheta$ auf der Kugel gleich

$$-\frac{W}{2k}, \tag{32}$$

so ergibt sich für q_x der Wert:

$$\bar{q}_x = -k_x\frac{q^2}{2k^2}. \tag{33}$$

Durch das Einsetzen dieses Wertes erhält man für die reziproke Stoßzeit:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{4\pi}\frac{C^2 G^3 \Omega}{u^6}\frac{1}{k^2 \operatorname{grad} E}\int_0^{\omega_{max}} \mathrm{d}\omega\,\omega^5\left[A_e^2\left(1 - f(E - \hbar\omega)\right) + \right.$$
$$\left. + A_a^2\left(1 - f(E + \hbar\omega)\right)\right]. \quad (34)$$

Nach den Gleichungen (5) und (23) ergibt sich daraus für die freie Weglänge des Elektrons:

$$l = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\Omega M}{\hbar C^2} k^2 \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right)^2 \left(\frac{\varkappa\Theta}{\hbar}\right)^6 \frac{1}{\int_0^{\omega_{max}} \frac{\mathrm{d}\omega\,\omega^4}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}} - 1\right)\left(1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}}\right)}}. \quad (35)$$

Für l ist der Wert auf der Grenzfläche $E = \zeta$ eingesetzt. Θ ist die Debye-Temperatur ($\varkappa\Theta = \hbar\omega_{max}$), die vermittels der Beziehung

$$\frac{4\pi}{3} q_m^3 = \frac{(2\pi)^3}{\Omega} \quad (36)$$

in die Gleichung (34) eingeführt ist. Die Formel für l ist für alle Temperaturen gültig, solange man die Kugelsymmetrie der Fläche annehmen darf. Aus der bekannten freien Weglänge berechnet sich dann die Leitfähigkeit in üblicher Weise:

$$\sigma = \frac{1}{8\pi^3}\frac{e^2}{\hbar^3}\frac{n M \Omega}{C^2} k \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right)^2 \varkappa\Theta \left(\frac{\Theta}{T}\right)^5 \frac{1}{\int_0^{\Theta/T} \frac{\mathrm{d}x\,x^4}{\left(e^x - 1\right)\left(1 + e^{-x}\right)}} \quad (37)$$

n ist die Anzahl der Elektronen im cm³, gewonnen durch die Integration über alle Zustände in der besetzten Kugel. Bei hohen Temperaturen verschwindet die Leitfähigkeit wie T^{-1}, und zu tiefen steigt sie wie T^{-5} an.

Die bisherigen Ausführungen über die elektrische Leitfähigkeit lassen sich durch eine genauere Definition der freien Weglänge verbessern. Bis jetzt wurde die freie Weglänge durch diejenige Änderung der Wellenzahl bestimmt, die sich an der Grenzenergiefläche ergab. Diese Definition ist natürlich nicht streng richtig, weil das Elektron durch die Stöße mit den Gitterwellen seine Energie dauernd ändert. Bei den hohen Temperaturen sind diese Änderungen der Energie belanglos; anders aber bei tiefen Temperaturen, wo das Elektron bei den Stößen das ganze gelockerte Energiegebiet der Fermischen Verteilung überschreitet, ehe seine Wellenzahl in der Richtung des Feldes gestreut ist. Man muß also an Stelle des Wertes für $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ an der Grenzfläche $E(\mathfrak{k}) = \zeta$ den geeigneten Mittelwert über

die Energie setzen. An Stelle der Gleichung (18) kommt bei dieser genaueren Betrachtung die entsprechende Gleichung:

$$\tau \overline{\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{2} k_x. \tag{38}$$

Bei der Mittelwertbildung der zeitlichen Änderung der Wellenzahl muß man $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ multiplizieren mit der Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Zustand der Energie E angenommen wird. Nach den früheren Ausführungen erhielt man für $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ als Funktion der Energie den Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{(2\pi)^3}{4} \frac{k_x C^2}{\Omega M k^2 \operatorname{grad} E} \left(\frac{\hbar}{\varkappa \Theta}\right)^6 \times$$
$$\times \int_0^{\omega_{max}} \frac{\mathrm{d}\omega\, \omega^4}{e^{\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}} - 1} \left\{ \frac{e^{\frac{E-\zeta}{\varkappa T}}}{e^{\frac{E-\zeta-\hbar\omega}{\varkappa T}} + 1} + \frac{e^{\frac{E-\zeta+\hbar\omega}{\varkappa T}}}{e^{\frac{E-\zeta+\hbar\omega}{\varkappa T}} + 1} \right\}. \tag{39}$$

Beim noch festzulegenden Normierungsfaktor r folgt für den Mittelwert von $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}} = r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t} f_0(\eta)\, \mathrm{d}\eta \qquad \eta = \frac{E-\zeta}{\varkappa T}. \tag{40}$$

Der Integrand ist nur in der Umgebung der Grenzenergie merklich von Null verschieden. Den Normierungsfaktor r wird man natürlich so wählen, daß sich bei hohen Temperaturen für den Mittelwert von $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ der Wert

$$\overline{\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}} = \left(\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}\right)_\zeta \qquad T \gg \Theta \tag{41}$$

ergibt. Das Integral über ω wird bei diesen Temperaturen gleich:

$$-r \frac{\varkappa T}{\hbar 4} \omega_{max}^4 \int 2 \frac{\mathrm{d}f(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\, \mathrm{d}\eta. \tag{42}$$

Für r ist also $\frac{1}{2}$ einzusetzen. Bei der Mittelwertsbildung kommt es auf die Ausrechnung des Doppelintegrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\Theta/T} \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}x \frac{x^4}{e^x - 1} \left\{ \frac{e^\eta}{e^{\eta - x} + 1} + \frac{e^{\eta + x}}{e^{\eta + x} + 1} \right\} \tag{43}$$

an. Die Integration über η läßt sich (nach Bloch) ausführen und es bleibt übrig:

$$2 \int_0^{\Theta/T} \frac{\mathrm{d}x\, x^5}{(e^x - 1)(1 - e^{-x})}. \tag{44}$$

Für die elektrische Leitfähigkeit erhält man an Stelle der Gleichung (36) den verbesserten Ausdruck:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi^3}\,\frac{e^2}{\hbar^3}\,\frac{n\,M\,\Omega}{C^2}\,k\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right)^2 \varkappa\,\Theta\left(\frac{\Theta}{T}\right)^5 \frac{1}{\displaystyle\int_0^{\Theta/T} \frac{\mathrm{d}x\,x^5}{(e^x-1)\,(1-e^{-x})}}. \tag{45}$$

Die so berechnete Leitfähigkeit stimmt mit denjenigen überein, die Bloch für hohe und tiefe Temperaturen berechnet hat. Bloch ging dabei von einer ganz anderen Fragestellung aus, und es ist sehr befriedigend, daß die beiden Verfahren zu denselben Ergebnissen führen. Zur selben Interpolationsformel der Temperaturabhängigkeit ist auch Ţiţeica auf einem völlig verschiedenem Wege gelangt.

3. *Tiefe Temperaturen, Umklappprozesse.*

Die berechnete Leitfähigkeit gilt für alle Temperaturen, soweit nur die Annahme der Kugelsymmetrie der Energiefläche zulässig ist. Nun ist diese Annahme bei tiefen Temperaturen gewiß keine gute Annäherung an die Wirklichkeit, weil der Bau der Energiefläche $E(\mathfrak{k})$ gerade bei diesen Temperaturen eine ausschlaggebende Rolle spielt. Bei den tiefen Temperaturen sind im wesentlichen nur die langen Gitterwellen angeregt, also solche, für welche die Bedingung $q \ll k$ erfüllt ist. Das bedeutet aber, daß die Übergänge des Elektrons in der nächsten Umgebung des Ausgangszustandes stattfinden. Also wird bei der Mittelung die Beschaffenheit der Energiefläche von wesentlicher Bedeutung. Die Gleichung (34), in welcher das Flächenelement von $E(\mathfrak{k})$ durch das Flächenelement der Kugel ersetzt ist, wird bei der allgemeinen Gestalt der Fläche zu falschen Werten für die freie Weglänge führen. Man muß also bei den tiefsten Temperaturen die Gestalt der Energiefläche berücksichtigen.

Bei tiefen Temperaturen läßt sich in der Interferenzbedingung (14) die Energie nach q_x, q_y, q_z entwickeln:

$$\pm\hbar\omega = \operatorname{grad} E\, q \cos\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_x^2}\,q_x^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial k_y^2}\,q_y^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial k_z^2}\,q_z^2 + \right.$$
$$\left. + 2\,\frac{\partial^2 E}{\partial k_x\,\partial k_y}\,q_x\,q_y + 2\,\frac{\partial^2 E}{\partial k_y\,\partial k_z}\,q_y\,q_z + 2\,\frac{\partial^2 E}{\partial k_z\,\partial k_x}\,q_z\,q_x\right). \tag{46}$$

Für die langen Wellen schwingt das Gitter wie ein isotropes Kontinuum. Solange nur $q \ll 1/a$ ist, wird die Dispersionsbeziehung $uq = \omega$ gut erfüllt, wodurch sich die Rechnung sehr vereinfacht. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} q_x &= q\,(\cos\Theta_1\cos\vartheta + \sin\Theta_1\sin\vartheta\cos\varphi),\\ q_y &= q\,(\cos\Theta_2\cos\vartheta + \sin\Theta_2\sin\vartheta\cos\psi),\\ q_z &= q\,(\cos\Theta_3\cos\vartheta + \sin\Theta_3\sin\vartheta\cos\chi). \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

φ, ψ und χ sind drei sphärische Winkel zwischen dem die Richtungsvektoren $\frac{\operatorname{grad} E}{\operatorname{grad} E}$ und $\frac{q}{q}$ verbindenden Bogen und den Bögen $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$, die den Richtungsvektor $\frac{\operatorname{grad} E}{\operatorname{grad} E}$ mit den Einheitsvektoren der k_x k_y k_z-Achse verbinden. Sie bilden zusammen den Winkel von 2π. Die Übergänge finden für lange Wellen fast tangential zur Energiefläche statt. Mit genügender Genauigkeit kann man alle quadratischen Glieder in $\cos\vartheta$ vernachlässigen und für $\sin\vartheta$ den Wert 1 setzen. Dadurch geht die Interferenzbedingung über in:

$$\begin{aligned}\pm\hbar\omega = \{\operatorname{grad} E + q\,[E_{xx}\cos\Theta_1\sin\Theta_1\cos\varphi + \cdots]\}\,q\cos\vartheta + \\ + \{\tfrac{1}{2}E_{xx}\sin^2\Theta_1\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}E_{yy}\sin^2\Theta_2\cos^2\psi + \tfrac{1}{2}E_{zz}\sin^2\Theta_3\cos^2\chi + \\ + E_{xy}\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos\varphi\cos\psi + E_{yz}\sin\Theta_2\sin\Theta_3\cos\psi\cos\chi + \\ + E_{zx}\sin\Theta_3\sin\Theta_1\cos\chi\cos\varphi\}. \qquad (48)\end{aligned}$$

Der Summand neben grad E läßt sich vernachlässigen. Die Winkel ψ und χ sind Funktionen von ϑ. Es läßt sich wieder in dem Integral für $1/\tau$ der stark veränderliche Faktor T über $\mathrm{d}E$ abgesondert integrieren, und es ergeben sich genau die Gleichungen (29) und (30). $\cos\vartheta$ wird hier im allgemeinen eine Funktion von φ, die durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = -\frac{(E_{xx}\sin^2\Theta_1\cos^2\varphi + \cdots + 2\,E_{xy}\sin\Theta_1\cos\Theta_2\cos\varphi\cos\psi + \cdots)\,q}{2\operatorname{grad} E} \qquad (49)$$

bestimmt ist. Der Mittelwert von q_x ergibt sich durch Mittelung des Ausdruckes (41) über φ:

$$\overline{q_x} = q\cos\Theta_1\frac{1}{2\pi}\int\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (50)$$

Der Wert von q_x wird natürlich von dem Werte (33) abweichen. Bei hohen Temperaturen ist $\cos\vartheta$ bei den meisten Übergängen von der Größenordnung 1, hier ist aber $\cos\vartheta$ eine sehr kleine Größe. Bei tiefen Temperaturen ändert sich $\mathfrak{k}$ bei einzelnen Stößen mit den Gitterwellen nur gering. Erst die Summation über eine große Anzahl der Zusammenstöße ergibt merkliche Änderung der Wellenzahl des Elektrons. Bei der Mittelung über φ kommen folgende Integrale vor:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2\pi}\int\cos\varphi\cos\psi\,\mathrm{d}\varphi &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\Theta_1\operatorname{cotg}\Theta_2\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

und zyklisch vertauscht für andere Kombinationen. Mit der Bezeichnung:

$$\varepsilon = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz} - E_{xx}\cos^2\Theta_1 - E_{yy}\cos^2\Theta_2 - E_{zz}\cos^2\Theta_3 - \\ - 2\,E_{xy}\cos\Theta_1\cos\Theta_2 - 2\,E_{yz}\cos\Theta_2\cos\Theta_3 - 2\,E_{zx}\cos\Theta_3\cos\Theta_1 \quad (52)$$

ergibt sich für den Mittelwert von q_x der Ausdruck:

$$\overline{q}_x = -\,q^2\frac{\cos\Theta_1\,\varepsilon}{4\,\mathrm{grad}\,E}. \quad (53)$$

Der Sinn der Änderung der Wellenzahl des Elektrons hängt vom Vorzeichen der Größe $\cos\Theta_1\,\varepsilon$ ab. $\frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{grad}\,E}$ ist eine Invariante der Fläche und gibt im wesentlichen die mittlere Krümmung der Fläche an. An den Stellen, wo die Flächenschar eben verläuft, verschwindet ε. An den Stellen, wo die Fläche nach innen gekrümmt ist, $\varepsilon > 0$, wird sich der absolute Betrag von $\mathfrak{k}$ bei den Stößen vermindern, und umgekehrt wird er sich bei den nach außen gekrümmten Flächenelementen vergrößern. Bei symmetrisch hyperbolisch gekrümmten Flächenelementen verschwindet ε auch. In diesen Fällen wird die freie Weglänge bei dieser Art der Mittelung unendlich. Abgesehen von diesen Flächenstellen ergibt sich für die freie Weglänge des Elektrons:

$$l = \frac{4}{(2\pi)^3}\,\frac{M\,\Omega}{\hbar\,C^2}\left|\frac{k_x\,(\mathrm{grad}\,E)^3}{\cos\Theta_1\,\varepsilon}\right|\left(\frac{\hbar}{\varkappa\,T}\right)^5\frac{1}{\int\limits_0^{\Theta/T}\frac{\mathrm{d}\,x\,x^5}{(e^x-1)\,(1-e^{-x})}}. \quad (54)$$

Diese Gleichung für die freie Weglänge ist für jede Energiefläche gültig, solange $q \ll k$, also bei tiefen Temperaturen. In der Nähe der Debyeschen Temperatur bleibt die Gleichung (54) nur für die kugelähnlichen Flächen richtig. Zusammenfassend kann man sagen: Die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit ist bei hohen und tiefen Temperaturen für alle Energieflächen dieselbe; im mittleren Temperaturbereich hängt sie dagegen vom speziellen Bau der Energiefläche ab.

Bei einer mehrfach zusammenhängenden Fläche existieren mehrere Kurven, für die gilt:

$$\cos\Theta_1\,\varepsilon = 0. \quad (55)$$

Auf diesen Stellen kann die freie Weglänge nach der Formel (54) unendlich groß werden, was bedeutet, daß die einfache Mittelwertbildung für die Definition der freien Weglänge versagt. Diese Stellen sind bei der Berechnung der Leitfähigkeit geeignet abzuschneiden. Zur Gleichung ist noch hinzuzufügen, daß k_x immer vom nächsten Symmetriezentrum der Fläche zu rechnen ist.

Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen von der Gestalt der Energiefläche ist in den Gleichungen (10) und (46) enthalten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{\hbar}\,\overline{l\cos^2\Theta_1}\,o, \\ l &= \frac{4}{(2\pi)^3 J}\,\frac{M\Omega}{C^2\hbar^2}\left|\frac{\overline{k_x\,(\mathrm{grad}\,E)^3}}{\cos\Theta_1\,\varepsilon}\right|\varkappa\,\Theta\left(\frac{\Theta}{T}\right)^5, \\ J &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x\,x^5}{(e^x-1)\,(1-e^{-x})}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Diese Gleichungen kann man mit denen vergleichen, die für die kugelsymmetrische Fläche gewonnen sind, indem man die Fläche $E(\mathfrak{k})$ durch eine kugelsymmetrische mit gleich großer Oberfläche und mittlerem $(\mathrm{grad}\,E)^2$ ersetzt. Bei tiefen Temperaturen erhält man für das Verhältnis der Leitfähigkeiten der wirklich vorkommenden Fläche zur kugelsymmetrischen den Ausdruck:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{kug.sym.}} = 6\,\frac{\overline{\left|\frac{k_x\cos\Theta_1\,(\mathrm{grad}\,E)^3}{\varepsilon}\right|}}{k^2\,\overline{\mathrm{grad}\,E^2}} \approx 4\sqrt{\pi}\,\frac{\overline{\mathrm{grad}\,E}}{\sqrt{o\,|\varepsilon|}}. \tag{57}$$

Dieses Verhältnis wird bei nicht allzu willkürlichen Flächen von der Größenordnung 1 sein. Weist die Fläche starke Krümmungen auf, so wird das Verhältnis kleiner als 1. Je flacher oder hyperbolisch symmetrischer die Energiefläche verläuft, desto größer wird die Leitfähigkeit. Man kann diese Verhältnisse am einfachsten übersehen, indem man die einzelnen Energieflächen herausgreift, die für bestimmte Kristallsymmetrien typisch sind. Für das einfache kubische Gitter kann man in erster Näherung für die Energie einsetzen:

$$E = -A\,(\cos ak_x + \cos ak_y + \cos ak_z). \tag{58}$$

Für das raumzentrierte Gitter ist typisch:

$$E = -A\cos\tfrac{1}{2}ak_x\cos\tfrac{1}{2}ak_y\cos\tfrac{1}{2}ak_z. \tag{59}$$

Und bei der kubisch-flächenzentrierten Struktur des Gitters:

$$E = -A\,(\cos\tfrac{1}{2}ak_x\cos\tfrac{1}{2}ak_y + \cos\tfrac{1}{2}ak_y\cos\tfrac{1}{2}ak_z + \cos\tfrac{1}{2}ak_z\cos\tfrac{1}{2}ak_x). \tag{60}$$

Bei schwacher Besetzung des Energiebandes verlaufen alle diese Energieflächen kugelähnlich und können mit der Formel (45) für die Leitfähigkeit erfaßt werden. Die zweite Fläche zerfällt selbst im reduzierten $\mathfrak{k}$-Raum in einzelne Flächenzweige, und zwar sind das die kugelähnlichen Flächen um $k_x = k_y = k_z = 0$, $k_x = 0$, $k_y = k_z = 2\pi/a$ .... Die Berechnung des ε für die erste Fläche ergibt:

$$\varepsilon = a^2\left(-E - A\,\frac{\cos ak_x\sin^2 ak_x + \cos ak_y\sin^2 ak_y + \cos ak_z\sin^2 ak_z}{\sin^2 ak_x + \sin^2 ak_y + \sin^2 ak_z}\right). \tag{61}$$

Das Energieband dieser Fläche erstreckt sich von $-3A$ bis $+3A$. Für die Energieflächen $E < -A$ ist ε beständig positiv, für die Energieflächen $E > +A$ beständig negativ. Für diese beiden Fälle ist die Energiefläche unzusammenhängend, zerfällt im $\mathfrak{k}$-Raume in einzelne Zweige. Im Zwischengebiet $-A < E < A$ wird auf jeder Energiefläche ε öfters das Vorzeichen ändern. Die Leitfähigkeit wird bei gewissen Flächen vergrößert, bei den anderen verkleinert gegen den kugelsymmetrischen Fall. Die Leitfähigkeit wird sehr groß bei der Energiefläche $E = -A$, und zwar deswegen, weil diese Fläche sehr eben verläuft. Dasselbe Sachverhältnis wird noch krasser bei der zweiten Fläche (59) in der Nähe des Energiewertes $E = 0$. Für $E = 0$ selbst ist die Grenzfläche in Ebenen zerfallen, und die Leitfähigkeit wird unendlich. Die dritte Fläche (60) verläuft bei nicht allzu großen Energiewerten kugelähnlicher, und die Leitfähigkeit wird nicht in dem Maße verändert.

Die bisherigen Rechnungen beruhten auf der Annahme, daß sich das Gitter im elektrischen Felde im thermischen Gleichgewicht befindet. Peierls konnte aber zeigen, daß das Gitter bei tiefen Temperaturen gar nicht mehr imstande ist, die aufgenommene Wellenzahl bei Stößen mit den Elektronen rasch genug zu streuen. Die Fähigkeit des Gitters, eine aufgenommene Wellenzahl durch die Gitterstöße untereinander zu vernichten, nimmt schnell exponentiell mit der sinkenden Temperatur ab. Der elektrische Widerstand müßte also bei tiefen Temperaturen exponentiell verschwinden, was im Widerspruche zur Erfahrung steht. Nun wies Peierls darauf hin, daß dadurch, daß die Energiefläche mehrfach zusammenhängend ist, stationäre Zustände möglich sind, für die sich das T^5-Gesetz ergibt. Die Berechnung des stationären Zustandes mit Hilfe der aufgestellten Integralgleichungen erscheint noch hoffnungsloser als bei Bloch, da die Stationäritätsbedingung für die Elektronen mit der Stationäritätserfüllung für die Gitterwellen verknüpft ist. Man kann aber grob abschätzen, zu welcher weiteren Begrenzung der freien Weglänge bei den mehrfach zusammenhängenden Energieflächen der Umstand führt, daß im stationären Fall bei allen Stößen des Gitters mit den Elektronen keine Gitterwellen im Mittel entstehen oder verschwinden können. Bequemlichkeitshalber wird man sich im folgenden nur auf einen Oktanden des reduzierten $\mathfrak{k}$-Raumes beschränken, da auch für diesen allein bei Vorhandensein des elektrischen Feldes die Stationäritätsbedingung für die Gitterwellen erfüllt sein soll.

Eine mehrfach zusammenhängende Fläche wird durch das äußere elektrische Feld im $\mathfrak{k}$-Raume kongruent verschoben. Es gibt zwei Möglichkeiten, daß die Elektronen die Ausgangskonfiguration erhalten: 1. Sie können alle entgegen der Richtung des Feldes zurückgedrängt werden,

2. es können gewisse Elektronen nach links, gewisse nach rechts verschoben werden. Bei der ersten Möglichkeit werden die Gitterwellen in der Richtung des Feldes angeregt, und es ergibt sich, wie Peierls gezeigt hat, ein Exponentialgesetz des Widerstandes bei tiefen Temperaturen. Die erste Möglichkeit wird bei unzusammenhängenden Flächen verwirklicht. Nur bei den mehrfach zusammenhängenden Flächen tritt der zweite Fall ein. Durch das elektrische Feld wird den Elektronen dauernd die Wellenzahl in der Richtung des Feldes zugeführt, und bei den Zusammenstößen mit dem Gitter werden bei zusammenhängenden Energieflächen $E(\mathfrak{k})$ gewisse Elektronen nach links, gewisse nach rechts befördert. Bei der Erhaltung des gesamten im $\mathfrak{k}$-Raume durch das äußere Feld induzierten $+k_x$-Stromes ist bei zusammenhängenden Flächen ein stationärer Zustand möglich. An dieser Stelle ist der Umstand ausschlaggebend, daß die physikalischen Größen periodische Funktionen in $\mathfrak{k}$ sind. Ohne die Wellenzahl im Mittel aufzunehmen, ermöglicht das Gitter die Erhaltung der Ausgangskonfiguration, indem es die Verschiebungen der Elektronen im $\mathfrak{k}$-Raume ändert. Im betrachteten Oktanden des reziproken Raumes läßt sich die Energiefläche in zwei Gebiete teilen je nach dem Vorzeichen von ε. Wo $\varepsilon > 0$, bewegen sich die Elektronen nach links, und für $\varepsilon < 0$ nach rechts. Die Kurven $\varepsilon = 0$ begrenzen die einzelnen Gebiete, und längs dieser Kurven werden sich die einzelnen Strömungsrichtungen der Elektronen entweder entzweien oder gegenseitig aufheben. Bei besonders symmetrischer Fläche (58), $\cos ak_x + \cos ak_y + \cos ak_z = 0$ sind diese Kurven drei sich in einem Punkte schneidende gerade Linien. Längs der einen heben sich die Strömungen auf, durch zwei andere Geraden sind die Gebiete begrenzt, wo die Elektronen aus dem Oktand hinaus nach links bzw. nach rechts ausströmen. Im elektrischen Felde müssen ja gerade die Elektronen in diesen Richtungen durch Gitterstöße befördert werden. Die Verteilung der Gitterwellen im verschwindend kleinen elektrischen Felde wird sich so einstellen, daß diese zwei Strömungen entgegengesetzt gleich werden. Dann bleibt das Gitter im Gleichgewicht.

Zur Abschätzung dieser Leitfähigkeit gelangt man, indem man die früher berechnete mittlere Laufzeit $\bar{\tau}$ der Elektronen durch einen Faktor vergrößert, der dem Umstande gerecht ist, daß die Wellenzahl nur dann als „vernichtet" anzusehen ist, wenn bis auf Vorzeichen gleich große Änderungen der Wellenzahl in Gebieten $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$ stattgefunden haben. Die gesamte von einem Gebiete ($\varepsilon > 0$) oder ($\varepsilon < 0$) abgegebene Wellenzahl ist proportional den flächenabhängigen Gliedern:

$$K_x \approx \int \frac{\mathrm{d}\,o}{\operatorname{grad} E} \frac{\cos \Theta_1\, \varepsilon}{(\operatorname{grad} E)^2}. \tag{62}$$

Ist K_x in beiden Gebieten bis auf Vorzeichen gleich, so können alle Stöße mit dem Gitter stattfinden, ohne den Gitterwellen eine Wellenzahl im Mittel zu erteilen. In diesem Falle ist die Leitfähigkeit unverändert gegenüber der früher gerechneten. Im allgemeinen wird:

$$|K_x^{(1)}| > |K_x^{(2)}|, \tag{63}$$

wo sich Indizes 1 und 2 auf die betrachteten Gebiete beziehen. Dann kann aber nur ein Bruchteil der Stöße stattfinden, ohne das Gitter zu stören. Die Leitfähigkeit wird in dem Maße vergrößert, und abschätzungsweise ist die früher berechnete Leitfähigkeit vergrößert um den Faktor:

$$-\frac{\int_1 \mathrm{d}o_1 \frac{\cos\Theta_1\,\varepsilon}{(\mathrm{grad}\,E)^3}}{\int_2 \mathrm{d}o_2 \frac{\cos\Theta_1\,\varepsilon}{(\mathrm{grad}\,E)^3}}. \tag{64}$$

Die Vergrößerung der Leitfähigkeit hängt nur von der Geometrie der Fläche, die Temperaturabhängigkeit bleibt demnach dieselbe. Bei halb besetztem Energieband und bei nicht allzu willkürlichen Flächen wird dieser Faktor angenähert 1. Trotz ihrer großen prinzipiellen Bedeutung wird der Wert der Leitfähigkeit in den normalen Fällen durch die Peierlsschen Umklappprozesse nicht wesentlich beeinflußt.

4. Vergleich mit der Blochschen Theorie.

Die Möglichkeit der Einführung einer anschaulichen freien Weglänge beruht auf der Annahme, daß sich die verschobene Verteilung der Elektronen im elektrischen Felde in der Form:

$$f = f_0 - \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}E}\psi(\mathfrak{k}) \tag{65}$$

darstellen läßt, wo $\psi(\mathfrak{k})$ klein und proportional der elektrischen Feldstärke ist. Aus dem besonderen Charakter der Fermischen Verteilung ging noch besonders hervor, daß für $\psi(\mathfrak{k})$ die Werte in der Umgebung der Grenzfläche allein in Frage kommen. Diese Annahmen dürften allgemein genug sein, um die Einführung der freien Weglänge zu rechtfertigen. Die Ungewißheit kommt durch die Definition der freien Weglänge, die durch die Beziehung $\tau\left|\frac{\mathrm{d}k_x}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}|k_x|$ gegeben wurde und dadurch, daß man $l(E)$ durch $l(\zeta)$ ersetzt. An Stelle $\frac{1}{2}$ konnte ebensogut ein anderer Faktor von der Größenordnung 1 stehen. Darum ist es angebracht zu untersuchen, ob die berechnete Verteilung im elektrischen Felde überhaupt stationär ist.

Eine gegebene Elektronenverteilung wird sich im elektrischen Felde in der Richtung der Feldstärke verschieben, und diese Verschiebung wird

durch die Gitterstöße rückgängig gemacht. Die Gitterstöße gewährleisten einen Gleichgewichtszustand, so daß die Änderung der Elektronenverteilung:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{el.\ Feld} + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{Gitt.\ Stöße} = 0 \tag{66}$$

wird. Für die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion durch das elektrische Feld kann man mit genügender Genauigkeit ansetzen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}E}\frac{\partial E}{\partial k_x}\frac{eF}{\hbar}. \tag{67}$$

Die Besetzung des Zustandes $\mathfrak{k}$ kann sich durch Wechselwirkung des Elektrons mit einer Gitterwelle $\mathfrak{q}$ auf vier verschiedene Weisen ändern: 1. Das Elektron kann ein Gitterquant emittieren und in den Zustand $\mathfrak{k} - \mathfrak{q}$ übergehen, 2. das Elektron kann ein Gitterquant absorbieren und in den Zustand $\mathfrak{k} + \mathfrak{q}$ übergehen, 3. das Elektron im Zustand $\mathfrak{k} + \mathfrak{q}$ kann ein $\mathfrak{q}$ emittieren und die Wellenzahl $\mathfrak{k}$ annehmen, 4. das Elektron im Zustande $\mathfrak{k} - \mathfrak{q}$ kann ein $\mathfrak{q}$ absorbieren und in den Zustand $\mathfrak{k}$ übergehen. Die beiden ersten Übergänge rechnen negativ, die beiden letzten positiv. Die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion durch Stöße ist also gleich:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{\mathfrak{q}} -W_e(\mathfrak{k},\mathfrak{k}-\mathfrak{q})\,f(\mathfrak{k})\,(1-f(\mathfrak{k}-\mathfrak{q})) - W_a(\mathfrak{k},\mathfrak{k}+\mathfrak{q})\,f(\mathfrak{k})\,(1-f(\mathfrak{k}+\mathfrak{q})) +$$
$$+ W_e(\mathfrak{k}+\mathfrak{q},\mathfrak{k})\,f(\mathfrak{k}+\mathfrak{q})\,(1-f(\mathfrak{k})) + W_a(\mathfrak{k}+\mathfrak{q},\mathfrak{k})\,f(\mathfrak{k}-\mathfrak{q})\,(1-f(\mathfrak{k})). \tag{68}$$

Aus der Stationäritätsbedingung (66) läßt sich prinzipiell die Störung der Fermischen Verteilung berechnen. Doch ist die Berechnung von $\psi(\mathfrak{k})$ aus (65) in allgemeinen Fällen mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden.

Bloch hat nun gezeigt, daß man für die kugelsymmetrischen Energieflächen die gestörte Funktion bei hohen und tiefen Temperaturen berechnen kann. Geht man in die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion durch Gitterstöße mit dem Ansatz

$$f = f_0 - \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}E}\,c(E)\,k_x \tag{69}$$

und berücksichtigt dabei auch die Änderungen von $c(E)$, so ergibt sich nach Integration über die Polarwinkel die Integralgleichung:

$$\int_0^{q_{max}} \mathrm{d}q\,q^2 N(q)\left\{\frac{f_0(E+\hbar\omega)}{f_0(E)}\,e^{\hbar\omega/\varkappa T}\left[\left(1-\frac{q^2}{2k^2}\right)c(E+\hbar\omega) - c(E)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{f_0(E-\hbar\omega)}{f_0(E)}\left[\left(1-\frac{q^2}{2k^2}\right)c(E-\hbar\omega) - c(E)\right]\right\} = -\frac{3\pi M u e F}{\hbar c^2 \Omega k}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right)^2. \tag{70}$$

Setzt man in dieser Integralgleichung $c(E) =$ konstant, so ergibt sich daraus die verschobene Verteilung, die der freien Weglänge nach der Gleichung (35) entspricht. Diese angenäherte Lösung $c =$ konstant der Integralgleichung

entspricht also derjenigen Berechnung der freien Weglänge, bei der die Mittelung über die zeitliche Änderung der Wellenzahl unterlassen wurde. Die strenge Lösung erhält man durch Lösung der Integralgleichung. Nun sieht man, daß bei den hohen Temperaturen alle Faktoren in der Integralgleichung nicht mehr stark von der Energie abhängen. Danach löst $c(E) =$ konstant recht gut die Integralgleichung. Anders bei tiefen Temperaturen. Dann werden die Faktoren stark von der Energie abhängig. Nun hat Bloch gezeigt, daß man bei tiefen Temperaturen $T \ll \Theta$ unter der Berücksichtigung der Kleinheit von q^2/k^2 zu einer guten Näherung gelangen kann. Die Leitfähigkeitsformel, die Bloch auf diese Weise bekommt, stimmt mit der früher berechneten nach Mittelung über $\mathrm{d}k_x/\mathrm{d}t$ überein. Wenn man auch auf Grund der Integralgleichung schwer etwas über den Verlauf der Leitfähigkeit im mittleren Temperaturbereich aussagen kann, so geht aus den früheren Betrachtungen über die freie Weglänge hervor, daß die Gleichung (45) eine gute Näherung für alle Temperaturen sein muß. In diesem Sinne ergänzt die Methode mit der freien Weglänge das Blochsche Verfahren.

Der Erfolg der Blochschen Theorie bestand darin, daß sie sehr gute Übereinstimmung des Verhältnisses der Leitfähigkeit für hohe Temperaturen zu der bei tiefer Temperatur mit der Erfahrung erzielte. Bei diesem Verhältnis fallen alle in der Theorie nicht genau bestimmten Faktoren fort, und es ergibt sich nach Bloch der Wert:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_T} = 5 \cdot 10^2 \left(\frac{T_T}{\Theta}\right)^4 \frac{T_T}{T_H}. \tag{78}$$

Die gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten an Gold und Kupfer sollte also für die Blochsche Näherung sprechen. Nach den früheren Überlegungen kann aber dieses Verhältnis gar nicht in dieser allgemeinen Form bestehen, sondern es muß von den einzelnen Metallen abhängen. Für diese Abhängigkeit erhält man angenähert:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_T} = \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_T}\right)_{kug.sym.} \cdot \frac{\sqrt{\varrho\,|\varepsilon|}}{4\sqrt{\pi}\,\overline{\mathrm{grad}\,E}}. \tag{74}$$

Dieses Verhältnis weicht von dem kugelsymmetrischen um einen Faktor ab, der von der speziellen Beschaffenheit der Energiefläche abhängt und sehr verschiedene Werte annehmen kann. Es ist zu erwarten, daß ein umfangreiches empirisches Material über die Leitfähigkeiten einen Einblick in die Struktur der Energieflächen bieten wird.

Herrn Prof. Dr. F. Hund bin ich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit zum größten Dank verpflichtet.

Über eine Methode zur Beobachtung sehr kleiner Stark-Effekte *).

Von **Ludolf Jenckel** (z. Z. im Felde) und **Hans Kopfermann** aus Kiel.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1940.)

Es wird eine Methode angegeben, die es erlaubt, Stark-Effekt-Verschiebungen von wenigen Tausendstel Angström bei Resonanzlinien zu messen. Der Effekt wird dabei in Absorption mit Hilfe eines Fabry-Perot-Etalons beobachtet. Als „Kontinuum" dient die gleiche Linie in Emission, deren inverser Stark-Effekt untersucht werden soll. Die absorbierende Schicht ist ein Atomstrahl, dessen Teilchen zur weitgehenden Ausschaltung des Doppler-Effektes senkrecht durch das Primärlichtbündel und das elektrische Feld hindurchlaufen. Es lassen sich wegen der geringen Dichte im Atomstrahl Felder bis 300000 Volt/cm ohne große Schwierigkeiten halten. Als Versuchsobjekt wurde die Ca I-Linie $\lambda = 4227$ Å ($^1S_0 - {}^1P_1$) benutzt, die erst bei Feldstärken von etwa 200 kV/cm eine meßbare Rotverschiebung zeigt. Die Feldstärke, die zur Entfaltung des Effektes benötigt wird, ist wesentlich höher, als man theoretisch erwarten sollte.

1. Problemstellung.

Zur Beobachtung der Verschiebungen bzw. Aufspaltungen der Stark-Effekt-Komponenten wurden bisher drei Methoden verwendet:

a) die *Kanalstrahlmethode*, die vor allem von Stark und seinen Mitarbeitern benutzt wurde[1]),

b) die nach Lo-Surdo benannte Methode[2]), und schließlich

c) die von Ladenburg zuerst erprobte *Absorptionsmethode* [Untersuchung des inversen Stark-Effektes][3]).

Solange es sich um lineare oder solche quadratischen Stark-Effekte handelt, bei denen relativ große Aufspaltungen beobachtet werden, sind die beiden ersten Untersuchungsmethoden mit gutem Erfolg verwendbar. Hier genügen große lichtstarke Prismenapparate, um die Erscheinungen bei erträglichen Belichtungszeiten voll aufgelöst photographieren zu können. Beim quadratischen Stark-Effekt der Resonanzlinien, etwa der *D*-Linien des Natriums jedoch, deren Komponenten Verschiebungen von größenordnungsmäßig 0,01 Å bei einem Feld von 100 kV/cm zeigen, wird es notwendig, hochauflösende Spektralapparate zu verwenden. Dann reicht aber die Intensität des Kanalstrahlleuchtens bzw. der Lo-Surdo-Röhre nur schwerlich aus, um in gangbaren Zeiten genügende Belichtung der photographischen Platte zu erhalten. Die Absorptionsmethode liefert für

*) D 11.

[1]) J. Stark, Abh. d. Berliner Akad. **47**, 932, 1913. — [2]) A. Lo-Surdo, Rend. Acad. d. Lin. **22**, 665, 1913. — [3]) R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **28**, 51, 1924.

solche Versuchsobjekte zwar genügende Intensität; man hat es ja in der Hand, die Primärlichtquelle fast zu beliebiger Leuchtstärke zu steigern. Jedoch werden die Absorptionslinien infolge des Doppler-Effektes recht breit, so daß die Linienbreiten der Stark-Effekt-Komponenten von der Größenordnung der maximal erreichbaren Verschiebungen sind. Die so beobachteten Effekte zeigen daher keine saubere Komponentenzerlegung. Das gilt z. B. für die *D*-Linienuntersuchungen Ladenburgs (l. c.), bei denen π- und σ-Komponenten nur schlecht, die Hyperfeinstrukturkomponenten überhaupt nicht aufgelöst werden konnten. Bei den Stark-Effekt-Aufnahmen des zweiten Gliedes der Absorptionsserie des Kaliums[1]), dessen Verschiebungen erheblich größer sind, wurden mit dieser Methode zwar π- und σ-Komponenten gut zerlegt, von Hyperfeinstruktur war jedoch nichts zu beobachten. Die bisherigen Aussagen über Zahl und Polarisation der Komponenten von *Resonanzlinien* im elektrischen Felde sowie über ihre Verschiebungen und Abstände müssen deshalb teils unvollkommen, teils nur qualitativer Art sein; noch kleinere als die oben genannten Effekte dürften der Beobachtung sogar völlig entgehen. Das ist wohl vor allem der Grund dafür, daß solche Untersuchungen, die speziell der Astrophysik sehr dienlich wären, bisher in so geringem Maße ausgeführt worden sind. Da auch die Theorie des quadratischen Stark-Effektes noch keineswegs so weit durchgebildet ist, wie es zur Vorhersage von Einzelfällen wünschenswert wäre, so erscheint es wichtig, eine Methode auszuarbeiten, die es erlaubt, gerade *kleine* Stark-Effekte exakt beobachten zu können.

Im folgenden wird eine Arbeitsweise beschrieben, die in der Lage ist, bei Absorptionslinien erheblich geringere Verschiebungen der Stark-Effekt-Komponenten zu messen, als es bisher möglich war.

II. Versuchsanordnung.

a) Das Prinzip der Methode. Die Versuchsanordnung ist diejenige der Absorptionsmethode. Eine Primärlichtquelle liefert die Resonanzlinie in Emission, deren inverser Stark-Effekt untersucht werden soll. Ihr Licht durchsetzt einen als Absorptionsschicht dienenden, zum Strahlengang senkrechten Atomstrahl. Durch die praktisch senkrecht zum Lichtweg fliegenden Atome wird nur in einem sehr engen Frequenzbereich um die Mitte der Linie herum Absorption stattfinden, so daß die Absorptionslinie äußerst schmal wird. Man hat es durch Wahl des Öffnungswinkels und der Dichte des Atomstrahles in der Hand, Absorptionslinienbreiten zu erzeugen, die einer Doppler-Breite bei wenigen Grad Kelvin entsprechen. Nach

[1]) W. Grotrian u. G. Ramsauer, Phys. ZS. **28**, 846, 1927.

Durchlaufen des Atomstrahles fällt das Primärlicht auf den Spalt eines Spektralapparates, bei dem zwischen Kollimator und Prismen ein Fabry-Perot-Etalon steht. Sorgt man durch geeignete Wahl des Etalonabstandes und der Entladungsbedingungen in der Primärlichtquelle dafür, daß die Emissionslinie eine Breite hat, die das Dispersionsgebiet annähernd ausfüllt, so hat man in ihr ein sehr intensives „Kontinuum", aus dem der Atomstrahl eine etwa zehnmal schmälere Linie herausabsorbiert. Läuft der Atomstrahl da, wo er das Lichtbündel durchsetzt, gleichzeitig in einem starken homogenen elektrischen Feld, das senkrecht auf Atomstrahl- und Lichtstrahlrichtung steht, so kann man, da die geringe Dichte der absorbierenden Atome im

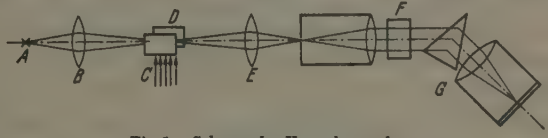


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung.
A = Primärlichtquelle, B, E = Achromat, C = Atomstrahl, D = Kondensatorplatten, F = Fabry-Perot, G = Prismenapparat.

elektrischen Feld das Anlegen beträchtlicher Feldstärken erlaubt, eine Verschiebung bzw. Aufspaltung der Absorptionslinie bei hohen Feldern und extrem hoher Auflösung beobachten. Ist die Primärlinie intensiv, was sich ohne Schwierigkeiten erreichen läßt, so werden trotz höchsten Auflösungsvermögens erheblich kürzere Belichtungszeiten benötigt, als etwa bei der Kanalstrahl- oder Lo-Surdo-Methode. Ein Schema der Versuchsanordnung ist in Fig. 1 gezeichnet.

b) Die Primärlichtquelle. An die Primärlichtquelle werden drei Anforderungen gestellt: 1. große Intensität, 2. mäßige Linienbreite und 3. völlige Freiheit von Selbstumkehr, Forderungen, die sich bis zu einem gewissen Grade widersprechen und daher nur bedingt erfüllt werden können. Forderungen 1 und 3 sind selbstverständlich, wenn auch nicht ganz leicht zu befriedigen, da mit steigender Intensität der Resonanzlinie die Tendenz zur Selbstumkehr immer stärker wird. Forderung 2 ist notwendig, um möglichst große Etalonabstände benutzen zu können, da verlangt wird, daß Komponenten, deren Abstände wenige Tausendstel Å betragen, noch getrennt zu beobachten sind. Dazu bedarf es eines Auflösungsvermögens von $\sim 10^6$, was sich bei guter Etalonverspiegelung nur mit Plattenabständen von mehr als 30 mm[1]) erreichen läßt.

[1]) Das entspricht einem Dispersionsgebiet von $\Delta\nu \leqq 0{,}17\ \mathrm{cm}^{-1}$ und für $\lambda = 4227$ Å einem $\Delta\lambda \leqq 0{,}03$ Å.

Für die D-Linien des Natriums z. B. liefern die technischen Osramlampen Linienformen, welche die angegebenen Bedingungen einigermaßen erfüllen: Die Selbstumkehrfreiheit ist vollkommen, die Intensität genügend, die Linienbreite jedoch recht groß. Für andere Substanzen muß man selbstgebaute Lichtquellen benutzen. Für die nachfolgend beschriebenen Versuche, bei denen die Ca I-Resonanzlinie als Probeobjekt benutzt wurde, bewährte sich eine wassergekühlte Schüler-Hohlkathode. Eine solche Anordnung, mit Zirkulation und Gasreinigung für das Füllgas versehen, wurde in der üblichen Form aufgestellt und so verwendet, daß das Trägergas im Gegensatz zur normalen Strömungsweise von der Anode zur Kathode und durch dieselbe geführt wurde, um stärkeres Herausdiffundieren der Metallgasatome aus dem kathodischen Leuchtraum und damit merkliche Selbstumkehr zu vermeiden. Die Wand der eigentlichen Hohlkathode war mit metallischem Calcium ausgekleidet; als Trägergas diente Neon, bei dessen Benutzung die Resonanzlinie des Ca I, $\lambda = 4227$ Å ($^1S_0 - {}^1P_1$), in wenigen Minuten durch ein gut verspiegeltes Etalon lichtstark photographiert werden konnte. Bei niedrigen Neondrucken (etwa 0,1 mm Hg) war schon bei Stromstärken von 50 mA sehr deutliche Selbstumkehr zu beobachten, die stark zurückging, wenn der Trägergasdruck über 1 mm Hg erhöht wurde.

Die untersuchte Linie ist unter allen bekannten Spektrallinien deswegen besonders empfindlich auf Selbstumkehr, weil sie eine extrem große Oszillatorenstärke f besitzt. Nach Rechnungen von Hartree[1]) beträgt bei ihr $f = 2{,}25$. Sie wurde aber gerade gewählt, weil infolge dieses abnorm großen Wertes — die üblichen f-Werte liegen bei $f \sim 0{,}5$ — mit einer besonders starken Absorption bei geringster Teilchenzahl im Atomstrahl gerechnet werden konnte. Außerdem hat sie für die hier genannten Zwecke den Vorzug, keine Hyperfeinstruktur zu besitzen, da das Ca 40, das gegenüber den anderen Ca-Isotopen praktisch 100%ig vertreten ist, kein magnetisches Kernmoment besitzt

Fig. 2 zeigt Vergrößerungen zweier Aufnahmen der Primärlinie bei 60 mA und 0,25 mm bzw. 40 mA und 1,2 mm Füllgasdruck, aus denen hervorgeht, daß in der Tat höherer Füllgasdruck und niedrigerer Strom die Selbstumkehr weitgehend hintanhalten. Mit Abnahme des Stromes in der Lampe geht die Selbstumkehr, aber bis zu einem entsprechenden Grade auch die Intensität, und in erheblichem Maße die Breite der Linie zurück. Es läßt sich durch Einregulieren von Druck und Stromstärke erreichen, daß die Primärlinie etwa die Breite eines Dispersionsgebietes

[1]) D. Hartree u. W. Hartree, Proc. Roy. Soc. London (A) **164**, 190, 1937.

bei 50 mm Etalon besitzt (0,1 cm^{-1}) und, ohne merkliche Selbstumkehr zu zeigen, sehr intensiv ist[1]). Zum ersten Einjustieren der Spektralapparatur

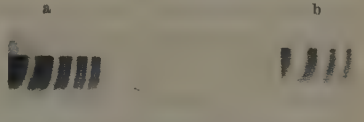


Fig. 2. Interferometeraufnahmen der Primärlinie (30 mm Etalon):
a) bei 60 mA und 0,25 mm Druck in der Hohlkathode (starke Selbstumkehr),
b) bei 40 mA und 1,2 mm Druck in der Hohlkathode (schwache Selbstumkehr).

diente die Linie mit Selbstumkehr (etwa wie in Fig. 2a), auf die sich relativ scharf einstellen läßt. Die endgültige Justierung geschah dann mit der Absorptionslinie des Atomstrahles.

c) Der Atomstrahl. Die eigentliche Atomstrahlanordnung (siehe Fig. 3) bestand aus einem Quarzrohr, das 10 cm Länge und 0,9 cm Innendurchmesser besaß. Am unteren zugeschmolzenen Ende befand sich im Rohr ein kleines Eisentöpfchen, das mit metallischem Calcium gefüllt war, und das durch einen über das Quarzrohr geschobenen elektrischen Ofen bis auf 900° C geheizt werden konnte[2]). Das obere offene Ende des Rohres diente als Abbildespalt. Alle Atome nämlich, die aus dem Ofentöpfchen kommend auf die kalten Wände des Quarzrohres treffen, bleiben dort haften, so daß praktisch nur diejenigen Atomstrahlen das Rohr verlassen, die ohne Wandberührung durch das obere Rohrende laufen. Das Öffnungsverhältnis des so gebildeten Atomstrahles betrug also etwa 1:10. Dadurch wird erreicht, daß nur Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Atomstrahl auftreten, die einer Temperatur von etwa 10° K entsprechen. Die Doppler-Breite der entsprechenden Absorptionslinie wird daher für das Atomgewicht des Calciums $\sim 0{,}008$ cm^{-1}, d. h. annähernd zehnmal schmäler als die Emissionslinien einer mit Wasser gekühlten Hohlkathode. Um für einwandfreies Vakuum zu sorgen, war das beschriebene Quarzrohr am oberen Ende in ein 6 cm weites Glas-

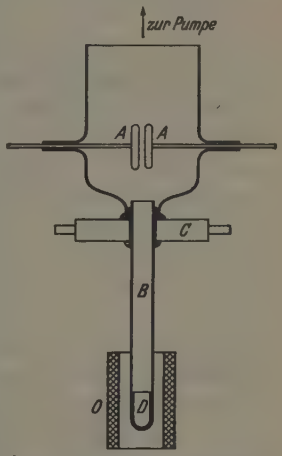


Fig. 3. Das Absorptionsgefäß.
AA = Feldplatten, B = Quarzrohr, C = Wasserkühlung, D = Ofentöpfchen, O = Ofen.

[1]) Dabei erweist es sich als vorteilhaft, das metallische Calcium nicht zu stark vorzureinigen. Ein vakuumgeschmolzener praktisch oxydfreier Calciumbelag in der Lampe leistet der Selbstumkehr starken Vorschub. — [2]) Ohne den Schutz des Eisentöpfchens wurde das Quarzglas vom heißen Calcium zu schnell zerstört.

rohr eingekittet (Fig. 3), das die Feldplatten enthielt. Das Ganze war durch einen ebenso weiten Hahn und eine entsprechend gebaute Kühlfalle mit einer großen Stahlpumpe (Leybold, Modell E) verbunden. Der gesamte Pumpweg vom Atomstrahl bis zur Pumpe betrug 60 cm. Durch diese Anordnung konnte erreicht werden, daß bei 720° C im Ofen, bei dem das Calcium einen Sättigungsdruck von ungefähr 10^{-1} mm besitzt, das McLeod, welches den Druck im Feldraum maß, Klebevakuum während des ganzen Versuches zeigte. Man kann sich leicht ausrechnen, daß bei der gegebenen Anordnung die Zahl der Atome im Strahl an der Stelle des elektrischen Feldes größenordnungsmäßig 10^{-3}mal kleiner ist als im Ofentöpfchen. Da im allgemeinen bei 650° C, wo mit einem Sättigungsdruck von ungefähr 10^{-2} mm gerechnet werden muß, gearbeitet wurde, so betrug der Calciumdampfdruck zwischen den Feldplatten nur etwa 10^{-5} mm, außerhalb des Atomstrahles aber sicher wesentlich weniger.

d) Die elektrische Feldanordnung. Die Feldanordnung war die eines Plattenkondensators mit parallelen Platten, durch dessen Mitte der Atomstrahl lief. Die Platten waren gut polierte und sauber abgerundete Nickelstücke von 2×3 cm² Fläche, die auf keine Weise durch Glasschutz abgeschirmt, sich auf 1 bis 2 mm gegenüberstanden. Wenn bei hohen Feldern Überschläge stattfanden, so geschah dies stets *zwischen* den Platten und zwar da, wo der Strahl lief; ein Beweis dafür, daß außerhalb des Strahles in der Tat bestes Vakuum vorhanden war. Als Abstand der Platten bei den Versuchen wurden 1,3 mm gewählt[1]). Dann ging noch genügend Licht der Primärquelle zwischen ihnen hindurch. Eine im Institut vorhandene große Stabilivoltanlage lieferte sehr konstante Spannung. Gemäß dem niedrigen Druck im Feldraum wurden Feldstärken bis 300 kV/cm erzielt, die während einer längeren Versuchsreihe gut konstant gehalten werden konnten. Die Spannungsmessung geschah mit einem Instrument nach Starke-Schröder. Da bei längerem Betrieb der untere Rand der Kondensatorplatten erheblich mit metallischem Calcium beschlug, so daß schließlich an dieser Stelle immer häufiger Funken übersprangen, so wurde die obere Öffnung des Quarzrohres durch einen metallischen Deckel mit einem parallel zur Kondensatoröffnung ausgerichteten Spalt von 0,9 cm Länge und 1 mm Querschnitt versehen. Auf diese Weise wurde ein merkliches Aufdampfen von metallischem Calcium auf die Feldplatten verhindert, da nun der Atomstrahl praktisch frei zwischen den Platten hindurchlief.

[1]) Da die Platten nur jede für sich an den Haltern eingekittet waren, ohne gegeneinander versteift zu sein, so war der Plattenabstand bestenfalls auf 0,05 mm definiert.

e) Die optische Anordnung. Die leuchtende Hohlkathode wurde mit einem Achromaten in die Mitte des Feldraumes abgebildet, und zwar so, daß der Öffnungswinkel des in den Atomstrahl fallenden Lichtbündels kleiner war als der des Atomstrahles. Dies ist erforderlich, um nicht durch die Abbildung größere Atomstrahlgeschwindigkeitskomponenten in der Beobachtungsrichtung zu bekommen, wodurch notwendigerweise eine Verbreiterung der Absorptionslinien erzeugt wird, wie aus Fig. 4 ohne weiteres

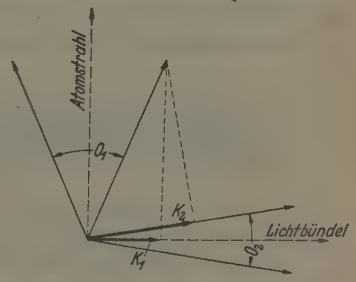


Fig. 4. Vergrößerung des Atomstrahlgeschwindigkeitskomponenten in der Beobachtungsrichtung durch die optische Abbildung.

O_1 = Öffnungswinkel des Atomstrahls, O_2 = Öffnungswinkel des Lichtbündels, K_1 = größtmögliche mittlere Geschwindigkeitskomponente der Atomstrahlteilchen in der Beobachtungsrichtung für $O_2 = O$, K_2 = größtmögliche mittlere Geschwindigkeitskomponente der Atomstrahlteilchen in der Beobachtungsrichtung beim Öffnungswinkel O_2.

hervorgeht. Ein zweiter Achromat bildete das Bild der Primärlichtquelle zwischen dem Feldkondensator im Verhältnis von etwa 1 : 1 auf den Spalt eines Zeissschen Dreiprismenglasspektrographen nach Försterling ab. Das Fabry-Perot-Etalon stand wie üblich zwischen Kollimator und Prismensatz; verwendet wurden Zwischenringe von 30 bis 50 mm, bei denen, wie die Abbildungen zeigen, die Primärlinie je nach den Entladungsbedingungen die Hälfte bis Dreiviertel des Dispersionsgebietes ausfüllt. Die Breite des „Kontinuums" betrug im allgemeinen etwa 0,07 cm^{-1}. Die Belichtungszeiten blieben stets unter 5 Minuten. Verwendet wurden Agfa-Isochrom-Platten.

III. Untersuchung der Absorptionslinie.

a) Ohne Feld. Zunächst wurden die Bedingungen studiert, unter denen die Absorptionslinie ohne Feld deutlich sichtbar, aber möglichst schmal zu beobachten ist. Die Absorption begann bei Verwendung eines 30 mm-Etalons und einer Strahlbreite von 9 mm an der Linie $\lambda = 4227$ Å bei einer Ofentemperatur von etwa 650° C gerade erkennbar zu werden. Dem würde ein Sättigungsdruck von $1 \cdot 10^{-2}$ mm Hg entsprechen. Dadurch, daß das Ofentöpfchen aber oben offen ist, wird der Effektivdruck dort wohl etwas kleiner sein. Bei 670° C erscheint die Absorptionslinie als deutliche Aufhellung in der Mitte der Primärlinie. Die Breite des gesamten Absorptionsstreifens beträgt dann $\Delta\nu = 0{,}007$ bis $0{,}008\ cm^{-1}$, was in unserem Falle einem $\Delta\lambda$ von $\sim 0{,}001$ Å entspricht. Mit wachsendem

Dampfdruck im Atomstrahl wird der Streifen breiter und heller; bei 750° hat die Absorption in der Linienmitte bereits 100% erreicht. Von nun an wird die Linie schnell breit und nimmt bei 850° mehr als die halbe Weite der Emissionslinie der Primärlampe ein. Die Tatsache, daß bei so kleinen Drucken (10^{-5} mm Hg und kleiner) und so kleiner absorbierender Schichtdicke bereits eine deutliche Absorption auftritt, wird einmal, wie schon anfangs erwähnt, durch die große Absorptionswahrscheinlichkeit des $^1S_0 - {}^1P_1$-Überganges, zum anderen durch das Zusammendrängen der gesamten Absorption auf einen so kleinen Frequenzbereich verständlich.

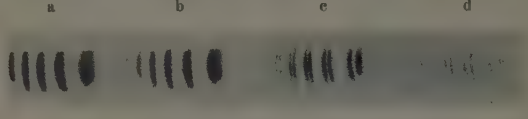
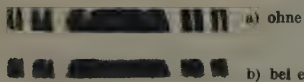


Fig. 5. Interferometeraufnahmen der Ca I-Linie $\lambda = 4227$ Å ohne Feld (30 mm Etalon).
a) Ohne Atomstrahlabsorption, b) bis d) mit Atomstrahlabsorption, b) bei 650° C, c) bei 750° C, d) bei 850° C im Ofen.

Fig. 5 zeigt der Reihe nach Aufnahmen der Linie $\lambda = 4227$ Å: a) ohne Atomstrahl, b) bei der Temperatur, bei der im allgemeinen gearbeitet wurde, c) und d) zweier höherer Temperaturen, die das Anwachsen der Absorption in der Linie demonstrieren. Auf Grund der Fig. 5 b erkennt man, daß Verschiebungen von der Breite der Absorptionslinie gemessen werden können. Das bedeutet aber, daß bereits Abstände von $\Delta\nu = 0{,}008\ \mathrm{cm}^{-1}$ (für $\lambda = 4227$ Å heißt das also $\Delta\lambda \sim 0{,}001$ Å) quantitativ durch die Methode erfaßt werden. Solange die Zahl der Stark-Effekt-Komponenten gering ist — im vorliegenden Falle sind nur je eine π- und eine σ-Komponente zu erwarten —, können auf diese Weise Verschiebungen von fast beliebiger Größe gemessen werden, wenn man nur durch Wahl des Etalons und der Breite der Primärlinie dafür sorgt, daß sich die Nachbarordnungen in den Linienflügeln gerade etwas überlappen. Man erhält dann ein „Pseudokontinuum" über die ganze Spaltlänge, aus dem die einzelnen Ordnungen der Absorptionslinie ihre Bezirke herausabsorbieren; dabei können diese Verschiebungen auch mehr als ein Dispersionsgebiet ausmachen.

b) Mit Feld. Beim Einschalten eines elektrischen Feldes bis zu 150 kV pro cm war unter Benutzung eines 50 mm-Etalons an der Linie $\lambda = 4227$ Å keine Veränderung zu beobachten, was, gemessen an den Ergebnissen Ladenburgs bei den *D*-Linien des Natriums, äußerst verwunderlich erschien, da bei der hier beschriebenen Anordnung bereits ein Zehntel der dort angegebenen Verschiebung deutlich hätte beobachtet werden

müssen. Bei 200 kV/cm ist eine äußerst geringe, aber gut erkennbare Verschiebung der Linie nach Rot festzustellen, die bei 300 kV/cm dann stärker in die Augen fällt. Höhere Feldstärken ließen sich bei der gegebenen Anordnung nicht halten, so daß das Phänomen nur in dem relativ kleinen Feldbereich von 200 und 300 kV/cm beobachtet werden konnte. Fig. 6



a) ohne Feld,

b) bei einem Feld von 300 kV/cm (50 cm Etalon).

Fig. 6. Interferometeraufnahme der CaI-Linie $\lambda = 4227$ Å mit Atomstrahlabsorption.

zeigt eine Aufnahme bei 300 kV/cm neben einer Vergleichsaufnahme ohne Feld.

Um die Verschiebungen *auszumessen*, ist es notwendig, die Stelle der unverschobenen Absorptionslinie festzulegen. Zu dem Zweck wurde jeweils neben einer Aufnahme mit Feld eine solche ohne Feld gebracht. Das geschah in folgender Weise: Der benutzte Vorzerleger ist ein Spektralapparat konstanter Ablenkung nach Försterling, bei dem man mit Hilfe einer Drehvorrichtung die Stellung des Prismensatzes zum Kollimator kontinuierlich und kontrollierbar verändern kann. Bei einer solchen Drehung wandern die Spektrallinien auf der photographischen Platte auf gleicher Höhe senkrecht zur Strahlrichtung in der Ordnungsrichtung. Es wurde daher jeweils eine Aufnahme mit Feld gemacht und dann unmittelbar anschließend (ohne die Kassette zu schließen) nach geringer Drehung der Prismen eine zweite Aufnahme ohne Feld derart, daß die Ordnungen beider Spektralbilder sich etwas überlappen. So liefert die eine Aufnahme die Linienmitte, die andere die Verschiebung gegen diese. Das Verfahren wurde an der feldlosen Linie ausprobiert und gab hier auf wenige Prozent übereinstimmende Ergebnisse.

In Tabelle 1 sind die so erhaltenen Meßergebnisse zusammengestellt.

Tabelle 1. Stark-Effekt-Verschiebungen $\Delta\nu$ in cm^{-1} der Linie $\lambda = 4227$ Å in Abhängigkeit vom elektrischen Feld F (gemessen in kV/cm).

F	200	240	300 kV/cm
$\Delta\nu$	0,008	0,011	0,018 cm^{-1}
$\Delta\lambda$	$0{,}001_3$	$0{,}001_9$	$0{,}003_2$ Å

Infolge der nicht allzuscharfen Felddefinition, die durch das freie Sichgegenüberstehen der Kondensatorplatten bedingt ist, und der noch

etwas primitiven Vermessung der Verschiebungen sind die Werte der Tabelle 1 nur auf 0,001 cm^{-1} genau. Innerhalb dieser Fehlergrenzen geht die Verschiebung mit dem Quadrat der Feldstärke F, wie aus Fig. 7 hervorgeht, in der die Verschiebung $\Delta\nu$ in Abhängigkeit von F^2 dargestellt ist. Von einer Aufspaltung der Linie in mehrere Komponenten konnte bis zur höchsten erreichten Feldstärke nichts beobachtet werden. Es wird eine *Rot*verschiebung festgestellt.

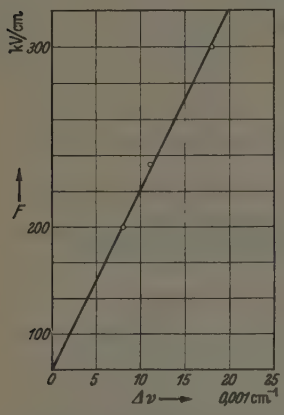


Fig. 7. Abhängigkeit der Verschiebung $\Delta\nu$ (gemessen in 0,001 cm^{-1}) von der elektrischen Feldstärke F (gemessen in kV/cm; quadratische Skala).

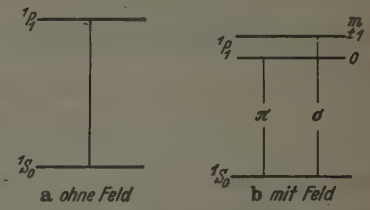


Fig. 8. Termschema eines $^1S_0$—$^1P_1$-Überganges ohne und mit elektrischem Feld.

c) Diskussion der Versuchsergebnisse. Auf Grund theoretischer Überlegungen[1]) ist zu erwarten, daß in einem elektrischen Feld der $^1S_0$-Term, ohne aufzuspalten, eine geringe Verschiebung nach *größeren* Termwerten erfährt, der $^1P_1$-Term dagegen in zwei Stark-Effekt-Zustände aufspaltet, und zwar in einen mit der Quantenzahl $m = \pm 1$, einen mit $m = 0$. Dabei soll der Zustand mit $m = 0$ die stärkere Verschiebung erleiden (siehe Fig. 8, in der die Verschiebungen so angenommen sind, daß die beobachtete Rotverschiebung herauskommt). Die Frage, ob die Verschiebungen beim $^1P_1$-Term nach größeren oder kleineren Termwerten hin stattfinden, hängt davon ab, ob der in erster Linie störende Term über oder unter dem gestörten $^1P_1$-Term liegt. Auf Grund des Ca I-Termschemas würde man eine *Verkleinerung* des Termwertes des $^1P_1$-Zustandes im Felde erwarten, da der nächste Störterm ein $^1D_2$-Term ist, der ziemlich dicht *unter* dem $^1P_1$-Term liegt. Aus Unsölds Stark-Effekt-Formel[2]) erhält man unter Verwendung der Termlage der beiden Zustände und unter Vernachlässigung einer

[1]) R. Ladenburg, Müller-Pouillet, Bd. Optik, 2. Teil, S. 2231 ff. — [2]) A. Unsöld, Ann. d. Phys. **82**, 355, 1927.

Verschiebung des $^1S_0$-Terms bereits für ein Feld von 100 kV/cm eine *Violett*verschiebung der Linie $\lambda = 4227$ Å von größenordnungsmäßig 0,1 Å. Die hier gefundene Verschiebung ist praktisch 100mal kleiner und geht in umgekehrter Richtung (*Rot*verschiebung).

Die Frage, warum nur *eine* Linie beobachtet wird, ist noch nicht völlig geklärt, da bisher keine Beobachtungen bezüglich der Polarisation gemacht worden sind. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist die Trennung der Komponenten bei der maximal erreichten Verschiebung noch zu gering (siehe Fig. 6), um mit Sicherheit beobachtet werden zu können. Eine relative Verschiebung der π- und σ-Komponente im Verhältnis von 4 : 3, wie sie bei Störung durch einen $^1D_2$-Term zu erwarten ist[1]), wäre bestenfalls als ganz geringe Verbreiterung der verschobenen Linie zu beobachten.

Die hier beschriebene neue Methode zur Beobachtung des Stark-Effektes an Atomresonanzlinien ermöglicht es, infolge der äußerst geringen Linienbreiten so kleine Komponentenverschiebungen zu messen, daß auch die Hyperfeinstruktur der Resonanzlinien im elektrischen Felde der Untersuchung zugänglich wird, da die am Ca I festgestellten Verschiebungen wesentlich kleiner sind als die meisten beobachteten Hyperfeinstrukturaufspaltungen. Es dürfte dabei von Interesse sein, zu untersuchen, wie die *Kern*drehimpulsquantenzahl die Anzahl der Stark-Effekt-Komponenten beeinflußt und in welcher Weise das elektrische Feld auf die Kopplung zwischen Kernmagnet und Elektronenhülle einwirkt. Versuche in dieser Richtung sind in Angriff genommen.

Der Helmholtz-Gesellschaft sei für Bereitstellung von Mitteln, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für Überlassung von Apparaten bestens gedankt.

---

[1]) W. Lochte-Holtgreven, ZS. f. Phys. **109**, 358, 1938.

Über den Stark-Effekt der Strontium-I-Resonanzlinie $\lambda = 4607$ Å*).

Von **Hans Kopfermann** und **Christian Otzen** aus Kiel.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1940.)

Die von Jenckel und Kopfermann angegebene Methode zur Messung sehr kleiner Stark-Effekt-Verschiebungen wird ausgebaut und auf die Resonanzlinie des Sr I angewandt. Die Verschiebungen im elektrischen Feld erweisen sich ebenso wie beim Ca I unerwartet klein. Die σ-Komponente wird nach Violett, die π-Komponnete nach Rot verschoben. Der Effekt geht im untersuchten Bereich (100 kV/cm bis 300 kV/cm) quadratisch mit der Feldstärke. Es wird hier zum erstenmal ein Stark-Effekt beobachtet, bei dem oberer ($5\,p\,{}^1P_1$) und unterer Term ($5\,s\,{}^1S_0$) in gleicher Größenordnung aufspalten. Die absoluten Termaufspaltungen werden an Hand der vorhandenen Stark-Effekt-Formeln diskutiert.

Jenckel und Kopfermann[1]) haben eine Methode angegeben und am Beispiel des Ca I erprobt, die es ermöglicht, durch Beobachtung des inversen Stark-Effektes an Resonanzlinien extrem kleine Verschiebungen im elektrischen Feld dadurch zu messen, daß sie einen senkrecht zum Strahl der Primärlichtquelle laufenden Atomstrahl als absorbierendes Medium benutzten. Die im folgenden beschriebenen Bemühungen gleicher Art stellen eine Fortsetzung und Verfeinerung dieser Untersuchungen, vor allem in bezug auf möglichst gute Definition des Feldes und auf Verbesserung der Komponentenmessung, dar.

1. Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist die gleiche wie bei der Calciumarbeit (siehe Fig. 1 dieser Arbeit). Die Wand der als Primärlichtquelle dienenden Hohlkathode war mit metallischem, im Hochvakuum umgeschmolzenem Strontium belegt. Zu diesem Zwecke wurde das Rohstrontium in einen genau in den Hohlkathodenraum hineinpassenden dünnwandigen Eisenzylinder gebracht und in einem Quarzrohr bei gutem Vakuum einige Zeit über der Schmelztemperatur des Stromtiums gehalten. Der so gewonnene massive Sr-Zylinder wurde dann auf der Drehbank mit einer durchgehenden Bohrung von 8 mm Weite versehen und fest in den Hohlkathodenentladungsraum eingefügt. Die Intensität dieser Strontiumlichtquelle war — bei Betrieb mit Neon — nach kurzer Reinigung durch Brennen zwar sehr groß, die Resonanzlinie

*) D 8.

[1]) L. Jenckel u. H. Kopfermann, ZS. f. Phys. **117**, 145, 1941.

$\lambda = 4607$ Å zeigte aber bereits bei recht kleinen Stromstärken deutliche Selbstumkehr, die um so stärker wurde, je sauberer die Entladung brannte, obwohl zur Verhinderung des Herausdiffundierens des Sr-Dampfes aus dem kathodischen Leuchtraum die Zirkulation des Zusatzgases in Richtung von der Anode zur Kathode verlief. Um bei dieser Anordnung eine selbstumkehrfreie Linie zu erhalten, durfte die Stromstärke nicht mehr als 30 mA betragen, was die Belichtungszeiten beträchtlich erhöhte. Nach einigen Probeversuchen wurde daher die Innenfläche des Strontiumzylinders mit einem dünnen Aluminiumzylinder überzogen, aus dem nur zwei schmale Spalte einen geringen Teil der Sr-Oberfläche freiließen. Dadurch konnte mit Stromstärken bis 120 mA bei Belichtungszeiten von etwa einer Minute gearbeitet werden, ohne daß etwas von der Selbstumkehr zu sehen war. Die Hohlkathode war mit Wasser gekühlt.

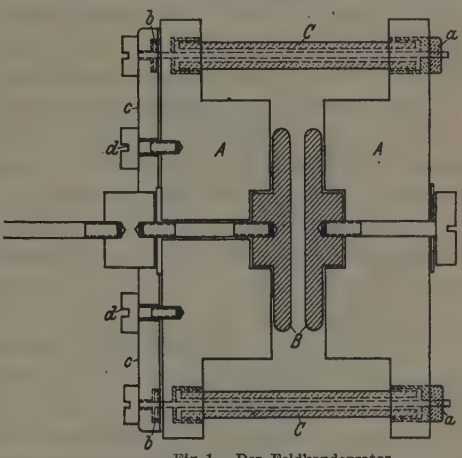


Fig. 1. Der Feldkondensator. $A\,A$ = Hartgummiunterlagen, $B\,B$ = Feldplatten aus Nickel, $C\,C$ = Messingschrauben mit darübergezogenen Quarzrohren.

Zur besseren Definition des elektrischen Feldes fand ein Kondensator von folgender Gestalt Verwendung (siehe Fig. 1). Zwei hochglanzpolierte Nickelplatten ($B\,B$) von $2 \times 1{,}5$ cm² Fläche sind auf Hartgummiunterlagen ($A\,A$) fest gelagert, deren Abstand durch vier Messingschrauben mit darübergezogenen Quarzrohren ($C\,C$) konstant gehalten wird. Diese Schrauben vereinigen beide Kondensatorhälften ($A\,A$) zu einem starren Gebilde; zu dem Zwecke sind sie derart konstruiert, daß sie einerseits bei a durch das Gewinde und andererseits bei b durch eine Erweiterung, die in einer auf der Hartgummiunterlage A befestigten Messingschiene c lagert, gut eingefügt sind. Die beiden Schrauben d dienen zur Halterung der Messingschiene und gleichzeitig zum Festklemmen der Schrauben C in den Punkten b. Auf diese Weise wurden die Kondensatorplatten auf wohldefinierten und mit einem Komperator leicht ausmeßbaren Abstand gebracht und konnten so festmontiert als Ganzes in das Glasgefäß eingeführt

werden, in dem die Absorption stattfinden sollte. Der Plattenabstand betrug 1,006 mm. Das elektrische Feld ließ sich im allgemeinen bis 300 kV/cm sehr konstant halten; Überschläge fanden nur im Augenblick des Einschaltens und bei längerem Betrieb des Atomstrahles statt, nämlich dann, wenn die Kondensatorplatten stärker mit aufgedampftem Strontium verunreinigt waren. Dies ließ sich trotz starken Ausblendens des Strahles nie völlig vermeiden. Die Spannungsmessung geschah mit einem Instrument nach Starke-Schröder, das sorgfältig geeicht war.

Die optische Anordnung war unverändert. Es wurde bei allen Aufnahmen ein Etalon von 70 mm verwendet, dem ein Dispersionsgebiet von 0,0714 cm^{-1} entspricht. Bei 100 mA Stromstärke und 1,5 mm Neondruck in der Primärlampe überlagerten sich dann die Emissionslinien benachbarter Ordnungen im allgemeinen soweit, daß die Minima zwischen den Ordnungen annähernd verschwanden. Dabei spielt natürlich die Reinheit der Lichtquelle eine ausschlaggebende Rolle: je sauberer das Füllgas und die Sr-Oberfläche, um so breiter wird unter sonst gleichen Bedingungen die Linie. Da sich kleine Gasausbrüche aus den Wänden kaum vermeiden lassen, so war die Herstellung eines guten „Pseudokontinuums" bis zu einem gewissen Grade Glücksache. Oft blieb zwischen den Ordnungen eine mehr oder weniger schwache Aufhellung, die zwar mit einer Stark-Effekt-Komponente wegen ihrer Form nicht verwechselt werden konnte, die aber die Definition einer Linie beeinträchtigt, wenn die Absorption bei angelegtem Feld gerade in diesem Gebiet stattfindet. (Siehe die verschobene Linie in Fig. 5b und 5d.) Es ist also erstrebenswert, bei gleichmäßiger Schwärzung zu arbeiten, wie sie z. B. in Fig. 4 geglückt ist.

Die Atomstrahlanordnung (siehe Fig. 2) war gegenüber der früheren mit einer besseren Kühlung versehen, die vor allem durch Anbringung einer wasserdurchflossenen Bleikühlschlange zwischen oberem Ofenrand und der Eintrittsstelle in das Glasgefäß die Gewähr gab, daß oberhalb des Ofens alle Sr-Atome, die auf die Quarzwand trafen, auch sicher haften blieben. Dadurch und durch Verkleinerung des Querschnittes des Ofentöpfchens wurde viel zu einer Verschmälerung der Absorptionslinie beigetragen. Wenn man die Länge des Quarzrohres vom unteren Ende der Kühlung bis zu der am oberen Rande angebrachten Blende rechnet, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Blendenlänge von 10 mm ein Öffnungsverhältnis des Atomstrahles von 1 : 10. Zur Erreichung geringer Linienbreiten ist es weiterhin notwendig, die Temperatur des Ofens, d. h. die Absorption möglichst niedrig zu halten. Gearbeitet wurde bei 580° C (entsprechend einem Sättigungsdruck von $5 \cdot 10^{-2}$ mm). Da die Aufnahmen

bei ständig arbeitender Pumpe gemacht sind, dürfte der Dampfdruck am oberen Ofenrand etwa 10^{-2} mm betragen haben; das entspricht im Atomstrahl zwischen den Feldplatten einem Dampfdruck von etwa 10^{-5} mm.

Fig. 8 gibt eine Vergrößerung einer Aufnahme mit Atomstrahl ohne Feld wieder. Man schätzt aus ihr leicht ab, daß die Breite der Absorptionslinie etwa 0,005 cm^{-1} beträgt, was einem $\Delta\lambda$ von 0,001 Å entspricht.

Da sich die Komponentenverschiebungen beim Sr als sehr klein herausstellten — bei 100 kV/cm betragen sie $\Delta\nu \sim 0{,}007$ cm^{-1} —, so erwies es sich als zweckmäßig, π- und σ-Komponente getrennt zu betrachten. Es wurde daher ein Zeisssches Polarisationsfilter (Bernotar) in den Strahlengang gebracht, das erlaubte, je nach Stellung entweder die π- oder die σ-Komponente auszulöschen. Der dadurch entstehende Intensitätsverlust betrug ungefähr 60%[1]), so daß bei Aufnahmen der einzelnen Komponenten im Feld die Belichtungszeit auf 2 bis 3 Minuten erhöht werden mußte.

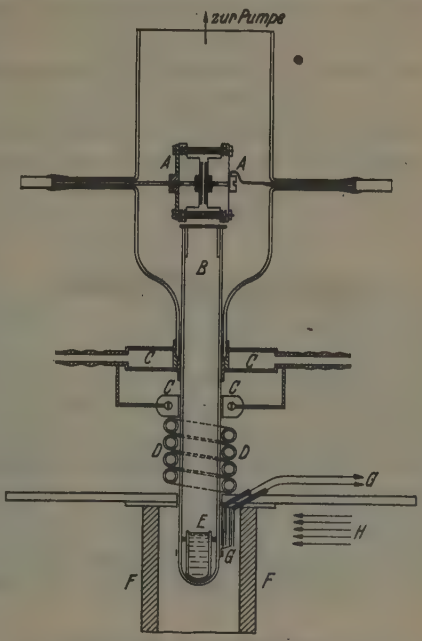


Fig. 2. Die Atomstrahlanordnung.
AA = Feldkondensator, B = Quarzrohr, CC und DD = Wasserkühlung. E = Ofentöpfchen, FF = Ofen, G = Thermoelement, H = Luftkühlung.

Zur exakten Bestimmung der Komponentenverschiebung wäre es zweifellos am sichersten, einen zweiten Atomstrahl ohne Feld in den Strahlengang zu bringen, der jeweils die Lage der feldlosen Linie als Nullmarke der Verschiebung festlegt. Abgesehen von der Komplikation der experimentellen Anordnung, die dadurch entstünde, könnte man dann nur Verschiebungen von mehr als 1,5 Linienbreiten messen. Es kam deshalb das folgende Verfahren zur Anwendung: Auf ein und dieselbe Platte wurden zeitlich un-

[1]) Bei der σ-Komponente erzeugt die Polarisation durch den Prismenapparat einen zusätzlichen Intensitätsverlust.

mittelbar nacheinander je eine Aufnahme ohne, eine Aufnahme mit Feld und schließlich zur Kontrolle wiederum eine solche ohne Feld gemacht, und zwar derart, daß mehrere Ordnungen auf jeder Seite des Ringzentrums vorhanden waren. Mit dem Komperator lassen sich dann die Ringdurchmesser einmal mit Feld, einmal ohne Feld bestimmen und aus diesen mit Hilfe der üblichen quadratischen Entzerrungsmethode[1]) die Verschiebungen der Feldkomponenten gegen die feldlose Linie berechnen. Da, wie sich zeigte, bei den großen verwendeten Etalonringen geringe Temperaturschwankungen im Beobachtungsraum bereits meßbare Schwankungen in den Ringdurchmessern der Ordnungen erzeugten, so wurden nur solche

Fig. 3. Absorptionsaufnahme der Linie $\lambda = 4607$ Å ohne Feld bei 70 mm Etalon und „Pseudokontinuum". (Ordnungsabstand $\doteq$ 0,071 cm^{-1}; Linienbreite etwa 0,005 cm^{-1}).

Platten zur Auswertung verwendet, bei denen die Ringdurchmesser der feldlosen Vergleichsaufnahmen auf weniger als 1 % übereinstimmten. Wegen der kurzen Belichtungszeiten — ein Satz von drei solchen Aufnahmen dauerte im allgemeinen 5 Minuten — wurde von vornherein mit solchen Schwankungen nicht gerechnet. Infolgedessen war der Spektralapparat im gleichen Zimmer wie die übrige Anordnung aufgestellt. Für nachfolgende Untersuchungen ist die Aufstellung des Etalons mit Vorzerleger in einem thermokonstanten getrennten Raum vorgesehen.

2. Ergebnisse.

Untersucht wurde die Resonanzlinie $\lambda = 4607$ Å ($5s^2\,{}^1S_0 - 5s\,5p\,{}^1P_1$) des Sr I. Im elektrischen Feld wird eine Aufspaltung in eine π- und eine σ-Komponente beobachtet. Wider alle bisherigen Erfahrungen wird die π-Komponente nach Rot, die σ-Komponente nach Violett verschoben. Fig. 5 zeigt einen Satz Aufnahmen der π-Komponente bei 160 kV/cm mit den nötigen Vergleichsaufnahmen; in Fig. 4 ist das entsprechende für die σ-Komponente bei 280 kV/cm zu sehen. Die Versuchsergebnisse bei verschiedenen Feldstärken sind in Tabelle 1 angegeben.

Die Verschiebung der π-Komponente fällt erwartungsgemäß größer aus als die der σ-Komponente. Die absoluten Verschiebungen sind dagegen unvermutet klein. Die einzelnen Zahlen in Tabelle 1 stellen jeweils Mittelwerte aus einer Reihe von Aufnahmen dar. Die Fehler bei den angegebenen

[1]) Siehe z. B. R. Ritschl, ZS. f. Phys. **79**, 5, 1932.

Tabelle 1. Absolute Verschiebungen der Komponenten.

Violettverschiebung.

Feld in kV/cm	150	200	220	240	280	300
$\Delta\nu$ für σ in cm^{-1}	0,0052	0,0104	0,0118	0,0138	0,0193	0,0220

Rotverschiebung.

Feld in kV/cm	100	130	160	180	200
$\Delta\nu$ für π in cm^{-1}	0,0076	0,0131	0,0206	0,0261	0,0320

Werten von $\Delta\nu$ überschreiten 0,0009 cm^{-1} in keinem Falle, bei den meisten Messungen betragen sie 0,0005 cm^{-1}. Dabei stammt die Unsicherheit in

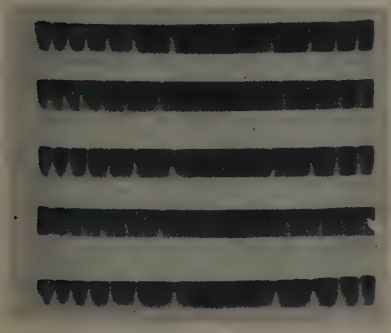


Fig. 4. Aufnahmesatz der σ-Komponente bei 280 kV/cm mit Vergleichsaufnahmen. a, c und e ohne Feld; b und d mit Feld (Violettverschiebung der σ-Komponente).

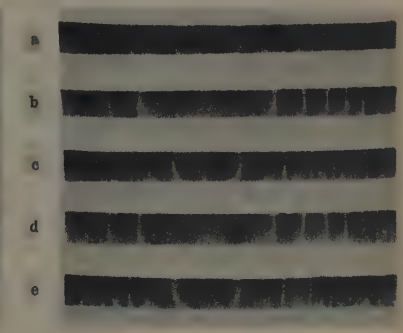


Fig. 5. Aufnahmesatz der π-Komponente bei 160 kV/cm mit Vergleichsaufnahmen. a, c und e ohne Feld; b und d mit Feld (Rotverschiebung der π-Komponente).

der Hauptsache von kleinen Temperaturschwankungen des Etalons. Die Feldangaben dürften auf 1% sicher sein.

Fig. 6 zeigt die Abhängigkeit der Verschiebung vom Feld. Als Ordinate ist die Feldstärke F (kV/cm) in quadratischer Skala aufgetragen, als Abszisse die Verschiebung in Einheiten von 0,001 cm^{-1}. Innerhalb der Meßgenauigkeit wird quadratische Feldabhängigkeit der Verschiebung festgestellt.

Nach der Theorie des quadratischen Stark-Effektes erwartet man ein Aufspaltungsschema, wie es in Fig. 7 angegeben ist. Der $^1S_0$-Term mit der magnetischen Quantenzahl $m = 0$ spaltet nicht auf, er verschiebt sich nur, der $^1P_1$-Term spaltet zweifach auf. Der Stark-Effekt-Zustand

mit $m = 0$ wird stärker, der mit $m = \pm 1$ schwächer verschoben. (Die Richtung der Verschiebung sei zunächst offen gelassen.) Der Übergang $({}^1P_1, m = \pm 1)$ nach $({}^1S_0, m = 0)$ liefert eine σ-, der Übergang $({}^1P_1, m = 0)$ nach $({}^1S_0, m = 0)$ eine π-Komponente. Beide müssen gleiche Intensität besitzen, da die Gesamtlinie unpolarisiert ist. Bei allen bisher untersuchten Stark-Effekten war stets die Bedingung erfüllt, daß der Anfangszustand der untersuchten Linie eine gegen den Endzustand sehr große Stark-Effektverschiebung aufwies, so daß die Verschiebung des unteren Zustandes vernachlässigbar klein gegen die des oberen war. Der hier beobachtete

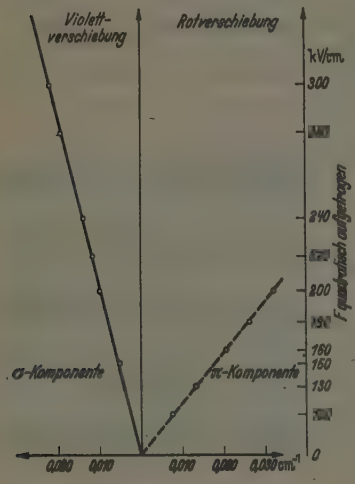


Fig. 6. Graphische Darstellung der Feldabhängigkeit der Verschiebungen.

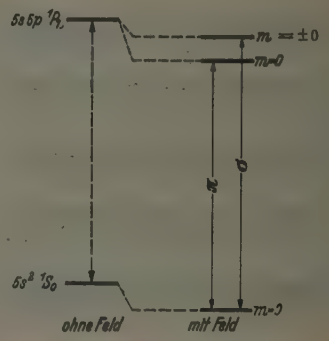


Fig. 7. Termschema des Überganges $5s^2\,{}^1S_0 - 5s5p\,{}^1P_1$. $\lambda = 4607$ Å des Sr I ohne und mit elektrischem Feld.

Tatbestand, nämlich der, daß die π-Komponente nach Rot, die σ-Komponente nach Violett verschoben wird, zeigt, daß bei den beiden Termen $5s^2\,{}^1S_0$ und $5s5p\,{}^1P_1$ die Verschiebungen von gleichen Größenordnungen sind. Augenscheinlich wird der ${}^1S_0$-Term etwas weniger als der $({}^1P_1, m = 0)$-Term, aber stärker als der $({}^1P_1, m = \pm 1)$-Term verschoben. Man hat also nicht mehr die Möglichkeit, unmittelbar aus der Verschiebung der Komponenten auf die Verschiebung der Terme zu schließen. Es kann aber die Verschiebung des ${}^1S_0$-Terms mit einiger Sicherheit abgeschätzt werden, wenn man die Oszillatorenstärke f des Gesamtüberganges kennt.

Bekanntlich läßt sich die Störungsenergie ΔW eines Atoms im statischen elektrischen Feld F aus der *Kramers-Heisenbergschen Dispersions-*

formel durch Übergang zur Frequenz $\nu = 0$ ohne weiteres angeben[1]). Es gilt:

$$\Delta W = -\frac{e}{8\pi^2 m} F^2 \left[\sum_a \frac{\frac{1}{3}\frac{g_a}{g} f_a}{\nu_a^2} - \sum_e \frac{\frac{1}{3} f_e}{\nu_e^2} \right], \tag{1}$$

wobei der Index a auf alle Absorptionslinien, der Index e auf alle Emissionslinien Bezug nimmt, die von dem gerade betrachteten Zustand ausgehen. g_a sind die statistischen Gewichte der oberen Zustände, von denen Übergänge zum herausgegriffenen Term stattfinden, g ist das statistische Gewicht dieses Terms. Die ν sind die Frequenzen der Übergänge.

Für den Grundzustand $^1S_0$ können die $f_e = 0$ gesetzt werden, so daß die zweite Summe verschwindet[1]). Von der ersten Summe genügt zur Abschätzung das erste Glied, da erstens die $1/\nu_a^2$ innerhalb der Serie stark abnehmen — das ν_a^2 des zweiten Gliedes ist bereits dreimal so groß wie das ν_a^2 der Grundfrequenz —, zweitens die f-Werte einer Serie rasch gegen Null gehen. Der f-Wert der Linie $\lambda = 4607$ Å ist zwar nicht bekannt, man weiß jedoch, daß der f-Wert der entsprechenden Linie des Ca I $f = 2{,}25$ beträgt[2]). Man darf daher auch für die Strontium-Resonanzlinie mit einem Wert f von etwa 2 rechnen. Nach dem *Thomas-Kuhnschen Summensatz* sollte aber die $\sum_a f_a$ dieser Serien annähernd 2 betragen. So bleibt sicher für die Summe der Oszillatorenstärken der höheren Übergänge nur ein recht kleiner Betrag. Aus diesen Erwägungen heraus sollte die Abschätzung

$$\Delta W \sim -\frac{e^2}{8\pi^2 m} F^2 \frac{\frac{1}{3}\frac{g_a}{g} f_a}{\nu_a^2} \tag{2}$$

die Stark-Effekt-Verschiebung des Grundzustandes recht gut angeben. Das Verhältnis g_a/g hat für den Übergang $^1S_0 - {}^1P_1$ den Wert 3. Setzt man daher für $f_a \sim 2$, so ergeben sich die Verschiebungen des $5s^2\,{}^1S_0$-Terms im elektrischen Feld, die in Tabelle 2 aufgeführt sind.

Tabelle 2. Theoretische Werte der Stark-Effekt-Verschiebung für den $5s^2\,{}^1S_0$-Term des Sr I ($f \sim 2$).

Feld in kV/cm	100	160	200	250	300
$\Delta\nu$ in cm^{-1}	+ 0,011	+ 0,028	+ 0,045	+ 0,070	+ 0,100

[1]) Siehe z. B. W. Thomas, ZS. f. Phys. **34**, 510, 1925. — [2]) D. Hartree u. W. Hartree, Proc. Roy. Soc. London (A) **164**, 190, 1937.

Das Pluszeichen soll bedeuten, daß der Term „nach unten" verschoben wird, so, wie es in Fig. 7 bereits gezeichnet ist.

Mit den so gewonnenen Termverschiebungen des $5s^2\,{}^1S_0$-Zustandes lassen sich auch die Termverschiebungen des $5s\,5p\,{}^1P_1$-Terms angeben. In Tabelle 3 sind die Werte für die beiden Stark-Effekt-Zustände des $5s\,5p\,{}^1P_1$-Terms in Abhängigkeit von der Feldstärke angegeben. Die Absolutwerte dieser Verschiebungen hängen, wie aus dem Vorangehenden erhellt, von der Wahl des f-Wertes ab und sind daher, solange dieser nicht genau bekannt ist, dementsprechend unsicher. Die Meßergebnisse lassen sich, nachdem die Verschiebungsrichtung des ${}^1S_0$-Terms festliegt, nur so deuten, daß auch die beiden Stark-Effekt-Zustände des ${}^1P_1$-Terms mit wachsendem Feld nach unten geschoben werden.

Tabelle 3. Stark-Effekt-Verschiebung $\Delta\nu$ für den $5s\,5p\,{}^1P_1$-Term des Sr I unter Verwendung der Verschiebung des $5s^2\,{}^1S_0$-Terms von Tabelle 2.

Feld in kV/cm	150	200	220	280	300
$\Delta\nu$ in cm^{-1} für ${}^1P_1\ m = \pm 1$	+ 0,0198	+ 0,0346	+ 0,0492	+ 0,0667	+ 0,0780
Feld in kV/cm	**100**	**130**	**160**	**180**	**200**
$\Delta\nu$ in cm^{-1} für ${}^1P_1\ m = 0$	+ 0,0186	+ 0,0321	+ 0,0486	+ 0,0621	+ 0,0770

3. Vergleich der Absolutwerte der Verschiebungen mit den Stark-Effekt-Formeln.

Nach der Quantentheorie läßt sich die Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes auf die Terme eines Atoms in der Weise darstellen, daß durch die Beeinflussung des äußeren Feldes eine gegenseitige Einwirkung benachbarter Terme stattfindet. Je geringer der gegenseitige Abstand der Terme des feldfreien Atoms ist, um so größer wird diese Einwirkung bei gegebener Stärke des äußeren Feldes sein. Die durch ein äußeres Feld verursachte Energieänderung ΔW eines Terms mit der Energie W_i beträgt in zweiter Näherung:

$$\Delta W = \sum_k \frac{H_{ik}^2}{W_i - W_k}, \tag{8}$$

wobei die H_{ik} die Matrixelemente der Störungsenergie und W_i die Energie des feldfreien herausgegriffenen Terms, die W_k die aller störenden Terme bedeuten. Die H_{ik} sind nur dann von Null verschieden, wenn die Gesamt-

drehimpulsquantenzahlen um die Richtung des Feldes m der sich störenden Terme i und k gleich und die Bahndrehimpulsquantenzahlen l um ± 1 verschieden sind. Des weiteren machen sich Störungen durch Terme verschiedener Multiplizität nicht bemerkbar. Ein ^1P-Term wird daher im elektrischen Feld nur von ^1S- und ^1D-Termen beeinflußt, und zwar wegen der Resonanznenner in Formel (3) um so stärker, je näher der Störterm am gestörten Term liegt Die Störung besteht in einer gegenseitigen Abstoßung, d. h. in einer Verschiebung des gestörten Terms nach oben, oder nach unten, je nachdem der Störterm tiefer oder höher liegt als der gestörte Term. Da in vielen Fällen die Terme gleicher Multiplizität und gleicher Hauptquantenzahl sehr eng beieinander liegen, so genügt es dann, die Summe in Formel (3) wegen der Resonanznenner auf zwei Glieder zu beschränken, nämlich auf die zum herausgegriffenen Term mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l unmittelbar benachbarter Zustände mit $l+1$ und $l-1$ (bei gleichem n). Für Singulettzustände hat Unsöld[1]) bei solchen Termlagen und wasserstoffähnlichen Zuständen die H_{ik} ausgerechnet, was für die Termverschiebung $\Delta\nu$ zu der nach ihm benannten Formel führt:

$$\Delta\nu = -0{,}00413\, n^2 \left[\frac{(n^2-l^2)(l^2-m^2)}{4l^2-1} \cdot \frac{1}{\nu_{l-1}-\nu_l} - \frac{(n^2-(l+1)^2)\left((l+1)^2-m^2\right)}{4(l+1)^2-1} \cdot \frac{1}{\nu_l-\nu_{l+1}} \right] \cdot F^2, \quad (4)$$

worin die Feldstärke F in kV/cm, ν_l, ν_{l-1} und ν_{l+1}, die Termwerte der sich störenden Terme, in cm^{-1} zu rechnen sind.

Im Sr I-Termschema liegt bei dem interessierenden $5s\,5p\,^1P_1$-Term ein $5s\,4d\,^1D$-Term im Abstande $\Delta\nu = +1549$ cm^{-1}; und ein $5s\,6s\,^1S_0$-Term im Abstande $\Delta\nu = -8893$ cm^{-1}; der erste Zustand liegt also tiefer, der zweite höher als der $^1P_1$-Term. Wegen der großen Nähe des $^1D_2$-Terms möchte man daher diesen Zustand praktisch allein für die Stark-Effekt-Verschiebung des $^1P_1$-Terms verantwortlich machen. Berücksichtigt man dementsprechend in Formel (3) nur das zweite Glied und setzt darin $n = 5$, so ergibt sich bei 100 kV/cm eine Verschiebung des Stark-Effekt-Zustandes $m = 0$ von $\Delta\nu = -3{,}7$ cm^{-1} (nach oben!).

Unter Berücksichtigung der Wirkung des $^1S_0$-Terms verkleinert sich die Verschiebung auf $\Delta\nu = -2{,}8$ cm^{-1}. Beobachtet wird jedoch eine Verschiebung, die über hundertmal kleiner ist und in umgekehrte Richtung geht.

---

[1]) A. Unsöld, Ann. d. Phys. 82, 355, 1927.

Bei näherer Betrachtung dieser Diskrepanz erscheint sie nicht allzu verwunderlich, da man kaum erwarten kann, daß die Voraussetzungen der Unsöldschen Formel im Falle der Erdalkaliresonanzlinien gegeben sind. Alle drei betrachteten Terme sind nichts weniger als wasserstoffähnlich. Die effektive Quantenzahl des $^1P_1$-Terms z. B. beträgt $n^* = 2{,}18$. Es ist daher, wenn man hier überhaupt mit Wasserstoff-Eigenfunktionen rechnen will, sehr problematisch, welche Werte für n man in die Formel (4) wählen soll. Geht man z. B. mit dem angegebenen n^* in die Gleichung (4) ein, so erhält man einen Wert für $\Delta\nu$, der dem gefundenen größenordnungsmäßig entspricht, wobei allerdings das Vorzeichen der Verschiebung falsch heraus kommt.

Da die Leuchtelektronen der beiden Störterme die Hauptquantenzahlen $n = 4$ und $n = 6$ haben, während dem Leuchtelektron des gestörten Terms $n = 5$ zukommt, so erscheint es überhaupt fraglich, ob man die Summe in (8) über die Terme mit $n = n'$ oder über $n = n' \pm 1$ erstrecken soll. Tut man das Letztere unter Verwendung geeigneter effektiver Kernladungszahlen, die sich aus den Termwerten ergeben, so wird in der Tat das berechnete $\Delta\nu$ etwa 50mal kleiner [1]) als bei Berechnung aus der Formel (4). Der Grund für das Kleinerwerden der Verschiebung bei dieser Wahl der Hauptquantenzahl liegt anschaulich darin, daß bei verschiedenen n die Schwingungsknoten der einen Eigenfunktion annähernd auf den Schwingungsbäuchen der anderen liegen. Auch in diesem Fall wird die Richtung der Verschiebung falsch wiedergegeben.

Die beiden angedeuteten Versuche zur Erklärung der ungewöhnlich kleinen Stark-Effekt-Verschiebungen müssen sicher als unzureichend bezeichnet werden; sie zeigen aber vielleicht, in welcher Richtung man den Grund für die geringen Effekte an den Erdalkali-Resonanzlinien zu suchen hat. Die Tatsache, daß die Stark-Effekt-Zustände des $^1P_1$-Terms nach *unten* geschoben werden, obwohl der weitaus am nächsten liegende Störterm ($^1D_2$) *unterhalb* des gestörten Terms liegt, sagt aus, daß — wahrscheinlich durch besonders extreme Überlagerung der Eigenfunktionen beider Terme —

---

[1]) Man hat dann an Stelle der Radialintegrale

$$\left|\int R_{n,l} R_{n,l+1} r^3 \mathrm{d}r\right| \quad \text{und} \quad \left|\int R_{n,l} R_{n,l-1} r^3 \mathrm{d}r\right|$$

in den H_{ik} die

$$\left|\int R_{n,l} R_{n-1,l+1} r^3 \mathrm{d}r\right| \quad \text{und} \quad \left|\int R_{n,l} R_{n+1,l-1} r^3 \mathrm{d}r\right|$$

auszurechnen. (Siehe z. B. H. Bethe, Handb. d. Phys. Bd. XXIV, 1. Teil, S. 420.)

die Störung des ^1D-Terms relativ klein ist, so daß die Wirkung aller übrigen *über* dem $^1P_1$-Term liegenden Zustände diese Störung gerade um ein Geringes überkompensiert.

Die relative Verschiebung der beiden Stark-Effekt-Terme des $^1P_1$-Zustandes beträgt ziemlich genau 2,2 : 1. Wie Lochte-Holtgreven gezeigt hat[1]), müßte dieses Verhältnis bei Störung durch einen oder mehrere ^1D-Terme 4 : 3 und bei Störung durch ^1S-Terme 1 : 0 betragen. Hieraus muß ebenfalls geschlossen werden, daß mehrere verschiedenartige Terme merklich zur Störung beitragen.

Der Helmholtz-Gesellschaft sei für die Überlassung der Mittel zu dieser Arbeit, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für Bereitstellung des Spektralapparates und der Stabilivoltanlage auch an dieser Stelle bestens gedankt.

---

[1]) W. Lochte-Holtgreven, ZS. f. Phys. **109**, 358, 1938.

Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene.

Von **Wilhelm Magnus.**

(Eingegangen am 17. September 1940.)

Die von Sommerfeld entwickelten Formeln für die Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene von vollkommener elektrischer Leitfähigkeit werden durch direkte Berechnung der auf dem beugenden Schirm fließenden Ströme neu abgeleitet.

Einleitung. H. Poincaré[1]) hat vorgeschlagen, die Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden Flächen durch Berechnung der auf den Flächen fließenden Ströme zu behandeln. Dies bedeutet, daß die beugende Fläche zu ersetzen ist durch eine mit Hertzschen Dipolen belegte Fläche, wobei die Achsen der Hertzschen Dipole überall tangential zur Fläche liegen. Dieser Ansatz scheint indessen nicht weiter verfolgt worden zu sein; wenigstens werden die bisher bekannten strengen Lösungen des Beugungsproblems durchweg mit anderen Methoden behandelt[2]). Der Poincarésche Ansatz führt auf Integralgleichungen[3]), deren Kern dieselbe Singularität besitzt wie das Potential einer punktförmigen Ladung; abgesehen von den allgemeinen Schwierigkeiten, die der Lösung einer solchen Integralgleichung entgegenstehen, tritt noch eine besondere Komplikation dadurch auf, daß bisher nicht allgemein die Möglichkeit bewiesen worden ist, die Lösung wirklich nur mit Hilfe solcher Dipole aufzubauen, deren Achsen tangential zur Fläche liegen, obwohl dies physikalisch evident zu sein scheint. Hierüber soll an anderer Stelle berichtet werden. Dagegen hat der Poincarésche Ansatz zwei Vorzüge: Die Ausstrahlungsbedingung macht keine Schwierigkeiten, und der Fall, daß die beugende Fläche Kanten besitzt oder sogar ein offenes Flächenstück ist, kann leicht mitberücksichtigt werden.

Im folgenden soll die Integralgleichung behandelt werden, auf die der Poincarésche Ansatz (bei Beschränkung des Problems auf den zweidimensionalen Fall) im Falle der Beugung einer ebenen Welle an einer

[1]) Sur la théorie des oscillations hertziennes. Compt. Rend. de l'Academie des sciences. Paris **113**, 515—519, 1891. — [2]) Für eine Darstellung des Gebietes und für Literaturangaben vgl. etwa A. Sommerfeld in Frank-Mises „Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik", 2. Aufl., Bd. 2, S. 808—875. — [3]) Die Theorie der Integralgleichungen war zur Zeit des Erscheinens der Note von Poincaré eben erst im Entstehen. Poincaré erwähnt sie dort überhaupt nicht.

Halbebene führt. Das dabei auftretende Beispiel eines nicht trivialen, aber explizit lösbaren Systems von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [Formeln (14) und (16)] darf vielleicht auch für sich einiges Interesse beanspruchen. Das scheinbare Leuchten der beugenden Kante wird aus der berechneten Verteilung der Ströme auf der Halbebene unmittelbar verständlich. Einen einfachen Ausdruck für die Stromverteilung gibt Formel (23).

Es ist kaum notwendig, hinzuzufügen, daß das Problem der Beugung an einer Halbebene an sich vollständig gelöst ist; die Frage wurde schon von Poincaré[1]) untersucht und von Sommerfeld[2]) mit Hilfe seiner berühmten „verzweigten Funktion der ebenen Welle" erschöpfend diskutiert.

1. Formulierung des Problems. Es seien x, y, z rechtwinklige kartesische Koordinaten; die Hälfte der y, z-Ebene, auf der $y \geqq 0$ ist, werde von einem Schirm von vollkommener Leitfähigkeit eingenommen. Auf diesen Schirm falle eine ebene Welle, die so polarisiert sei, daß nur die z-Komponente E_0 der elektrischen Feldstärke von Null verschieden und überdies von z unabhängig ist. Nach Abspaltung eines Faktors $e^{i\omega t}$ (t ist die Zeit, ω die Kreisfrequenz der ebenen Welle) läßt sich dann E in der Form schreiben

$$E_0 = A e^{-i\varkappa(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \quad (A = \text{Konstante}), \tag{1}$$

wobei $\varkappa = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (c = Lichtgeschwindigkeit, λ = Wellenlänge der ebenen Welle) und α der Winkel ist, den die Fortschreitungsrichtung der ebenen Welle mit der positiven x-Achse bildet. Durch das Auftreffen der ebenen Welle auf den Schirm entsteht eine Beugungswelle, deren elektrische Feldstärke ebenfalls nur eine z-Komponente u besitzt, die ihrerseits von z unabhängig ist. Es ist dann $E = E_0 + u$ die z-Komponente der elektrischen Feldstärke der gesamten, durch Beugung an der Halbebene entstehenden Welle, und es ist u hierbei bestimmt durch die Forderungen:

I. Es soll u eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0 \tag{2}$$

sein, welche im ganzen Raume stetig ist.

II. Es soll u der Ausstrahlungsbedingung genügen; für deren Formulierung siehe man Sommerfeld[3]).

---

[1]) Acta Math. **16**, 297, 1892. — [2]) Gött. Nachr. 1894, S. 338—342; 1895, S. 268—274; Math. Ann. **47**, 317—374, 1896; Proc. London Math. Soc. **28**, 359—429, 1897; ZS. f. Math. u. Phys. **46**, 11—97, 1901. — [3]) Siehe Fußnote 2 auf S. 168, dort S. 803—808, oder Jahresber. d. D. Mathematikervereinigung **21**, 309, 1921.

III. Die Werte von u auf dem beugenden Schirm sollen entgegengesetzt gleich sein den Werten von E_0 auf dem Schirm.

2. Ansatz zur Lösung. Die Bedingungen I und II werden von selber befriedigt durch den Ansatz:

$$u = A\varkappa \int_0^\infty f(\varkappa\eta)\, H_0^{(2)}\left(\varkappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}\right) \mathrm{d}\eta, \tag{3}$$

wobei $H_0^{(2)}$ die zweite Hankelsche Funktion vom Index Null bedeutet. Der Ansatz (3) bedeutet, daß man den beugenden Schirm ersetzt durch eine Belegung mit Wechselströmen der Kreisfrequenz $\omega = \varkappa c$, deren Richtung überall parallel zur z-Achse ist, und deren Amplitude für $y = \eta$ (unabhängig von z) den Wert $\pi A\varkappa\, |f(\varkappa\eta)|\, \mathrm{d}\eta$ besitzt; $f(\varkappa\eta)$ gibt also die Belegungsdichte und Phase der Wechselströme an. — Indem man $\varkappa x$ und $\varkappa y$ als neue Koordinaten einführt, kann man nachträglich $\varkappa = 1$ setzen; die Bedingung III liefert dann für die Funktion die Integralgleichung

$$-e^{-iy\sin\alpha} = \int_0^\infty f(\eta)\, H_0^{(2)}(|y-\eta|)\, \mathrm{d}\eta; \tag{4}$$

es ist, etwas allgemeiner, die Integralgleichung

$$g(y) = \int_0^\infty f(\eta)\, H_0^{(2)}(|y-\eta|)\, \mathrm{d}\eta, \tag{5}$$

in der $g(y)$ eine gegebene Funktion von y bedeutet, die im folgenden untersucht werden soll. Zunächst sei nur noch angemerkt: Setzt man in (4) $\alpha = 0$, so kann man von vornherein zwei Behauptungen über das zugehörige $f(\eta)$ als plausibel annehmen: Erstens wird $|f(\eta)|$ für kleine Werte von η wie $\eta^{-1/2}$ unendlich werden, und zweitens wird $f(\eta)$ für große Werte von η sich beliebig wenig von $-1/2$ unterscheiden müssen. Die erste Bemerkung leitet sich daraus her, daß der Kern der Integralgleichung (4) eine logarithmische Singularität besitzt, so daß man für $|f(\eta)|$ bei Annäherung an die Kante des Schirmes ein ähnliches Verhalten erwarten wird wie für die Ladungsdichte auf einer vollkommen leitenden elektrostatisch geladenen Halbebene. Die zweite Bemerkung läßt sich damit begründen, daß in großer Entfernung von der Kante des Schirmes dieselben Verhältnisse zu erwarten sind, wie sie eintreten würden, wenn der Schirm eine volle unbegrenzte Ebene wäre. In diesem Falle ergibt sich aber wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}\left(\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}\right) \mathrm{d}\eta = 2e^{-i|x|},$$

daß für $E_0 = e^{-ix}$ einfach $f(\eta) = -1/2$ folgt, und daß

$$E = E_0 + u = e^{-ix} - \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}\left(\sqrt{x^2+\eta^2}\right) d\eta = e^{-ix} - e^{-i|x|}$$

die stehende Welle charakterisiert, die durch Auftreffen der ebenen Welle E_0 auf die vollkommen leitende y, z-Ebene entsteht; es ist bemerkenswert, daß hier der Poincarésche Ansatz die Lösung für den *ganzen* Raum liefert und nicht nur für den Halbraum, aus dem die Welle E_0 einfällt.

3. Hilfssätze über Besselsche Funktionen[1]). Das Additionstheorem der Zylinderfunktionen liefert die bekannte Formel:

$$H_0^{(2)}(|y-\eta|) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_n^{(2)}(y) J_n(\eta) & \text{für} \quad y \geqq \eta, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_n^{(2)}(\eta) J_n(y) & \text{für} \quad \eta \geqq y. \end{cases} \tag{6}$$

Hierbei bedeutet $H_n^{(2)}$ bzw. J_n die zweite Hankelsche bzw. die Besselsche Funktion vom Index n, und es ist

$$\varepsilon_n = 1 \quad \text{für} \quad n = 0, \qquad \varepsilon_n = 2 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

gesetzt. Mit Rücksicht auf diese Formeln liegt es nahe, in der Integralgleichung (5) für $f(\eta)$ solche Funktionen einzusetzen, die eine explizite Ausführung der Integrationen in (5) mit Hilfe der Formeln (6) gestatten. Als solche Funktionen kann man $\frac{1}{\eta} J_\mu(\eta)$ wählen, wobei der Index μ der Besselschen Funktion J_μ eine positive reelle Zahl und zunächst nicht ganzzahlig sein soll. Definiert man nun

$$\varphi_\mu(y) = \int_0^{\infty} J_\mu(\eta) H_0^{(2)}(|y-\eta|) \frac{d\eta}{\eta}, \tag{8}$$

so liefert (6) zusammen mit den Formeln

$$\int J_\mu(\eta) H_n^{(2)}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\eta [J_\mu' H_n^{(2)} - H_n^{(2)\prime} J_\mu]}{\mu^2 - n^2}, \tag{9a}$$

$$\lim_{y \to \infty} y[J_\mu'(y) H_n^{(2)}(y) - J_\mu(y) H_n^{(2)\prime}(y)] = \frac{2i}{\pi} e^{-\frac{i\pi}{2}(\mu - n)}, \tag{9b}$$

$$y[J_n'(y) H_n^{(2)}(y) - J_n(y) H_n^{(2)\prime}(y)] = \frac{2i}{\pi} \text{(unabhängig von } y), \tag{9c}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\mu^2 - n^2} = \frac{\pi}{\mu} \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi}, \tag{9d}$$

[1]) Die hier angegebenen Formeln stehen in allen Werken über Zylinderfunktionen. Siehe z. B. R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig 1937.

das verhältnismäßig einfache Resultat

$$\psi_\mu(y) = \frac{2i}{\pi}\left\{-J_\mu(y)\frac{\pi}{\mu}\frac{\cos\mu\pi}{\sin\mu\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(y)\, i^n \varepsilon_n \frac{e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}}{\mu^2 - n^2}\right\}. \quad (10)$$

Durch einen Grenzübergang kann man auch den in Formel (10) zunächst ausgeschlossenen Fall behandeln, daß μ gleich einer ganzen Zahl $m \geqq 0$ ist; hier bekommt man allerdings nur für die Laplace-transformierte von ψ_m einen einfachen Ausdruck; setzt man

$$\mathfrak{L}\psi_\mu(y) \equiv \int_0^\infty e^{-py}\psi_\mu(y)\,dy = \chi_\mu(p).$$

so wird wegen

$$\mathfrak{L}J_\mu(y) \equiv \int_0^\infty e^{-py}J_\mu(y)\,dy = \frac{q^\mu}{\sqrt{1+p^2}}; \quad q = \sqrt{1+p^2} - p,$$

die Laplace-transformierte χ_m von ψ_m zu

$$\chi_m(p) = \frac{2i}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{\frac{q^m}{2m^2}(1 - im\pi - 2m\ln q) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{\varepsilon_n (iq)^n i^{-m}}{m^2 - n^2}\right\}. \quad (10\,a)$$

Diese Formel wird im folgenden nicht gebraucht; dagegen ist für den hier vorliegenden Zweck sehr wichtig die bekannte Formel

$$e^{-iy\sin\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n J_{2n}(y)\cos 2n\alpha - 2i\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(y)\sin(2n+1)\alpha. \quad (11)$$

4. Lösung der Integralgleichung (5). Die Formeln (10) vereinfachen sich, wenn μ die Hälfte einer ungeraden Zahl wird, da dann $\cos\mu\pi$ gleich Null ist. Denkt man sich in der Integralgleichung (5) die unbekannte Funktion $\eta f(\eta)$ als Summe von Bessel-Funktionen mit halbzahligem Index dargestellt, so erhält man daraus eine Entwicklung der gegebenen Funktion $g(y)$ nach Bessel-Funktionen mit ganzzahligem Index; wie die Formeln (11) zeigen, ist aber eine solche Entwicklung für $g(y)$ gerade in dem hauptsächlich interessierenden Spezialfall (4) von (5) bekannt, und es handelt sich nur noch darum, rückwärts aus dieser Entwicklung eine solche für $\eta f(\eta)$ zu gewinnen. Wir machen den Ansatz:

$$f(\eta) = \frac{\pi}{2i}e^{i\pi/4}\sum_{m=0}^{\infty} i^m(2m+1)c_m\frac{1}{\eta}J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta) \quad (12)$$

und versuchen, die zunächst noch unbekannten Konstanten c_m so zu bestimmen, daß sich für die Funktion

$$g(y) = \int_0^\infty f(\eta)H_0^{(2)}(|y-\eta|)\,d\eta$$

eine Entwicklung

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n J_n(y) \tag{13}$$

ergibt, in der die Konstanten a_n vorgegebene Größen sind. Die Anwendung der Formel (10) liefert zwischen den Größen a_n und c_m die Beziehungen:

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varepsilon_n \left(\frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right), \tag{14}$$

und es handelt sich nun um die Auflösung dieses Systems von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Ein Ansatz dazu wird nahegelegt durch die Formel

$$2 \int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos \frac{2m+1}{2} \varphi \, \mathrm{d}\varphi = (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right). \tag{15 a}$$

Bildet man nämlich, zunächst ohne Rücksicht auf Fragen der Konvergenz, die Hilfsfunktion

$$h(\varphi) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_m \cos \frac{2m+1}{2} \varphi, \tag{15 b}$$

so wird

$$(-1)^n a_n = \varepsilon_n \int_0^{\pi} h(\varphi) \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi. \tag{15 c}$$

Denkt man sich andererseits $h(\varphi)$ im Intervall $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt, und berücksichtigt man, daß $h(\varphi)$ eine gerade Funktion von φ ist, so liefert die rechte Seite von (15c) im wesentlichen die Fourier-Koeffizienten von $h(\varphi)$, und man erhält

$$h(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \cos n\varphi. \tag{15 d}$$

Wegen der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\pi} \cos \frac{2m+1}{2} \varphi \cos \frac{2l+1}{2} \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } l = m \end{cases} \tag{15 e}$$

erhält man somit aus (15b)

$$(-1)^m \pi c_m = \int_0^{\pi} h(\varphi) \cos \frac{2m+1}{2} \varphi \, \mathrm{d}\varphi, \tag{15 f}$$

und hieraus durch Einsetzen von $h(\varphi)$ aus (15d):

$$c_m = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right). \tag{16}$$

Nach der Herleitung von (16) aus (14) sind die Gleichungen (16) sicher dann die Auflösung der Gleichungen (14), wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Daß aus der Konvergenz der Reihen in (16) nicht rückwärts das Gleichungssystem (14) folgt, zeigt das Beispiel $a_n = \varepsilon_n$ ($\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ für $n > 1$). In diesem Falle wird nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right) = 0,$$

so daß bei Einsetzen dieser Summe in (14) nachträglich $a_n = 0$ herauskäme. Die Matrix des Gleichungssystems (16) besitzt den Eigenwert Null und einen zugehörigen Eigenvektor mit den Komponenten $(1, 2, 2, 2, \ldots)$. — Das bisherige Ergebnis läßt sich jetzt so formulieren:

Satz 1. Wenn die Funktion $g(y)$ sich für alle Werte von $y \geqq 0$ in eine Reihe

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n J_n(y)$$

entwickeln läßt, dann besitzt die Integralgleichung

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(\eta) H_0^{(2)}(|y - \eta|) \, d\eta$$

die Lösung

$$f(\eta) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) c_m \frac{1}{\eta} J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta),$$

wobei sich die Konstanten c_m aus den Größen a_n durch die Gleichungen

$$c_m = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right)$$

berechnen. Hinreichende, aber nicht notwendige Voraussetzung dabei ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

5. Lösung der Integralgleichung (4). Die allgemeinen Formeln von Satz 1 sind nun auszuwerten für den Fall, daß die gegebene Funktion $g(y)$ die Gestalt hat

$$g(y) = e^{-iy \sin \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n J_n(y),$$

wobei hier die Größen a_n sich aus Formel (11) berechnen zu:

$$a_n = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_n\, i^n \left(e^{i n \alpha} + (-1)^n\, e^{-i n \alpha}\right) = \varepsilon_n \cos n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \tag{17}$$

Mit Hilfe der Formel (16) ergibt sich hieraus, mit $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi^2 c_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\beta \left\{ \frac{1}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{1}{\frac{2m+1}{2} + n} \right\} \\ &= \cos\frac{2m+1}{2}\beta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2} - n\right)\beta}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2} + n\right)\beta}{\frac{2m+1}{2} + n} \right\} + \\ &\quad + \sin\frac{2m+1}{2}\beta \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\{ \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} - n\right)\beta}{\frac{2m+1}{2} - n} + \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} + n\right)\beta}{\frac{2m+1}{2} + n} \right\} \\ &= 2\cos\frac{2m+1}{2}\beta \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2l+1}{2}\beta}{\frac{2l+1}{2}} + \\ &\quad + 2\sin\frac{2m+1}{2}\beta \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{2l+1}{2}\beta}{\frac{2l+1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die letzte Summe ist bekanntlich gleich π für $0 < \beta < 2\pi$, und hieraus ergibt sich:

$$c_m = \frac{1}{\pi} \sin\left\{\frac{2m+1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\}; \quad \left(\frac{3\pi}{2} > \alpha > -\frac{\pi}{2}\right). \tag{19}$$

Voraussetzung bei den in den Formeln (18) ausgeführten Umformungen ist, daß $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ kein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, da dann die Umordnung der in (18) auftretenden unendlichen Reihen nicht erlaubt ist. Man erhält rückwärts aus den Größen c_m in Formel (19) mit Hilfe von Formel (14) die Größen aus Formel (17) zurück, und zwar mit derselben Schlußweise und derselben Voraussetzung wie bei den Umwandlungen in den Formeln (18). Man erhält so das Resultat:

Satz 2. Die Integralgleichung

$$-e^{-iy\sin\alpha} = \int_0^{\infty} f(\eta)\, H_0^{(2)}(|y - \eta|)\, \mathrm{d}\eta$$

besitzt für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ *die Lösung*

$$f(\eta) = i \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\frac{2m+1}{4}\pi} \frac{2m+1}{2} \sin\left\{\frac{2m+1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \frac{1}{\eta} J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta).$$

Diese Reihe für $f(\eta)$ *läßt sich summieren* [*s. Formel* (23)]. *Für* $\alpha = 0$ *(die ebene Welle trifft senkrecht auf den Schirm) erhält man:*

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{\sqrt{2\pi}} \left(i\sqrt{\eta} \int_0^1 \frac{e^{-i\eta\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \, d\sigma + \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-i\eta} \right)$$

$$= \frac{i-1}{\sqrt{2\pi}} \left(i \int_0^{\sqrt{\eta}} e^{-i\tau^2} \, d\tau + \frac{d}{d\eta} \int_0^{\sqrt{\eta}} e^{-i\tau^2} \, d\tau \right).$$

Man entnimmt hieraus ohne Mühe die eingangs erwähnten Eigenschaften von $f(\eta)$, nämlich

$$\operatorname*{limes}_{\eta \to 0} \eta^{1/2} f(\eta) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \operatorname*{limes}_{\eta \to \infty} f(\eta) = -\frac{1}{2}.$$

6. Herleitung eines geschlossenen Ausdruckes für die Stromverteilung $f(\eta)$. Die in Satz 2 angegebene Form von $f(\eta)$ ist eine für große Werte von η sehr schlecht konvergierende unendliche Reihe. Um einen einfacheren Ausdruck zu erhalten, gehe man aus von der Formel[1]):

$$e^{i\eta\tau} = \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta) P_m(\tau), \tag{20}$$

in der P_m das m-te Legendresche Polynom bedeutet. Ferner schreibe man $f(\eta)$ in der Gestalt

$$f(\eta) = -\frac{i e^{i\pi/4}}{\eta} \frac{d}{d\beta} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \cos\frac{2m+1}{2}\beta \, J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta), \tag{21}$$

wobei $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ gesetzt ist. Nun suche man eine Funktion $p(\tau)$, so daß

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\tau) p(\tau) \, d\tau = \frac{\cos\frac{2m+1}{2}\beta}{2m+1} \tag{22}$$

ist. Dann folgt aus (20) und (21) sogleich

$$f(\eta) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\eta}} \frac{d}{d\beta} \int_{-1}^{1} e^{i\eta\tau} p(\tau) \, d\tau.$$

---

[1]) Siehe Fußnote 2 auf S. 168, dort A. Sommerfeld, S. 868.

An sich würde sich hieraus wegen der Orthogonalität der Legendreschen Polynome für $p(\tau)$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{2m+1}{2}\beta\, P_m(\tau)$$

ergeben; da diese Reihe nicht konvergiert, setzte man

$$p(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\frac{2m+1}{2}\beta\,\varrho^m P_m(\tau)$$

mit reellem, positivem $\varrho<1$, und mache den Grenzübergang $\varrho\to 1$. Durch Zerlegung des Kosinus in eine Summe von zwei Exponentialfunktionen und Benutzung der Formel

$$(1-2s\tau+s^2)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}s^m P_m(\tau);\quad (s=\varrho\, e^{\pm i\beta})$$

findet man dann

$$\operatorname*{limes}_{\varrho\to 1} p(\tau)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\cos\beta-\tau+|\cos\beta-\tau|}{|\cos\beta-\tau|}};$$

die Wurzel hat dabei das Vorzeichen von $\cos\beta/2$, ist also jedenfalls für $0<\beta<\pi$ positiv zu nehmen. Nun erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\int_{-1}^{+1}e^{i\eta\tau}p(\tau)\,\mathrm{d}\tau=-\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}\left\{i\eta\, e^{i\eta\cos\beta}\int_0^{1+\cos\beta}\frac{e^{-i\eta\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma+\frac{e^{-i\eta}}{\sqrt{1+\cos\beta}}\right\}.$$

Daraus ergibt sich schließlich für $f(\eta)$ der Ausdruck:

$$f(\eta)=\frac{i\,e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}}\sin\beta\left\{i\sqrt{\eta}\,e^{i\eta\cos\beta}\int_0^{1+\cos\beta}\frac{e^{-i\eta\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\frac{e^{-i\eta}}{\sqrt{1+\cos\beta}}\right\}. \tag{23}$$

$$\left(\beta=\alpha+\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Die Formel (23) vereinfacht sich für spezielle Werte von α (bzw. β). Der physikalisch hauptsächlich interessante Fall $\alpha=0$ wurde schon in Satz 2 angegeben. Aber auch der Fall $\alpha=\frac{\pi}{2}$ liefert ein sehr einfaches Ergebnis; er ist zwar in Formel (23) nach der Art der Ableitung dieser Formel nicht mit enthalten, kann aber entweder durch einen Grenzübergang oder direkt aus (20) abgeleitet werden, indem man dort $\tau=-1$ setzt. Man erhält

$$f(\eta)=\frac{i\,e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-i\eta}}{\sqrt{\eta}};\quad \left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right),$$

und dies liefert also die Stromverteilung auf einer leitenden Halbebene, auf die eine ebene Welle trifft, die sich in der Richtung fortpflanzt, in der sich der Schirm (von der Kante fort) erstreckt, und deren elektrische Feldstärke die Richtung der Schirmkante besitzt.

7. Übergang zu den Formeln von Sommerfeld. Zur Auswertung des Integrals

$$u = \int_0^\infty f(\eta)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}\right) d\eta, \tag{24}$$

wobei für $f(\eta)$ die in (23) definierte Funktion einzusetzen ist, könnte man entweder durch Anwendung des Additionstheorems der Hankelschen Funktion oder durch eine auf die Variable x angewandte Fourier-Transformation zu dem von Sommerfeld angegebenen einfachen Ausdruck für u gelangen. Beide Wege sind indessen recht umständlich, und es soll deshalb hier die Übereinstimmung der Formel (24) mit dem von Sommerfeld gefundenen Wert für u lediglich auf einfache Weise verifiziert werden. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall $\alpha = 0$ (die ebene Welle fällt senkrecht auf den Schirm); diese Einschränkung ist übrigens nicht wesentlich. Nach Satz 2 ist dann

$$f(\eta) = i \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\pi/4}\, i^m \frac{2m+1}{2} \sin\left(\frac{2m+1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\eta}\, J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta);$$

andererseits ist aus (24) leicht zu entnehmen, daß

$$-2if(y) = \operatorname*{limes}_{x \to 0} \frac{\partial u}{\partial |x|}$$

ist, d. h. $f(y)$ ist proportional zu der Ableitung von u in Richtung der Schirmnormalen. Andererseits hat man nach Einführung von Polarkoordinaten r, φ durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

n den Funktionen

$$J_{\frac{2m+1}{2}}(r)\cos\frac{2m+1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad J_{\frac{2m+1}{2}}(r)\cos\left\{\frac{2m+1}{2}(\varphi+\pi)\right\}$$

Lösungen der Wellengleichung (2) (mit $\varkappa = 1$), deren Ableitung in Richtung der Normalen auf dem Schirm gerade die Werte

$$\frac{2m+1}{2}\,\frac{1}{y}\, J_{\frac{2m+1}{2}}(y) \sin\left(\frac{2m+1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

besitzen, während die Werte dieser Funktionen auf dem Schirm entgegengesetzt gleich, nämlich gleich

$$J_{\frac{2m+1}{2}}(y)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad -J_{\frac{2m+1}{2}}(y)\cos\left(\frac{2m+1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

sind. Bildet man also die Funktion

$$v = e^{i\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} J_{\frac{2m+1}{2}}(r)\, i^m \left[\cos\frac{2m+1}{2}\varphi + \cos\left\{\frac{2m+1}{2}(\varphi+\pi)\right\}\right], \quad (25)$$

so sind deren Randwerte auf dem Schirm gleich Null, während die Werte ihrer Ableitung in Richtung der Normalen dieselben sind wie für u; für $v - u$ sind diese Werte also gleich Null, während die Randwerte von $v - u$ auf dem Schirm nach Satz 2 gleich 1 sind. Also muß $v - u$ gleich $\cos x$ sein, da eine Lösung der Wellengleichung durch ihre Werte und die Werte ihrer Ableitung in der Normalenrichtung auf einem Flächenstück eindeutig bestimmt ist, wenn sie keine Singularitäten im Endlichen besitzt. Die elektrische Feldstärke E von einfallender plus gebeugter Welle berechnet sich also zu

$$E = e^{-ix} + u = -\cos x + e^{-ix} + v = \tfrac{1}{2}(e^{-ix} - e^{ix}) + v.$$

Die Reihe (25) für v läßt sich nun genau nach derselben Methode summieren, mit deren Hilfe oben [Formeln (22) bis (22c)] ein geschlossener Ausdruck für $f(\eta)$ abgeleitet wurde. Unter Berücksichtigung der nach Formel (22c) gemachten Bemerkung über das Vorzeichen ergibt sich für $-3/2\,\pi \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$:

$$v = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{ir\cos\varphi}\sqrt{r}\int_0^{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}} e^{-i r\tau^2}\,d\tau - e^{ir\cos(\varphi+\pi)}\sqrt{r}\int_0^{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}} e^{-i r\tau^2}\,d\tau\right\}.$$

Indem man noch für $\frac{1}{2}e^{\pm ix}$ die Ausdrücke $\frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4}\int_0^{\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau$ einsetzt und $\tau\sqrt{r}$ als neue Variable einführt, erhält man schließlich

$$E = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-ix}\int_{\sqrt{2r}\sin\frac{\varphi}{2}}^{\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau - e^{ix}\int_{\sqrt{2r}\cos\frac{\varphi}{2}}^{\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau\right\}, \quad \left(\text{für } -\frac{3\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

und dies ist die Formel von Sommerfeld.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.)

Elastische Schwingungen eines anisotropen Körpers von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds.

Von **R. Bechmann.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 15. November 1940.)

Es wird eine Lösung für die freien elastischen Eigenschwingungen eines anisotropen Körpers von parallelepipedischer Gestalt bei kräftefreien Oberflächen gegeben. Ausgehend von den elastischen Bewegungsgleichungen werden die sechs Deformationen $x_x \cdots x_y$ als selbständige Freiheitsgrade aufgefaßt, die im Schwingungszustand mittels der elastischen Wechselwirkungskoeffizienten miteinander gekoppelt sind. Die Frequenzgleichung ist durch eine Säkulargleichung sechster Ordnung gegeben, deren Elemente die Elastizitätsmoduln c_{ik} bzw. die Elastizitätskoeffizienten s_{ik} sind. Die Gleichungen für die Bewegungen werden abgeleitet. Die allgemeine Lösung enthält folgende Grenzfälle, die ausführlich untersucht werden: Längsschwingungen des Stabes, sowohl des unendlich dünnen, als auch des Stabes mit endlichem Querschnitt, die Dickenschwingungen einer unendlich großen Platte, die Längsschwingungen einer sehr dünnen Platte von endlicher Größe und schließlich die Eigenschwingungen des isotropen Körpers.

Die Lösungen für freie longitudinale Schwingungen von dünnen isotropen und anisotropen Stäben sind seit Kirchhoff[1]) und Voigt[2]) bekannt. Bei sehr dünnen Stäben ist die kinetische Energie in erster Näherung durch die Dehnungskomponente in Richtung der Stabachse gegeben, alle anderen Spannungskomponenten müssen an den Begrenzungsflächen und im Innern des Stabes verschwinden. Diese Voraussetzung ist bei Stäben endlichen Querschnittes oder bei Stäben, die zu Oberschwingungen hoher Ordnungszahl angeregt werden, nicht mehr zulässig. Rayleigh[3]) berücksichtigte bei der Darstellung des Stabes mit endlichem Querschnitt die von der periodischen Querkontraktion herrührende Querbewegung in der kinetischen Energie und gelangt zu einem Zusatzglied in der Schwingungsgleichung, das zur Folge hat, daß die Oberschwingungen nicht mehr harmonisch sind. Laue[4]) wies darauf hin, daß bei Berücksichtigung der Glieder der Querbewegung die Spannungskomponenten senkrecht zur Stabachse im Inneren des Stabes nicht mehr verschwinden können. Bei hinreichend dünnen Stäben

---

[1]) G. Kirchhoff, Ges. Abh. Leipzig 1882, S. 285. — [2]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, S. 673. — [3]) Lord Rayleigh, Theory of Sound, London 1894, Bd. 1, S. 251. — [4]) M. v. Laue, ZS. f. Phys. **34**, 347, 1925.

und Oberschwingungen niedriger Ordnungszahl ist der Einfluß der Rayleighschen Korrektion nur gering, die berechneten und experimentellen Abweichungen von den harmonischen Werten der Oberschwingungen stimmen überein. Mit zunehmender Dicke und wachsender Ordnungszahl der Oberschwingungen treten jedoch erhebliche Abweichungen auf, wie Giebe und Scheibe[1]) an piezoelektrisch angeregten Quarzstäben nachgewiesen haben.

Außer longitudinalen Schwingungen kann ein Stab Biegungs- und Drillungsschwingungen ausführen. Die Differentialgleichungen für die Biegungs- und Drillungsschwingungen eines unendlich dünnen Stabes aus anisotropem Material gibt Voigt[2]), wobei im allgemeinen die Kristallstruktur eine Kopplung der Biegungs- und Drillungsschwingungen hervorbringt.

Läßt man die Querdimensionen des Stabes bei konstanter Länge wachsen, so entsteht eine Platte. Bei einer Platte lassen sich drei Arten von Eigenschwingungen unterscheiden, erstens die von der Dicke der Platte abhängigen Eigenschwingungen, die Dickenschwingungen, zweitens Eigenschwingungen, die durch die flächenhafte Bewegung der Platte bestimmt sind, die Längsschwingungen, und schließlich die Biegungsschwingungen der Platte. Für alle drei Klassen sind die Differentialgleichungen der Bewegung für beliebig anisotropes Material bekannt[3]). Die Dickenschwingungen wurden bisher aus den Ansätzen von Christoffel[4]) und Voigt[5]) für die Ausbreitung ebener Wellen in anisotropen Körpern nur für unendlich große Platten berechnet[6]).

Im Anschluß an experimentelle Untersuchungen[1]) an piezoelektrisch erregten Stäben endlichen Querschnittes haben Giebe und Blechschmidt[7]) eine Lösung für die Eigenfrequenzen der longitudinalen Schwingungen eines rechteckigen Stabes von endlichem Querschnitt angegeben, die darauf beruht, die drei Ausdehnungen des Stabes als selbständige Freiheitsgrade zu betrachten und diese mittels der kinetischen Energie miteinander zu verknüpfen. Die drei Freiheitsgrade werden hierbei durch die longitudinalen Schwingungen eines mechanischen Systems mit Eigenfrequenzen festgelegt,

---

[1]) E. Giebe und A. Scheibe, Ann. d. Phys. (5) **9**, 93, 1931. — [2]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, S. 673, Formel (309). [3]) Ebenda S. 698, Formel (401), Diff.-Gl. für Längsschwingungen; S. 698, Formel (402), Diff.-Gl. für Biegungsschwingungen. — [4]) E. B. Christoffel, Ann. di Math. II, **8**, 193, 1877. — [5]) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, S. 787, Formel (541). — [6]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. **91**, 670, 1934. — [7]) E. Giebe u. E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. (5) **18**, 417, 1933.

die mit den Eigenfrequenzen dünner Stäbe, deren Längen mit den drei Dimensionen des Stabes übereinstimmen, gleichgesetzt werden. Diese aus punktmechanischen Überlegungen hervorgegangene Darstellung liefert eine experimentell prüfbare Frequenzgleichung, jedoch nicht die räumliche Verteilung des Schwingungsvorganges und ist insofern unvollständig.

Im folgenden geben wir für einen aus beliebigem kristallinen Material bestehenden Körper, der die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds besitzt, eine Darstellung der Eigenschwingungen als Lösung der allgemeinen Differentialgleichungen der elastischen Bewegung. Diese Lösung liefert eine einheitliche Darstellung der longitudinalen Schwingungen von Stäben mit endlichem Querschnitt, der Längs- und Dickenschwingungen von Platten. Sie berücksichtigt jedoch nicht die Biegungs- und Torsionsschwingungen von Stäben und Platten. Im allgemeinen Falle sind die letzteren jedoch ebenfalls mit den vorstehend genannten Schwingungen gekoppelt und die Lösung bedarf einer entsprechenden Erweiterung.

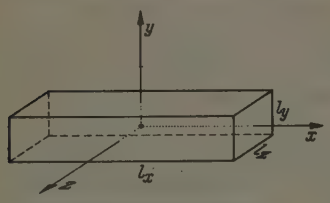


Fig. 1. Schematische Darstellung der Anordnung des Körpers.

Wir betrachten einen Körper von rechteckiger Gestalt, dessen Kanten parallel zur X-, Y-, Z-Achse (Fig. 1) eines Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Körpers liege, verlaufen. Die Begrenzungsflächen des betrachteten Körpers seien durch $x = \pm\, l_x/2$, $y = \pm\, l_y/2$, $z = \pm\, l_z/2$ festgelegt. Sind u, v, w die Komponenten der elastischen Verschiebung, X_x, $Y_y \ldots X_y$ die sechs Spannungskomponenten für die Flächenelemente senkrecht zu den drei Koordinatenrichtungen, so lauten die allgemeinen Bewegungsgleichungen, wobei ϱ die Dichte bedeutet, sofern Massenkräfte nicht vorhanden sind

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right),\\ \varrho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right),\\ \varrho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die sechs Komponenten der elastischen Deformation

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z},\\ y_z &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_x = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \quad x_y = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sind mit den sechs Spannungskomponenten einerseits durch die sechs Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} -X_x &= c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y, \\ -Y_y &= c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y, \\ &\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -X_y &= c_{61}x_x + c_{62}y_y + c_{63}z_z + c_{64}y_z + c_{65}z_x + c_{66}x_y, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei $c_{ik} = c_{ki}$ die adiabatischen Elastizitätsmoduln bedeuten, andererseits durch die sechs Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} -x_x &= s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y, \\ -y_y &= s_{21}X_x + s_{22}Y_y + s_{23}Z_z + s_{24}Y_z + s_{25}Z_x + s_{26}X_y, \\ &\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_y &= s_{61}X_x + s_{62}Y_y + s_{63}Z_z + s_{64}Y_z + s_{65}Z_x + s_{66}X_y, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei $s_{ik} = s_{ki}$ die adiabatischen Elastizitätskoeffizienten bedeuten, verknüpft. Durch Einführung von Gleichung (3) in die Gleichungen (1) erhält man die Differentialgleichungen der Bewegung in der üblichen Weise, die sich im Falle des isotropen Körpers beträchtlich vereinfachen lassen.

Wir betrachten nun die durch die Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z und die Tangentialspannungen Y_z, Z_x, X_y hervorgerufenen Bewegungen getrennt. Unter dem ausschließlichen Einfluß der einzelnen Spannungen, wobei jeweils die fünf übrigen Null gesetzt sind, ergibt sich aus Gleichung (1) das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x}, & \varrho\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_z}{\partial z}, & \varrho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_y}{\partial y}, & \varrho\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_y}{\partial y}, & \varrho\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_y}{\partial y}, \\ \varrho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_z}{\partial z}, & \varrho\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x}, & \varrho\frac{\partial^2 v_4}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wobei zur Unterscheidung der verschiedenen Bewegungen die Komponenten der Verschiebung mit den Indizes 1 bis 4 bezeichnet werden. Durch Differenzieren der Gleichung (5) nach den Koordinaten und entsprechender Zusammenfassung unter Berücksichtigung von (2) erhält man die sechs Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 x_x}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2}, & \varrho\frac{\partial^2 y_z}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2}\right), \\ \varrho\frac{\partial^2 y_y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2}, & \varrho\frac{\partial^2 z_x}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x^2}\right), \\ \varrho\frac{\partial^2 z_z}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}, & \varrho\frac{\partial^2 x_y}{\partial t^2} &= -\left(\frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Gleichungen setzen in allgemeiner Weise die gleichartigen Spannungen und Deformationen zueinander in Beziehung. Die Komponenten der Verzerrung $x_x \ldots x_y$ werden im folgenden als voneinander unabhängige Größen aufgefaßt, von denen jede für sich einen Schwingungszustand, der mit den übrigen durch bestimmte Wechselwirkungen verknüpft ist, darstellt. Wegen der Unabhängigkeit dieser einzelnen Größen sind die sogenannten Kompatibilitätsgleichungen nicht erfüllt. Man kann nun einerseits zu Differentialgleichungen für die Komponenten der elastischen Deformation gelangen, indem man in Gleichung (6) vermöge der Beziehungen (3) die Komponenten der Spannungen eliminiert, wodurch sich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial^2 x_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y),\\
\varrho \frac{\partial^2 y_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y),\\
\varrho \frac{\partial^2 z_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}(c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x + c_{36}x_y),\\
\varrho \frac{\partial^2 y_z}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(c_{41}x_x + c_{42}y_y + c_{43}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x + c_{46}x_y),\\
\varrho \frac{\partial^2 z_x}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(c_{51}x_x + c_{52}y_y + c_{53}z_z + c_{54}y_z + c_{55}z_x + c_{56}x_y),\\
\varrho \frac{\partial^2 x_y}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(c_{61}x_x + c_{62}y_y + c_{63}z_z + c_{64}y_z + c_{65}z_x + c_{66}x_y)
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ergibt. Andererseits kann man zu Differentialgleichungen für die Spannungskomponenten gelangen, wenn man in Gleichung (6) die Komponenten der elastischen Deformation durch Einführung der Beziehungen (4) eliminiert. Es ergibt sich für die Spannungskomponenten das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{11}X_x + s_{12}Y_y + s_{13}Z_z + s_{14}Y_z + s_{15}Z_x + s_{16}X_y) &= \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2},\\
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{21}X_x + s_{22}Y_y + s_{23}Z_z + s_{24}Y_z + s_{25}Z_x + s_{26}X_y) &= \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2},\\
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{31}X_x + s_{32}Y_y + s_{33}Z_z + s_{34}Z_z + s_{35}X_x + s_{36}Y_y) &= \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2},\\
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{41}X_x + s_{42}Y_y + s_{43}Z_z + s_{44}Y_z + s_{45}Z_x + s_{46}X_y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Y_z,\\
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{51}X_x + s_{52}Y_y + s_{53}Z_z + s_{54}Y_z + s_{55}Z_x + s_{56}X_y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)Z_x,\\
\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(s_{61}X_x + s_{62}Y_y + s_{63}Z_z + s_{64}Y_z + s_{65}Z_x + s_{66}X_y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)X_y.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

In dem Gleichungssystem (7) sind die sechs Deformationskomponenten $x_x \ldots x_y$ vermöge der Elastizitätsmoduln c_{ik}, in dem Gleichungssystem die sechs Spannungskomponenten $X_x \ldots X_y$ mittels der Elastizitätskoeffizienten s_{ik} miteinander gekoppelt. Die Gleichungen (7) und (8) stellen also ein System von sechs miteinander gekoppelten Freiheitsgraden dar, wobei die Kopplung der Deformationskomponenten, d. h. der Bewegungen durch einen potentiellen, die Kopplung der Spannungskomponenten durch einen kinetischen Vorgang erfolgt.

Für kräftefreie Oberflächen des Körpers gelten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 0, \quad Y_x = 0, \quad Z_x = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\frac{l_x}{2}, \\ X_y &= 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_y = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm\frac{l_y}{2}, \\ X_z &= 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_z = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm\frac{l_z}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ein partikuläres Integral des Gleichungssystems (7) für den parallelepipedischen rechtwinkligen Raum bei Annahme periodischer Schwingungen mit der Frequenz ω lautet

$$\left.\begin{aligned} x_x &= A\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad y_y = B\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad z_z = C\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \\ y_z &= S_1\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad z_x = S_2\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad x_y = S_3\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wobei

$$\Phi\,(xyz) = \sin k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right)\sin k_2\left(y - \frac{l_y}{2}\right)\sin k_3\left(z - \frac{l_z}{2}\right) \tag{10a}$$

die Normalfunktion des Parallelepipeds bedeutet, das das System der linearen Differentialgleichungen (7) in das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\omega^2 A &= k_1^2 \quad (c_{11}A + c_{12}B + c_{13}C + c_{14}S_1 + c_{15}S_2 + c_{16}S_3), \\ \varrho\,\omega^2 B &= k_2^2 \quad (c_{21}A + c_{22}B + c_{23}C + c_{24}S_1 + c_{25}S_2 + c_{26}S_3), \\ \varrho\,\omega^2 C &= k_3^2 \quad (c_{31}A + c_{32}B + c_{33}C + c_{34}S_1 + c_{35}S_2 + c_{36}S_3), \\ \varrho\,\omega^2 S_1 &= (k_2^2 + k_3^2)\,(c_{41}A + c_{42}B + c_{43}C + c_{44}S_1 + c_{45}S_2 + c_{46}S_3), \\ \varrho\,\omega^2 S_2 &= (k_3^2 + k_1^2)\,(c_{51}A + c_{52}B + c_{53}C + c_{54}S_1 + c_{55}S_2 + c_{56}S_3), \\ \varrho\,\omega^2 S_3 &= (k_1^2 + k_2^2)\,(c_{61}A + c_{62}B + c_{63}C + c_{64}S_1 + c_{65}S_2 + c_{66}S_3) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

überführt. Das Gleichungssystem (11) hat nur dann von Null verschiedene Lösungen für die Amplituden $A\,B\,C\,S_1\,S_2\,S_3$, wenn die Quadrate der Eigenfrequenzen ω Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22}-\frac{\varrho\omega^2}{k_2^2} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-\frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}-\frac{\varrho\omega^2}{k_2^2+k_3^2} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55}-\frac{\varrho\omega^2}{k_3^2+k_1^2} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66}-\frac{\varrho\omega^2}{k_1^2+k_2^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

sind, die sechs reelle positive Wurzeln besitzt. Ebenso läßt sich das Gleichungssystem (8) für den zugrunde gelegten Körper durch einen zu (10) analogen Ansatz

$$\left.\begin{aligned} X_x &= E\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad Y_y = H\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad Z_z = Z\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \\ Y_z &= \Xi_1\Phi(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad Z_x = \Xi_2\Phi(xyz)\,e^{i\omega t}, \quad X_y = \Xi_3\Phi\,(xyz)\,e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

wobei die Normalfunktion $\Phi\,(xyz)$ ebenfalls durch (10a) gegeben ist, lösen, der das Gleichungssystem (8) in das System linearer Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\omega^2\,(s_{11}E+s_{12}H+s_{13}Z+s_{14}\Xi_1+s_{15}\Xi_2+s_{16}\Xi_3) &= k_1^2\,E, \\ \varrho\omega^2\,(s_{21}E+s_{22}H+s_{23}Z+s_{24}\Xi_1+s_{25}\Xi_2+s_{26}\Xi_3) &= k_2^2\,H, \\ \varrho\omega^2\,(s_{31}E+s_{32}H+s_{33}Z+s_{34}\Xi_1+s_{35}\Xi_2+s_{36}\Xi_3) &= k_3^2\,Z, \\ \varrho\omega^2\,(s_{41}E+s_{42}H+s_{43}Z+s_{44}\Xi_1+s_{45}\Xi_2+s_{46}\Xi_3) &= (k_2^2+k_3^2)\,\Xi_1, \\ \varrho\omega^2\,(s_{51}E+s_{52}H+s_{53}Z+s_{54}\Xi_1+s_{55}\Xi_2+s_{56}\Xi_3) &= (k_3^2+k_1^2)\,\Xi_2, \\ \varrho\omega^2\,(s_{61}E+s_{62}H+s_{63}Z+s_{64}\Xi_1+s_{65}\Xi_2+s_{66}\Xi_3) &= (k_1^2+k_2^2)\,\Xi_3 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

überführt. Die Konstanten $E\,H\,Z\,\Xi_1\,\Xi_2\,\Xi_3$ sind nur dann von Null verschieden, falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_{11}-\frac{k_1^2}{\varrho\omega^2} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22}-\frac{k_2^2}{\varrho\omega^2} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33}-\frac{k_3^2}{\varrho\omega^2} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44}-\frac{k_2^2+k_3^2}{\varrho\omega^2} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55}-\frac{k_3^2+k_1^2}{\varrho\omega^2} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66}-\frac{k_1^2+k_2^2}{\varrho\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

verschwindet, die ebenfalls sechs reelle positive Wurzeln für ω^2 liefert. Die Wurzeln der Determinanten (12) und (15) müssen identisch sein, die beiden mit den Elastizitätsmoduln c_{ik} und den Elastizitätskoeffizienten s_{ik} gebildeten Frequenzgleichungen (12) und (15) lassen sich ineinander überführen. Multipliziert man die Determinante (12) mit der Determinante Δ, die aus dem Schema der Elastizitätskoeffizienten s_{ik} gebildet ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{vmatrix} \tag{16}$$

so entsteht, da zwischen den c_{ik} und s_{ik} die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} s_{ik} c_{ik} &= 1, \\ \sum_{i=1}^{6} s_{ik} c_{ih} &= 0, \end{aligned} \qquad h, k = 1, 2, \ldots, 6 \right\} \tag{17}$$

gelten, eine Determinante, die nach Multiplikation mit k_1^2, k_2^2, k_3^2 $(k_2^2 + k_3^2)$ $(k_2^2 + k_1^2)$ $(k_1^2 + k_2^2)$ mit der Determinante (15) identisch wird. Ebenso läßt sich die Determinante (15) durch Multiplikation mit der aus den c_{ik} gebildeten Determinante in die Gleichung (12) überführen.

Die Wellenzahlen k_1, k_2, k_3 bei kräftefreien Endflächen ergeben sich aus den Randbedingungen (9), die vermöge der Gleichungen (3) für den Ansatz (10) oder unmittelbar durch den Ansatz (13) für $x = \pm l_x/2$, $y = \pm l_y/2$, $z = \pm l_z/2$

$$\sin k_1 l_x = 0, \quad \sin k_2 l_y = 0, \quad \sin k_3 l_z = 0 \tag{18}$$

fordern, wonach

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{l_x}, \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{l_y}, \quad k_3 = \frac{n_3 \pi}{l_z}, \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \ldots \tag{19}$$

wird.

Die Gleichungen (12) bzw. (15) in Verbindung mit (20) liefern ein sechsfach unendliches System von Eigenfrequenzen, das durch Wechselwirkung von jeweils sechs Freiheitsgraden entsteht. Das Verhältnis der Amplituden $A : B : C : S_1 : S_2 : S_3$ der Deformationen bzw. der der Spannungen $E H Z \Xi_1 \Xi_2 \Xi_3$ sind entsprechend der Gleichungen (11) und (14) gleich den Verhältnissen der Minoren einer Zeile den Determinante (12) bzw. (15), in die die jeweilige Lösung von ω und die durch die Dimensionen

des Körpers und die Ordnung der Oberschwingungen gegebenen Werte von k einzuführen sind.

Die auf beliebige Schnittflächen parallel zu den Begrenzungsflächen des Körpers einwirkenden Gesamtkräfte sind

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\frac{l_y}{2}}^{+\frac{l_y}{2}}\int_{-\frac{l_z}{2}}^{+\frac{l_z}{2}}(X_x+Y_x+Z_x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{-\frac{l_z}{2}}^{+\frac{l_z}{2}}\int_{-\frac{l_x}{2}}^{+\frac{l_x}{2}}(X_y+Y_y+Z_y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\\ &\qquad\qquad \int_{-\frac{l_x}{2}}^{+\frac{l_x}{2}}\int_{-\frac{l_y}{2}}^{+\frac{l_y}{2}}(X_z+Y_z+Z_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Diese Ausdrücke verschwinden, falls die Ordnungszahlen n_i der Wellenzahlen k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) in einer der unter dem Integral stehenden Sinusfunktionen eine gerade Zahl sind. Dies bedeutet, daß Schwingungen einer geraden Ordnungszahl mit anderen durch die Gleichungen (12) oder (15) dargestellten Schwingungen, unabhängig davon, ob diese gerade oder ungerade Oberschwingungen sind, zu keinen Wechselwirkungen Anlaß geben.

Die Komponenten der Verschiebung u, v, w ergeben sich als Summen der in Gleichung (5) eingeführten Einzelverschiebungen. Für die Komponenten der Gesamtverschiebung folgt aus Gleichung (5)

$$\left.\begin{aligned} u = u_1+u_3+u_4 = \frac{1}{\varrho\omega^2}\Big[&k_1 E\cos k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_3\Xi_2\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\cos k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_2\Xi_3\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\cos k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)\Big]e^{i\omega t},\\ v = v_1+v_2+v_4 = \frac{1}{\varrho\omega^2}\Big[&k_2 H\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\cos k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_3\Xi_1\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\cos k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_1\Xi_3\cos k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)\Big]e^{i\omega t},\\ w = w_1+w_2+w_3 = \frac{1}{\varrho\omega^2}\Big[&k_3 Z\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\cos k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_2\Xi_1\sin k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\cos k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)+\\ &+k_1\Xi_2\cos k_1\Big(x-\tfrac{l_x}{2}\Big)\sin k_2\Big(y-\tfrac{l_y}{2}\Big)\sin k_3\Big(z-\tfrac{l_z}{2}\Big)\Big]e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Statt der Größen $E\,H\,Z\,\Xi_1\,\Xi_2\,\Xi_3$ lassen sich in (21) auch die Größen $A\,B\,C\,S_1\,S_2\,S_3$ einführen, die mit diesen nach (6), (10) und (13) durch die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{c} \varrho\,\omega^2\,A = -\,k_1^2\,E, \quad \varrho\,\omega^2\,B = -\,k_2^2\,H, \quad \varrho\,\omega^2\,C = -\,k_3^2\,Z, \\ \varrho\,\omega^2\,S_1 = -\,(k_2^2+k_3^2)\,\Xi_1, \qquad \varrho\,\omega^2\,S_2 = -\,(k_3^2+k_1^2)\,\Xi_2, \\ \varrho\,\omega^2\,S_3 = -\,(k_1^2+k_2^2)\,\Xi_3 \end{array}\right\} \quad (22)$$

verknüpft sind, wobei für ω die jeweils betrachtete Wurzel der Gleichung (12) bzw. (15) zu setzen ist.

Die Lösung der Gleichung (21) stellt einen Bewegungszustand dar, der aus drei sich längs den drei Achsen fortpflanzenden Bewegungen zusammengesetzt ist. Die Bewegungsrichtungen sind im allgemeinen gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt. Bezeichnet man die Komponenten der Bewegungen längs der X-, Y- und Z-Richtung mit I, II, III, so stellen sich die drei Teilbewegungen dar durch

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{matrix} u^{\mathrm{I}} \\ v^{\mathrm{I}} \\ w^{\mathrm{I}} \end{matrix}\right\} = \frac{k_1}{\varrho\,\omega^2}\left\{\begin{matrix} E \\ \Xi_3 \\ \Xi_2 \end{matrix}\right\} \cos k_1\left(x-\frac{l_x}{2}\right) \sin k_2\left(y-\frac{l_y}{2}\right) \sin k_3\left(z-\frac{l_z}{2}\right) e^{i\,\omega\,t}, \\ \left.\begin{matrix} u^{\mathrm{II}} \\ v^{\mathrm{II}} \\ w^{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\} = \frac{k_2}{\varrho\,\omega^2}\left\{\begin{matrix} \Xi_3 \\ H \\ \Xi_1 \end{matrix}\right\} \sin k_1\left(x-\frac{l_x}{2}\right) \cos k_2\left(y-\frac{l_y}{2}\right) \sin k_3\left(z-\frac{l_z}{2}\right) e^{i\,\omega\,t}, \\ \left.\begin{matrix} u^{\mathrm{III}} \\ v^{\mathrm{III}} \\ w^{\mathrm{III}} \end{matrix}\right\} = \frac{k_3}{\varrho\,\omega^2}\left\{\begin{matrix} \Xi_2 \\ \Xi_1 \\ Z \end{matrix}\right\} \sin k_1\left(x-\frac{l_x}{2}\right) \sin k_2\left(y-\frac{l_y}{2}\right) \cos k_3\left(z-\frac{l_z}{2}\right) e^{i\,\omega\,t}. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Die Richtungskosinus der drei Bewegungsrichtungen sind durch die Verhältnisse der Amplituden gegeben. Eine dieser je drei Gleichungen (23) hat den Charakter einer longitudinalen Bewegung, die beiden anderen den von transversalen Bewegungen. Die Gleichungen (23) zeigen, daß im anisotropen Körper bei jeder der möglichen Schwingungen gleichzeitig longitudinale und transversale Bewegungskomponenten auftreten. Infolge der Wechselwirkung zwischen den longitudinalen und den transversalen Bewegungen breiten sich stets longitudinale und transversale Bewegungszustände gleichzeitig aus. Longitudinale und transversale Bewegungen allein lassen sich im allgemeinen bei Kristallen nicht anregen. Da die Ausdrücke für die Amplituden im allgemeinen nicht Null werden, so ist die Bewegungsrichtung gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt, so daß der Begriff der rein longitudinalen und der rein transversalen Bewegung in Kristallen scheinbar verloren geht.

Mit Gleichung (21) ist die allgemeine Lösung für die elastischen Schwingungen des Kontinuums von der vorausgesetzten Form gegeben. Die vollständige Lösung, die sich an einen vorgegebenen Bewegungszustand oder an eine vorgegebene Kräfteverteilung anpaßt, ergibt sich durch Summierung der Bewegungskomponenten der verschiedenen Ordnungszahlen.

Wir betrachten nun einige spezielle Fälle der vorstehenden Lösung:

1. Werden zwei Dimensionen des Körpers klein gegen die dritte, so entsteht ein Stab, die beiden Wellenzahlen für die Querdimensionen des Stabes werden groß gegen die der Längsdimension. Im Grenzfall eines nach der X-Achse ausgedehnten unendlich dünnen Stabes werden k_2 und k_3 unendlich groß, Gleichung (12) bzw. (15) reduziert sich für diesen Fall zu

$$\omega^2 = \frac{k_1^2}{\varrho s_{11}}.$$

Für die Eigenschwingungen des unendlich dünnen Stabes erhält man unter Berücksichtigung von (19) den bekannten Ausdruck

$$\omega = \frac{n\pi}{lx}\sqrt{\frac{1}{\varrho s_{11}}}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{24}$$

Die Gleichungen (12) bzw. (15) liefern im Grenzfall des unendlich dünnen Stabes eine rein longitudinale Eigenschwingung, die sich bis auf den richtungsabhängigen Elastizitätskoeffizienten s von der Eigenschwingung des isotropen Stabes nicht unterscheidet.

2. Werden zwei Dimensionen des Körpers groß gegen die dritte, etwa die Dimensionen in Richtung Y und Z groß gegen die in der X-Richtung, so entsteht eine Platte mit einer zur Y–Z-Ebene parallelen Fläche. Die Wellenzahlen k_2 und k_3 werden in diesem Falle klein gegen k_1, im Grenzfall einer unendlich großen Platte verschwinden k_2 und k_3. Als Lösung der Eigenschwingungen erhält man im Falle der endlichen Platte einerseits diejenigen für die Dickenschwingungen der Platte, andererseits die für die Längsschwingungen der Platte, im Grenzfall der unendlich großen Platte erhält man allein diejenigen für die Dickenschwingungen. Die Gleichung (12) bzw. (15) reduziert sich für eine nach der Y–Z-Richtung unendlich ausgedehnte Platte nach einer kleinen Umrechnung zu

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & c_{15} & c_{16} \\ c_{51} & c_{55} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & c_{56} \\ c_{61} & c_{65} & c_{66} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

einer kubischen Gleichung für die Eigenfrequenzen mit drei reellen positiven Wurzeln. Wir haben im vorstehenden bisher keine Annahme über die Symmetrie des Kristalls gemacht, vielmehr setzen wir einen Kristall des triklinen Systems voraus, für den kein ausgezeichnetes Koordinatenachsensystem existiert. Die Gleichung (25) muß also auch bei einer beliebigen Drehung des Koordinatensystems gelten, wobei statt der darin auftretenden c_{ik} die entsprechenden transformierten Moduln c'_{ik} einzuführen sind. Für eine beliebige Drehung des Koordinatensystems nach dem Schema

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

(26)

gelten nach Voigt für die in (25) auftretenden Elastizitätsmoduln c'_{11}, c'_{55}, c'_{66}, c'_{15}, c'_{16}, c'_{56} Transformationsgleichungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet sei.

Führt man die von Christoffel herrührenden elastischen Größen

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= c_{11}l_1^2+c_{66}m_1^2+c_{55}n_1^2+2c_{56}m_1n_1+2c_{15}n_1l_1+2c_{16}l_1m_1,\\
\Gamma_{22} &= c_{66}l_1^2+c_{22}m_1^2+c_{44}n_1^2+2c_{24}m_1n_1+2c_{46}n_1l_1+2c_{26}l_1m_1,\\
\Gamma_{33} &= c_{55}l_1^2+c_{44}m_1^2+c_{33}n_1^2+2c_{34}m_1n_1+2c_{35}n_1l_1+2c_{45}l_1m_1,\\
\Gamma_{23} &= c_{56}l_1^2+c_{24}m_1^2+c_{34}n_1^2+(c_{23}+c_{44})m_1n_1+(c_{36}+c_{45})n_1l_1\\
&\qquad +(c_{25}+c_{46})l_1m_1,\\
\Gamma_{13} &= c_{15}l_1^2+c_{46}m_1^2+c_{35}n_1^2+(c_{36}+c_{45})m_1n_1+(c_{31}+c_{55})n_1l_1\\
&\qquad +(c_{14}+c_{56})l_1m_1,\\
\Gamma_{12} &= c_{16}l_1^2+c_{26}m_1^2+c_{45}n_1^2+(c_{25}+c_{46})m_1n_1+(c_{14}+c_{56})n_1l_1\\
&\qquad +(c_{12}+c_{66})l_1m_1
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

ein, so lassen sich die hier auftretenden transformierten Elastizitätsmoduln in der Form

$$\left.\begin{aligned}
c'_{11} &= \Gamma_{11}l_1^2+\Gamma_{22}m_1^2+\Gamma_{33}n_1^2+2\Gamma_{23}m_1n_1+2\Gamma_{13}n_1l_1\\
&\qquad +2\Gamma_{12}l_1m_1,\\
c'_{66} &= \Gamma_{11}l_2^2+\Gamma_{22}m_2^2+\Gamma_{33}n_2^2+2\Gamma_{23}m_2n_2+2\Gamma_{13}n_2l_2\\
&\qquad +2\Gamma_{12}l_2m_2,\\
c'_{55} &= \Gamma_{11}l_3^2+\Gamma_{22}m_3^2+\Gamma_{33}n_3^2+2\Gamma_{23}m_3n_3+2\Gamma_{13}n_3l_3\\
&\qquad +2\Gamma_{12}l_3m_3,\\
c'_{56} &= \Gamma_{11}l_2l_3+\Gamma_{22}m_2m_3+\Gamma_{33}n_2n_3+\Gamma_{23}(m_2n_3+m_3n_2)\\
&\qquad +\Gamma_{13}(n_2l_3+n_3l_2)+\Gamma_{12}(l_2m_3+l_3m_2),\\
c'_{15} &= \Gamma_{11}l_3l_1+\Gamma_{22}m_3m_1+\Gamma_{33}n_3n_1+\Gamma_{23}(m_3n_1+m_1n_3)\\
&\qquad +\Gamma_{13}(n_3l_1+n_1l_3)+\Gamma_{12}(l_3m_1+l_1m_3),\\
c_{16} &= \Gamma_{11}l_1l_2+\Gamma_{22}m_1m_2+\Gamma_{33}n_1n_2+\Gamma_{23}(m_1n_2+m_2n_1)\\
&\qquad +\Gamma_{13}(n_1l_2+n_2l_1)+\Gamma_{12}(l_1m_2+l_2m_1)
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

schreiben. Das durch Gleichung (28) gegebene System besitzt aber die Form eines Transformationsschemas eines mit den Komponenten Γ_{ik} gebildeten Tensors zweiter Ordnung. Setzen wir in (28)

$$\left.\begin{aligned} c'_{11} &= \Gamma_{11}, & c'_{66} &= \Gamma_{22}, & c'_{55} &= \Gamma_{33}, \\ c'_{56} &= \Gamma_{23}, & c'_{15} &= \Gamma_{13}, & c'_{16} &= \Gamma_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

so ist (28) eine Bestimmungsgleichung für diejenige Transformation, die die Γ_{ik} in sich selbst überführt. Das Gleichungssystem (28) in Verbindung mit (29) legt demnach vermöge der Komponenten Γ_{ik} für jede Richtung $l_1\, m_1\, n_1$ in dem ursprünglichen Koordinatensystem durch seine Lösung ein ausgezeichnetes Koordinatentripel durch die Richtungscosinuse $l'_1 \ldots n'_3$ fest, auf das sich die Schwingungsvorgänge beziehen. Die Frequenzgleichung (25) geht durch Einführung von (29) über in

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & \Gamma_{13} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{23} & \Gamma_{22} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Die Gleichung (30) ist bis auf die belanglose Vertauschung der Indizes 2 und 3 identisch mit der früher abgeleiteten Frequenzgleichung für die Dickenschwingungen einer unendlich großen kristallinen Platte, deren Orientierung durch die Normale mit den Richtungskosinus $l_1\, m_1\, n_1$ festgelegt ist [1]). Eine analoge Darstellung bei einer Transformation nach dem Schema (26) erhält man für eine Platte, die parallel zur Z—X-Ebene oder parallel zur X—Y-Ebene angeordnet ist. Die hier auftretenden Elastizitätsmoduln sind: $c'_{22}, c'_{44}, c'_{66}, c'_{24}, c'_{26}, c'_{46}$ bzw. $c'_{33}, c'_{44}, c'_{55}, c'_{34}, c'_{35}, c'_{45}$. Für diese beiden Gruppen erhält man eine dem Gleichungssystem (28) analoge Darstellung, wobei die Christoffelschen Größen (27) sich auf die Richtungskosinus $l_2\, m_2\, n_2$ bzw. $l_3\, m_3\, n_3$ des ursprünglichen Koordinatensystems beziehen.

Der Bewegungszustand der unendlich großen Platte ergibt sich aus Gleichung (21) unter Berücksichtigung von (22) durch Übergang zu Null der Wellenkoeffizienten k_2 und k_3, wobei B, C und S_1 Null werden. Die

---

[1]) R. Bechmann, Hochfrequ. u. Elektroak. **44**, 145, 1934.

Bewegungsgleichungen für die Dickenschwingungen der unendlich großen Platte lauten:

$$\left.\begin{aligned} u = u_1 &= -\frac{1}{k_1} A \cos k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) e^{i\omega t}, \\ v = v_4 &= -\frac{1}{k_1} S_3 \cos k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) e^{i\omega t}, \\ w = w_3 &= -\frac{1}{k_1} S_2 \cos k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei die Größen A, S_2 und S_3 Minoren einer Zeile der Determinante (25) für die jeweilige Eigenfrequenz ω sind. Die erste Gleichung (31) hat den Charakter einer longitudinalen Bewegung, die beiden anderen den von transversalen Bewegungen. Im allgemeinen sind A, S_2 und S_3 sämtlich von Null verschieden, d. h. alle drei Bewegungszustände treten gleichzeitig auf. Bei Berechnung der Amplituden A, S_3, S_2 als Minoren der Frequenzgleichung (30) unter Verwendung der Elastizitätskoeffizienten Γ_{ik} beziehen sich die Verrückungen u, v, w auf das durch Gleichung (28) in Verbindung mit (29), der Richtung $l_1\, m_1\, n_1$ der Plattennormale zugeordnete spezielle Koordinatensystem mit den Richtungskosinus $l_1' \ldots n_3'$. An Stelle der in Richtung der Plattennormale laufenden Koordinate x ist in (31) die Koordinate $s = l_1 x + m_1 y + n_1 z$ zu setzen.

3. Als dritten speziellen Fall betrachten wir die Längsschwingung einer Platte von endlicher Größe. Die Ausdehnungen in zwei Richtungen sind groß gegen die dritte, etwa die Ausdehnungen in Richtung Y und Z groß gegen die Ausdehnung parallel zur X-Achse. Bei den Betrachtungen der Längsschwingungen der zu der Y—Z-Ebene parallelen Platte kann man in erster Näherung den Einfluß der Plattendicke vernachlässigen und zu einer unendlich dünnen Platte, für die $k_1 = \infty$ wird, übergehen. Die Frequenzgleichung (15) reduziert sich für diesen speziellen Fall der Längsschwingungen einer unendlich dünnen Platte zu

$$\begin{vmatrix} s_{22} - \dfrac{k_2^2}{\varrho\omega^2} & s_{23} & s_{24} \\ s_{32} & s_{33} - \dfrac{k_3^2}{\varrho\omega^2} & s_{34} \\ s_{42} & s_{43} & s_{44} - \dfrac{k_2^2 + k_3^2}{\varrho\omega^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{32}$$

eine kubische Gleichung mit drei reellen positiven Wurzeln. Die Verhältnisse der zugehörigen Amplituden H, Z, Ξ_1 sind gleich den Verhältnissen der Minoren einer Zeile von (32), während die Amplituden E, Ξ_2, Ξ_3 in dem vorliegenden Fall verschwindender Plattendicke Null sind. Die sich aus (21)

ergebende Darstellung für die Bewegung der Längsschwingungen einer unendlich dünnen Platte lautet

$$\left.\begin{aligned} v = v_1 + v_2 = \frac{1}{\varrho\omega^2}\Big[k_2 H \cos k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \sin k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) + \\ + k_3 \Xi_1 \sin k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \cos k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big)\Big] e^{i\omega t}, \\ w = w_1 + w_2 = \frac{1}{\varrho\omega^2}\Big[k_3 Z \sin k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \cos k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) + \\ + k_2 \Xi_1 \cos k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \sin k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big)\Big] e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Man erkennt, daß auch im Falle der Längsschwingungen bei anisotropen Platten die longitudinalen mit einer transversalen Schwingung gekoppelt sind. Die durch Gleichung (83) dargestellte Bewegung läßt sich auffassen als Superposition zweier parallel zur Y- bzw. Z-Achse verlaufender Bewegungen mit den Komponenten v^{II}, w^{II} bzw. v^{III}, w^{III}

$$\left.\begin{aligned} v^{II} &= \frac{1}{\varrho\omega^2} k_2 H \cos k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \sin k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) e^{i\omega t}, \\ w^{II} &= \frac{1}{\varrho\omega^2} k_2 \Xi_1 \cos k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \sin k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) e^{i\omega t}, \\ v^{III} &= \frac{1}{\varrho\omega^2} k_3 \Xi_1 \sin k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \cos k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) e^{i\omega t}, \\ w^{III} &= \frac{1}{\varrho\omega^2} k_3 Z \sin k_2\Big(y - \frac{l_y}{2}\Big) \cos k_3\Big(z - \frac{l_z}{2}\Big) e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (83a)$$

Die Bewegungsrichtungen sind gegen die Fortpflanzungsrichtungen der Schwingungen geneigt, und zwar ist der Neigungswinkel α der Bewegungsrichtung gegen die Y-Achse der ersten bzw. der Neigungswinkel β der Bewegungsrichtung gegen die Z-Achse der zweiten Bewegung durch die Beziehungen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w^{II}}{v^{II}} = \frac{\Xi_1}{H}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{v^{III}}{w^{III}} = \frac{\Xi_1}{Z} \quad (84)$$

bestimmt. Die Gleichungen (83) liefern die Knotenlinien der Bewegung, die sich aus $v = 0$ bzw. $w = 0$ ergeben. Im Falle endlicher Plattendicke läßt sich für kleine Werte von $1/k_1$ eine Entwicklung der Gleichung (15) durchführen und leicht ein Näherungsgesetz aufstellen. Auf die Durchführung sei hier verzichtet.

4. Wir betrachten schließlich noch den Stab mit endlichem Querschnitt. Die Eigenfrequenzen ergeben sich hierbei wieder aus Gleichung (15). Wir beschränken uns jedoch auf kristallines Material des rhombischen, tetragonalen, hexagonalen oder regulären Systems. Bei diesen Kristallklassen

verschwinden die Koeffizienten der Wechselwirkung zwischen longitudinalen und transversalen Deformationen, die Elastizitätsmoduln c_{ik} bzw. die Elastizitätskoeffizienten s_{ik} mit den Indizes $i = 1, 2, 3$, $k = 4, 5, 6$, so daß Wechselwirkungen zwischen longitudinalen und transversalen Bewegungen nicht auftreten. Die aus (15) folgende Frequenzgleichung für longitudinale Vorgänge lautet

$$\begin{vmatrix} s_{11} - \frac{k_1^2}{\varrho\omega^2} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - \frac{k_2^2}{\varrho\omega^2} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - \frac{k_3^2}{\varrho\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

mit den zugehörigen Amplituden EHZ als Minoren von (35). Die Bewegungsgleichungen für den vorliegenden Fall des Stabes von rechteckigem Querschnitt lauten nach (21)

$$\left.\begin{aligned} u = u_1 &= \frac{k_1}{\varrho\omega^2} E \cos k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) \sin k_2\left(y - \frac{l_y}{2}\right) \sin k_3\left(z - \frac{l_z}{2}\right) e^{i\omega t}, \\ v = v_1 &= \frac{k_2}{\varrho\omega^2} H \sin k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) \cos k_2\left(y - \frac{l_y}{2}\right) \sin k_3\left(z - \frac{l_z}{2}\right) e^{i\omega t}, \\ w = w_1 &= \frac{k_3}{\varrho\omega^2} Z \sin k_1\left(x - \frac{l_x}{2}\right) \sin k_2\left(y - \frac{l_y}{2}\right) \cos k_3\left(z - \frac{l_z}{2}\right) e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

eine Lösung, die die eingangs von Laue an die Lösung für den Stab mit endlichem Querschnitt gestellte Bedingung erfüllt.

Für den Fall eines sehr dünnen nach der X-Achse ausgedehnten Stabes erhält man aus (35) durch Übergang zu so kleinen Werten von k_1^2/k_2^2 und k_1^2/k_3^2, daß Glieder, die Produkte dieser Größen enthalten, vernachlässigt werden können, in erster Näherung

$$\omega = k_1 \sqrt{\frac{1}{\varrho s_{11}}} \left\{1 - \frac{k_1^2}{2}\left[\frac{1}{k_2^2}\left(\frac{s_{12}}{s_{11}}\right)^2 + \frac{1}{k_3^2}\left(\frac{s_{13}}{s_{11}}\right)^2\right]\right\}. \qquad (37)$$

Führt man nach (19)

$$k_1 = \frac{n\pi}{l_x}\ (n = 1, 2, 3 \ldots), \quad k_2 = \frac{\pi}{l_y}, \quad k_3 = \frac{\pi}{l_z}$$

ein, d. h. betrachtet man nur die Grundschwingungen der Querbewegung, so ergibt sich für die Eigenfrequenzen eines dünnen Stabes unter näherungsweiser Berücksichtigung des Einflusses der Querbewegung aus (37) der Ausdruck

$$\omega = \frac{n\pi}{l_x} \sqrt{\frac{1}{\varrho s_{11}}} \left\{1 - \frac{n^2}{2 l_x^2}\left[l_y^2\left(\frac{s_{12}}{s_{11}}\right)^2 + l_z^2\left(\frac{s_{13}}{s_{11}}\right)^2\right]\right\}, \qquad (38)$$

der mit dem Ausdruck für die Eigenfrequenzen eines Stabes mit Berücksichtigung der Rayleighschen Dickenkorrektion bis auf einen in (38) fehlenden Faktor $\pi^2/12$ zu den Korrekturgliedern identisch wird. Multipliziert man die Gleichung (35) mit der Determinante D

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \tag{39}$$

so geht diese über in eine Gleichung, die aus (12) entsteht, wenn dort entsprechend der hier gemachten Voraussetzung über die s_{ik} die transversalen Bewegungen mit den longitudinalen nicht mehr gekoppelt sind

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{\varrho\omega^2}{k_1^2} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \frac{\varrho\omega^2}{k_2^2} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \frac{\varrho\omega^2}{k_3^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{40}$$

deren Wurzeln mit denen von (35) identisch werden. Im Grenzfalle einer nach der Y–Z-Achse unendlich ausgedehnten Platte erhält man aus (40) für die Eigenfrequenz der longitudinalen Dickenschwingung den Ausdruck

$$\omega = \frac{n\pi}{l_x}\sqrt{\frac{c_{11}}{\varrho}} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{41}$$

Eine Betrachtung der aus Gleichung (40) folgenden Amplitudenverhältnisse $B : A$ und $C : A$ ergibt in dem Bereich $l_y, l_z, < l_x$, also für den Stab, negative Werte, im Bereich $l_y,\ l_z > l_x$, d. h. für die Platte positive Werte, sofern man sich auf die die Schwingungen längs l_x beschreibende Wurzel von (40) bezieht. Bei longitudinalen Schwingungen des Stabes wird in der Halbperiode der Verlängerung der Stabquerschnitt verkleinert, in der Halbperiode der Verkürzung der Stabquerschnitt vergrößert, bei longitudinalen Dickenschwingungen der Platte dagegen dehnt sich diese in der einen Halbperiode allseitig aus und zieht sich in der Gegenperiode allseitig zusammen.

Wir gehen schließlich noch zu dem isotropen Körper über, für den $s_{11}, s_{22}, s_{33} = s$; $s_{12}, s_{13}, s_{23} = s_1$ wird. Die Gleichung (35) geht dabei nach einer kleinen Umformung über in

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{k_1^2}{\varrho s} & -\mu\omega^2 & -\mu\omega^2 \\ -\mu\omega^2 & \omega^2 - \frac{k_2^2}{\varrho s} & -\mu\omega^2 \\ -\mu\omega^2 & -\mu\omega^2 & \omega^2 - \frac{k_3^2}{\varrho s} \end{vmatrix} = 0, \tag{42}$$

wobei $\mu = -s_1/s$ die Poissonsche Konstante bedeutet, eine Gleichung, die bereits früher in anderer Form von Giebe und Blechschmidt[1]) angegeben wurde, wobei dort für den Kopplungskoeffizienten empirisch $q = -\mu$ eingeführt wurde. Damit ist auch das Vorzeichen des Kopplungskoeffizienten q geklärt, das bei dem dortigen Ansatz unbestimmt blieb.

Damit sind die wesentlichsten Spezialfälle, die sich aus dem allgemeinen Ansatz ergeben, erledigt. Zur experimentellen Prüfung der vorstehend gegebenen Lösung der Eigenschwingungen eines anisotropen Körpers kann man zweckmäßig auf piezoelektrisch erregte Platten, insbesondere auf Quarzplatten, zurückgreifen. Die experimentell ermittelten Werte für die Eigenfrequenzen von Dickenschwingungen von Quarzplatten, deren Längsausdehnung groß gegen die Dicke ist, stehen in befriedigender Übereinstimmung mit den aus Gleichung (30) berechneten Werten, wie wir früher gezeigt haben[2]). Es ist beabsichtigt, die Lösung der Gleichung (32) für die Längsschwingungen dünner Platten näher zu betrachten und mit experimentell gewonnenen Werten für Quarzplatten zu vergleichen. Es läßt sich dabei eine Prüfung des vorstehenden Ansatzes für Längsschwingungen sowohl hinsichtlich der Frequenz als auch der Verteilung der Bewegung durchführen, da sich außer den Eigenfrequenzen der Platten die Lage der Knotenlinien der Bewegung in einfacher Weise experimentell ermitteln läßt. Die Darstellung der Eigenschwingungen ist, wie eingangs erwähnt, auf die andere Gruppe von Eigenschwingungen, die Biegungs- und Drillungsschwingungen zu erweitern, um zu einer völligen Beschreibung der möglichen Bewegungszustände des betrachteten anisotropen Körpers zu gelangen.

---

[1]) E. Giebe u. E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. (V) **18**, 417, 1933. — [2]) R. Bechmann, ZS. f. Phys. **91**, 670, 1934; Hochfrequ. u. Elektroak. **44**, 145, 1934.

Über die Strahlungsfelder von Pr^{+++}- und Nd^{+++}-Ionen in hexagonalen Salzkristallen.

Von **K.-H. Hellwege** in Göttingen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. November 1940.)

Es werden an hexagonalen Einkristallen von $Pr_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$ und $Nd_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$ die Strahlungsfelder der Pr^{+++}- und Nd^{+++}-Ionen ausgemessen. Bei allen 34 untersuchten Linien handelt es sich um im Kristallfeld erzwungene elektrische Dipolstrahlung. Diese sowie andere Messungen von Deutschbein an Europiumsalzen bestätigen die von van Vleck unter der Annahme eines kubischen Kristallfeldes gerechnete Theorie verbotener Übergänge in Kristallen.

1. Einleitung. Die linienhaften Spektren der festen Salze von Seltenen Erden (S.E.) werden allgemein durch Elektronensprünge innerhalb der $4f$-Schalen der S.E.-Ionen gedeutet, also als für elektrische Dipolstrahlung freier Ionen verbotene Übergänge, die im Kristallfeld erzwungen werden. In einer Übersicht über die Möglichkeiten für das Auftreten solcher verbotener Strahlung hat van Vleck[1]) unter der Annahme von Russell-Saunders-Kopplung folgende Fälle diskutiert:

1. Quadrupolstrahlung[2]). Für sie bleiben Übergänge mit $\Delta L > 2$, $\Delta J > 2$ sowie die Übergänge $J = 0 \to J = 0$, $L = 0 \to L = 0$ und $L = 0 \to L = 1$ verboten.

2. Magnetische Dipolstrahlung[2]). Für sie bleiben Übergänge mit $\Delta J > 1$, $\Delta L > 1$ sowie die Übergänge $J = 0 \to J = 0$, $L = 0 \to L = 0$ verboten.

3. Elektrische Dipolstrahlung. Für ihr Auftreten ist nötig, daß das Kristallfeld zum absorbierenden Ion unsymmetrisch ist. Diese Unsymmetrie kann bedingt sein entweder durch eine Unsymmetrie der Punktlagen im Kristallgitter oder durch die Unsymmetrie von Wärmeschwingungen. Im ersten Falle sind alle Übergänge mit ΔJ- und ΔL-Werten bis 5 einschließlich, im zweiten Falle alle Übergänge bis 4 einschließlich erlaubt, wenn der Rechnung ein vorwiegend kubisches Kristallfeld zugrunde liegt.

Rückschlüsse auf die Natur des atomaren Strahlers hat zuerst Deutschbein[3]) aus dem Polarisationszustand der emittierten oder absorbierten Strahlung gezogen.

---

[1]) J. H. van Vleck, Journ. Phys. Chem. **41**, 67, 1937. — [2]) Auf diese Strahlung hat das Kristallfeld keinen Einfluß. Die Übergangsregeln sind dieselben wie bei freien Atomen. — [3]) O. Deutschbein, Ann. Phys. (5) **36**, 183, 1939.

Man bekommt durch solche Untersuchungen die Möglichkeit, die van Vleckschе Theorie zu prüfen, die angeführten Fälle zu unterscheiden und damit Aufschluß über die Berechtigung des der Rechnung zugrunde gelegten Kristallfeldes zu erhalten. Ferner ist zu hoffen, daß durch Untersuchung des Strahlungsfeldes sich charakteristische Eigenschaften der einzelnen Komponenten eines im Kristallfeld aufgespaltenen Ionenterms herausschälen lassen.

2. Experimentelle Ergebnisse.

Die Experimente schlossen sich an früher mitgeteilte Untersuchungen an, in denen die Absorptionsspektren von hexagonalen Doppelnitraten von Praseodym und Neodym bereits bei verschiedener Orientierung des elektrischen Lichtvektors untersucht worden waren[1]). Die Kristalle wurden damals senkrecht zur optischen Achse durchstrahlt und der elektrische Vektor stand einmal parallel und einmal senkrecht zur Achse. In Ergänzung dazu wurden jetzt mit ungeänderter optischer Anordnung dieselben, in flüssiger Luft gekühlten Kristalle mit natürlichem Licht parallel zur optischen Achse durchstrahlt ($S \parallel X$). Der Vergleich der drei so erhaltenen Spektren liefert alle nötigen Daten zur Bestimmung des Strahlungsfeldes in einachsigen Kristallen.

In den Tabellen 1 und 2 sind die Ergebnisse für insgesamt 34 reine Elektronensprunglinien von $Pr_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$ und $Nd_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$ zusammengestellt.

Die erste Spalte gibt den Elektronenübergang, die zweite die Wellenzahlen sowie die in den früheren Arbeiten benutzte Bezeichnung der Linien. Dabei gehen alle Linien mit I von der untersten Komponente des Grundzustandes, alle Linien mit II von der nächsthöheren Komponente des Grundzustandes aus. Die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bezeichnen die aufeinander folgenden Komponenten des oberen Zustandes. Die drei folgenden Spalten enthalten die Angaben über das Strahlungsfeld. Ein + bedeutet, daß das Ion in der angegebenen Richtung und Polarisation strahlt, ein —, daß es nicht strahlt. Ein + in der Spalte 4 z. B. bedeutet also, daß die Linie im Spektrum auftritt, wenn der Kristall senkrecht zur optischen Achse ($S \perp X$) mit ebenfalls senkrecht zur Achse polarisiertem Licht ($\mathfrak{E} \perp X$) durchstrahlt wird, ein —, daß die Linie in dem so aufgenommenen Spektrum fehlt. Die letzte Spalte enthält die zusammenfassende Deutung des Befundes. Die Zeichen $\parallel$ und $\perp$ beziehen sich auf die optische Achse, das

[1]) K.-H. Hellwege, ZS. f. Phys. **113**, 192, 1939; A. Hellwege, geb. Roever, Ann. d. Phys. (5) **37**, 226, 1940.

Tabelle 1. Linien des $Pr_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$.

1 Übergang	2 Linie und Wellenzahl in cm^{-1}	3 $S \perp X$ $\mathfrak{E} \parallel X$	4 $S \perp X$ $\mathfrak{E} \perp X$	5 $S \parallel X$ $\mathfrak{E} \perp X$	6 Orientierung des elektrischen Dipols
$^3H_4 \rightarrow {}^1G_4$	I a 16 873,3	+	+	+	○
$\Delta S = 1$	I b 16 897,2	+	−	−	∥
$\Delta L = 1$	I c 16 922,4	+	+	+	○
$\Delta J = 0$	I d 16 935,9	−	+	+	⊥
oder					
$^3H_4 \rightarrow {}^1J_6$	II a 16 776,7	+	+	+	○
$\Delta S = 1$	II b				
$\Delta L = 1$					
$\Delta J = 2$	II c 16 826,7	+	+	+	○
	I a 20 800,7	+	−	−	∥
$^3H_4 \rightarrow {}^3P_0$	I b 20 842,7	−	+	+	⊥
$\Delta S = 0$					
$\Delta L = 4$	II a				
$\Delta J = 4$	II b 20 744,6	−	+	+	⊥
	I a 21 422,4	−	+	+	⊥
$^3H_4 \rightarrow {}^3P_1$	I b 21 461,1	+	+	+	○
$\Delta S = 0$					
$\Delta L = 4$	II a 21 319,3	−	+	+	⊥
$\Delta J = 3$	II b 21 361,6	+	−	−	∥

Zeichen ○ bedeutet einen Übergang mit in erster Näherung kugelsymmetrischem Strahlungsfeld (zwei senkrecht zueinander stehende Dipole oder ein frei drehbarer Dipol). Beim Nd-Salz ist die Kugelsymmetrie in diesen Fällen sehr gut ausgebildet: die Linien haben in allen Richtungen praktisch dieselbe Intensität. Bei den entsprechenden Pr-Linien dagegen sind merkliche Intensitätsunterschiede zwischen den verschiedenen Richtungen vorhanden[1]).

Bei sämtlichen angeführten Linien handelt es sich um *elektrische Dipolstrahlung*. Bei den „kugelsymmetrischen" Strahlungsfeldern ist diese Deutung *rein geometrisch* nicht die allein mögliche. Man könnte auch an *magnetische* Dipolstrahlung (zwei senkrecht stehende Dipole) denken oder an Quadrupolstrahlung, wenn man die Achse des Quadrupols etwa unter 45^0 zur optischen Achse geneigt annimmt. Doch müßte dann die unsinnige Annahme gemacht werden, daß bei der Aufspaltung einer Linie im Kristallfeld nicht alle Komponenten denselben Strahlungscharakter behalten. Es handelt sich also sicher auch hier um elektrische Dipolstrahlung. Die einzelnen Aufspaltungskomponenten eines Terms unterscheiden sich eben

[1]) Vgl. dazu das auf S. 202 über das Verhalten der „Überlagerungslinien" Gesagte.

Tabelle 2. Linien des $Nd_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$.

1 Übergang	2 Linie und Wellenzahl in cm^{-1}	3 $S \perp X$ $\mathfrak{E} \parallel X$	4 $S \perp X$ $\mathfrak{E} \perp X$	5 $S \parallel X$ $\mathfrak{E} \perp X$	6 Orientierung des elektrischen Dipols
D	I a 17 322,0	+	+	+	○
	I b 17 371,8	−	+	+	⊥
	I c 17 386,0	+	−	−	∥
	I d 17 397,1				
	II a 17 285,3	−	+	+	⊥
	II b 17 335,3	+	−	−	∥
	II c 17 349,8	−	+	+	⊥
D'	I a 17 658,0	+	+	+	○
	I b 17 687,0	−	+	+	⊥
	I c 17 714,0	+	−	−	∥
	II a	(−)	(+)	(+)	(⊥)
	II b 17 650,0	+	−	−	∥
	II c 17 677,0	−	+	+	⊥
E	I a 19 182,0	+	+	+	○
	I b 19 234,0	−	+	+	⊥
	I c 19 246,0	+	−	−	∥
	I d 19 258,0	−	+	+	⊥
	II a 19 145,0	−	+	+	⊥
	II b 19 197,0	+	−	−	∥
	II c 19 208,0	−	+	+	⊥
	II d	(+)	(−)	−	∥
F	I a 19 501,0	+	+	+	○

Eingeklammerte Werte sind fraglich.

nur dadurch, daß ihre Kombination mit einem und demselben anderen Zustand (hier dem Grundzustand) verschieden *orientierten* elektrischen Dipolen entspricht.

Zur Veranschaulichung des in den Tabellen dargestellten Sachverhaltes sind in Fig. 1 für einige Liniengruppen des Nd-Salzes alle drei Spektren reproduziert. In Fig. 2 ist das zur Gruppe D gehörige Termschema gezeichnet. Die Pr-Linien sind für eine Reproduktion nicht so geeignet.

Für die neben den reinen Elektronensprunglinien ν_{El} auftretenden „*Überlagerungslinien*“ $\nu_{El} + \nu_{Osz}$ hatte sich früher[1]) bei Durchstrahlung senkrecht zur optischen Achse ergeben, daß sie nicht mehr so streng polarisiert sind wie die reinen Elektronensprunglinien. Sie treten, wenn das überlagerte Schwingungsquant $h\nu_{Osz}$ nicht zu klein ist, auch in *der* Polarisationsrichtung auf, in der die reine Elektronensprunglinie fehlt.

[1]) K.-H. Hellwege, a. a. O.

Bei der Durchstrahlung parallel zur Achse zeigt sich nun, daß in dem so erhaltenen Spektrum die und nur die Linien auftreten, die bei senkrechter Durchstrahlung eine Komponente des elektrischen Vektors senkrecht zur Achse haben. Es handelt sich also, wie zu erwarten, ebenfalls um elektrische Dipolstrahlung, bei der jedoch nun der Dipol nicht in einer bestimmten Kristallrichtung „eingefroren" ist, sondern alle Lagen mit einer durch die Linienintensitäten gemessenen Wahrscheinlichkeit annehmen kann. Korrespondenzmäßig ist dies Verhalten so zu verstehen[1]), daß die Symmetrie des Kristalls, zu der sich die Dipole orientieren, durch die bei der Absorption einer „Überlagerungslinie" angeregte Gitterschwingung zerstört, eine Orientierung also sinnlos wird.

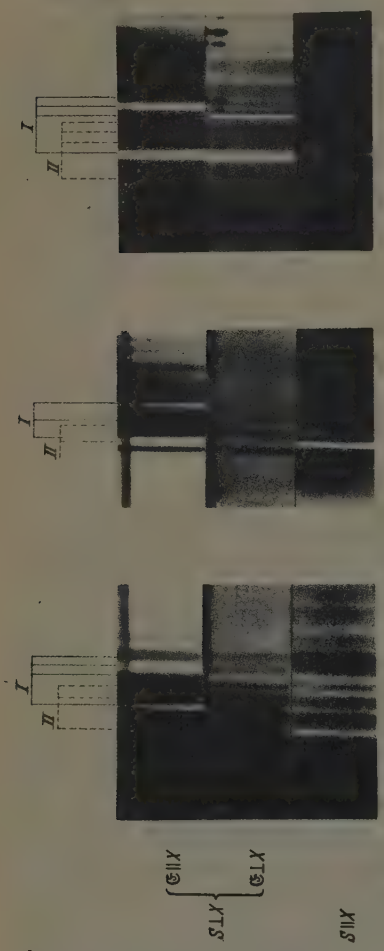


Fig. 1. Ausschnitt aus dem Absorptionsspektrum von $Nd_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$. Das Spektrum ist mehrfach umkopiert. Die Schwärzungsverhältnisse sind nicht die der Originalplatte.

3. Vergleich mit der Theorie und anderen Beobachtungen.

Zu einer Prüfung der Theorie gelangt man am einfachsten, indem man fragt, ob die in der Theorie aufgestellten Übergangsverbote (siehe die Einleitung) innegehalten werden. Das setzt die Kenntnis der Elektronenterme voraus.

[1]) K.-H. Hellwege, a. a. O.

Für das Praseodymsalz ist diese Voraussetzung weitgehend erfüllt. Das Spektrum ist mit großer Sicherheit den Termen des Pr^{+++}-Ions zuzuordnen[1]). Grundzustand ist $^3H_4$. In der ersten Spalte der Tabelle 1 sind die Übergänge angeführt. Bei den zwei kurzwelligeren ist $\Delta L = 4$ und $\Delta J = 4$ bzw. 3. Nach der Theorie dürften also weder Quadrupol- noch magnetische Dipolstrahlung auftreten, was auch der Fall ist. Andererseits sind für die beobachtete elektrische Dipolstrahlung Übergänge mit $\Delta L = 4$ auch wirklich erlaubt. Die Deutung des dritten, im Gelben liegenden Übergangs ist unsicher. Es handelt sich entweder um den Übergang nach $^1J_6$ oder nach $^1G_4$. In beiden Fällen soll elektrische Dipolstrahlung erlaubt sein. Insgesamt ergibt sich also kein Widerspruch gegen die Auswahlregeln der Theorie.

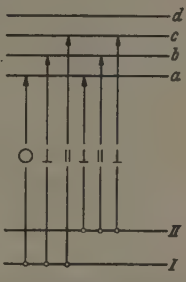


Fig. 2.
$Nd_2Zn_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$.
Termschema
der Gruppe D.

Im Falle des Neodymsalzes liegen die Verhältnisse bei der Analyse des Spektrums komplizierter, da die Zahl der theoretisch für die Elektronenkonfiguration $4\,f^3$ möglichen Terme[2]) größer ist als die Zahl der bisher mit Sicherheit beobachteten. Die notwendige Auswahl traf Mukherji[3]), indem er *Quadrupolstrahlung* voraussetzte und nur die Terme benutzte, die die dafür gültigen Auswahlregeln befolgen. Nun liegt aber nach Tabelle 2 Quadrupolstrahlung gerade *nicht* vor, der getroffenen Auswahl fehlt also die experimentelle Begründung. Deshalb können Termübergänge nicht angegeben werden (in Tabelle 2 werden zur Kennzeichnung schon früher benutzte Buchstaben angewandt). Trotzdem läßt sich aber folgende Feststellung treffen: Auf Grund der Hundschen Regeln, die sich beim Praseodym bewährt haben, ist $^4J_{9/2}$ mit großer Wahrscheinlichkeit der Grundzustand. Sämtliche Übergänge von hier aus zu sämtlichen theoretisch existierenden höheren Termen sind mit den van Vleckschen Übergangsregeln für elektrische Dipolstrahlung vereinbar[4]). Also auch hier kein Widerspruch zwischen Experiment und Theorie.

An anderen Substanzen sind bisher nur *Europium*salze von Deutschbein[5]) untersucht. Interessanterweise tritt hier neben der elektrischen

[1]) A. Merz, Ann. d. Phys. (5) **28**, 569, 1937; H. Gobrecht, ebenda S. 673; H. Lange, ebenda (5) **31**, 609, 1938. — [2]) E. U. Condon and G. H. Shortley, Theorie of Atomic Spectra, Cambridge 1935, S. 208. — [3]) P. C. Mukherji, Ind. Journ. Phys. **11**, 123, 1937. — [4]) Es kommen vor: ΔJ-Werte nur bis 4, ΔL-Werte nur bis 5. — [5]) O. Deutschbein, Ann. d. Phys. (5) **36**, 183, 1939.

auch *magnetische* Dipolstrahlung auf, die bei reiner Russell-Saunders-Kopplung nicht auftreten sollte[1]). Tatsächlich liegt reine Russell-Saunders-Kopplung auch gar nicht vor, denn der Grundzustand ^7F ist das einzige mögliche Septett[2]), alle beobachteten Übergänge sind also Interkombinationen, die nur bei Abweichungen von der strengen Russell-Saunders-Kopplung auftreten. Ferner gibt es, wie die Theorie verlangt, magnetische Dipolstrahlung nur für Übergänge mit $\Delta J = 1$. Die ebenfalls untersuchten Übergänge mit $\Delta J = 2$ zeigen bereits *elektrische* Dipolstrahlung. Das ist eine besonders schöne Bestätigung der Auswahlregeln.

Zusammenfassend muß also festgestellt werden, daß die bisher ausgemessenen Strahlungsfelder in Festkörpern die van Vlecksche Theorie dieser Übergänge ausgezeichnet bestätigen. Insbesondere scheint es für die Aufstellung der Übergangsregeln der Strahlung zu genügen, das Kristallfeld als kubisch anzusetzen, was für die Berechnung der *magnetischen* Eigenschaften der Salze *nicht* ausreicht[3]). Der Grund liegt darin, daß in die Übergangsregeln nur der qualitative Charakter der Terme, in das magnetische Verhalten dagegen außerdem ihre quantitative Lage eingeht. Deshalb erfordert die Berechnung des letzteren eine höhere Näherung.

Herrn Prof. Joos danke ich für die Bereitstellung der Institutsmittel, meiner Frau für ihre Hilfe bei den Aufnahmen.

Göttingen, II. Physikalisches Institut, November 1940.

---

[1]) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien II, S. 729, 1939. — [2]) E. U. Condon and G. H. Shortley, a. a. O. — [3]) H. Fritsch, Ann. d. Phys., im Erscheinen.

Zum Grundproblem der atmosphärischen Elektrizität

Von **G. Michel.**

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 5. November 1940.)

Die Erde stellt einen Gleichstromunipolargenerator nach Faraday dar. Dieser Generator arbeitet auf einen Kugelkondensator, dessen Belegungen die leitende Erde und die Stratosphäre sind, und dessen unvollkommenes Dielektrikum die Troposphäre ist. Der Leitungsverluststrom dieses Kondensators ist der luftelektrische Strom. Die Polarlichter sind Ausgleichserscheinungen an den positiven Polen dieses Generators. Für das Vektordiagramm der Horizontalvariationen des Erdstromes, wie sie an den Telegraphenkabeln Berlin/Dresden und Berlin-Thorn gemessen wurden, wird eine qualitative Deutung gegeben.

Das Grundproblem der atmosphärischen Elektrizität [1]) besteht bekanntlich in folgendem:

Die Erde hat eine negative Oberflächenladung, die durch die in der Atmosphäre vorhandene positive Raumladung kompensiert wird. Das in der Atmosphäre vorhandene Potentialgefälle hat einen vertikal gerichteten, positiven Ionenstrom zur Folge, der die negative Oberflächenladung der Erde in sehr kurzer Zeit (etwa 15 Minuten) vernichten müßte. Dies geschieht jedoch nicht, und es ist eine bisher nicht befriedigend beantwortete Frage, wodurch der in vertikaler Richtung zur Erde fließende positive Dauerstrom unterhalten wird.

Wir wollen für unsere Betrachtung annehmen, die Erde rotiere um die Z-Achse eines rechtshändigen Koordinatensystems, dessen Ursprung im Erdmittelpunkte liege, die Richtung der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ sei die Richtung Nullpunkt—Magnetpol, dann hat die in die Z-Richtung fallende Komponente B_z den konstanten Betrag $\mathfrak{B}\cos\alpha_3$, wenn α_3 den Winkel zwischen der Z-Achse und der Richtung von $\mathfrak{B}$ bedeutet. Der Betrag von $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{B}_y$ schwankt gegenläufig zwischen den Werten Null und $\mathfrak{B}\cos\alpha_0$, wenn α_0 der Winkel ist, den $\mathfrak{B}$ mit der X- bzw. Y-Achse bildet, wenn es in der XZ- bzw. in der YZ-Ebene liegt. Die Bewegung der Erde um die Sonne wollen wir nicht berücksichtigen, da die während einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse ausgeführte Bahnbewegung der

[1]) R. Seeliger, Ann. d. Phys. **62**, 464. 1920; siehe hier auch ausführliche Literaturangaben: E. Schweidler, ebenda **63**. 726, 1920: H. Benndorf, Phys. ZS. **26**, 81, 1925; G. Angenheister, Handb. d. Phys., Berlin, Julius Springer, 1927, Bd. 14, S. 437.

Erde nur ein geringer Bruchteil einer vollen Umdrehung um die Sonne ist. Die Sonne ruht dann in bezug auf unser Koordinatensystem, und wir wollen annehmen, daß die Sonne sich auf einem Punkte der positiven X-Achse befindet. Der von der Erde aufgefangene Kegel der Sonnenstrahlung stellt dann einen ruhenden Zeiger dar, an dem sich die Erde im Verlaufe eines Tages vorbeidreht.

Da die Sonnenstrahlung einen starken Anteil an kurzwelligem Licht hat, wird sich der Teil der Atmosphäre, den diese Strahlung zu durchdringen vermag, die Stratosphäre, solange sie den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, in einem erhöht ionisierten, also elektrisch leitenden Zustand befinden. Sobald dieser Teil der Atmosphäre bei der Umdrehung der Erde aus dem Strahlenkegel der Sonne heraustritt, wird die durch die Sonnenstrahlung bewirkte Ionisation in sehr kurzer Zeit infolge Wiedervereinigung der Ionen verschwinden. Die Stratosphäre wird im Nachtgebiet eine wesentlich geringere Leitfähigkeit haben als im Taggebiet. Wir können uns daher die Stratosphäre ersetzt denken durch einen mit der Erde umlaufenden Leiter als Repräsentanten des mit der mittleren Ionisierung behafteten Teiles der Stratosphäre und durch einen zweiten, die Erdumdrehung nicht mitmachenden Leiter, der den Teil der Stratosphäre darstellt, der während des Tages sich in erhöhtem Ionisationszustand befindet und an den Ort des ruhenden, von der Sonne ausgehenden Strahlenkegels gebunden ist. Diese beiden fiktiven Leiter verbinden die Pole der Erde miteinander.

Auch der der Erde benachbarte Teil der Atmosphäre, die Troposphäre, muß als Leiter aufgefaßt werden, da auch er sich in ionisiertem Zustand befindet. Doch ist die Anzahl der Ionen pro cm³ hier wesentlich geringer als in der Stratosphäre. Auch die Ionisierung der Troposphäre weist ein Tagesmaximum oder zwei auf, da diese aber unbedeutend sind, wollen wir sie hier außer acht lassen und die Troposphäre als einen mit der Erde umlaufenden Leiter auffassen, der zwischen der leitenden Erde und der leitenden Stratosphäre einen Kontakt herstellt.

Berücksichtigen wir zunächst allein die Z-Komponente von $\mathfrak{B}$, so können wir uns als Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Systems, das die im Strahlenkegel der Sonne rotierende Erde darstellt, die Fig. 1 zeichnen. In dieser stellt NS den im eingezeichneten Sinne rotierenden Magneten (Erde) dar, $SABDN$ ist der ruhende Leiter (Stratosphäre im Strahlenkegel der Sonne), der an den Punkten N, S und C mit dem Magneten in Kontakt steht. Das Stück BC repräsentiert die Troposphäre. Der zu NS parallelgeschaltete umlaufende Leiter ist punktiert gezeichnet. Wie man sieht, ist der ausgezogen gezeichnete Teil dieses Ersatzschaltbildes genau das

Schaltbild des Unipolargenerators von Faraday[1]), und unsere Betrachtung ergibt also die Tatsache, daß die an dem ionisierenden Strahlenkegel der Sonne sich vorbeidrehende Erde infolge der Wirkung der Z-Komponente von $\mathfrak{B}$ einen Unipolar-Gleichstromgenerator darstellt. Der experimentelle

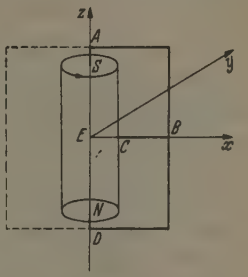


Fig. 1
N S im Sinne des Pfeils rotierender, zylindrischer Magnet. *A B D* der die Stratosphäre darstellende Leiter. *B C* der die Troposphäre darstellende Leiter. *S A* und *N D* Troposphäre über den Polen.

Befund an diesem Generator ist folgender: Rotiert der Magnet im eingezeichneten Sinne um seine Achse, so fließt ein positiver Strom in der Richtung $SABCS$ und in der Richtung $NDBCN$. Wird die leitende Verbindung bei C aufgehoben, so fließt kein Strom, da sich beide Pole auf gleichem positiven Potential befinden. Ebenso fließt kein Strom, wenn der Leiter die Umdrehung des Magneten mitmacht. Der zu NS parallelgeschaltete umlaufende Leiter kann aus diesem Grunde weggelassen werden.

Die Theorie des Unipolargenerators läßt sich aus dem Induktionsgesetz ableiten. Dieses lautet:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E}_i = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathfrak{B} v]. \tag{1}$$

Da eine zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}_z$ in unserem Falle nicht stattfindet, geht die Gleichung über in:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E}_{iz} = -\operatorname{rot}[\mathfrak{B}_z v]. \tag{2}$$

Die in einem beliebigen Leiterstück s induzierte EMK. ergibt sich dann zu

$$E_{is} = \int \mathfrak{E}_{is}\, ds = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}_z v]\, ds = \frac{1}{c}\int [v \mathfrak{B}_z]\, ds. \tag{3}$$

Die Geschwindigkeit des Leiters $SABDN$, des Leiterstückes BC und der Magnetachse ist Null. Daher liefern diese keinen Beitrag zu E_{iz}. Nur in dem Stück CE, das die Länge a haben möge, ist die Geschwindigkeit von Null verschieden. Auf diesem Stück ist, wenn wir gleichzeitig die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ einführen,

$$E_{iz} = \frac{\omega}{c}\int_0^a \mathfrak{B}_z r\, dr. \tag{4}$$

[1]) M. Faraday, Phil. Trans. **122**, 125 u. 153, 1832, Abschn. 220; Pogg. Ann. **25**, 171, 1832.

Befindet sich der Magnet in Ruhe und dreht sich die Leiterschleife im selben Sinne wie vorher der Magnet, so muß wegen des Relativitätsprinzips in Formel (4) vor ω das negative Vorzeichen gesetzt werden. Rotieren sowohl Magnet als auch Leiterschleife, so ergibt die Summe der E_{iz} Null. Die beiden induzierten EMK. kompensieren sich.

Da der Verlauf von $\mathfrak{B}_z$ längs a nicht bekannt ist, läßt sich der numerische Wert von E_{iz} leider nicht berechnen. Wir können uns aber durch eine allgemeine Betrachtung wenigstens eine ungefähre Vorstellung davon bilden, welche Energien durch unseren Generator umgesetzt werden. Dazu betrachten wir den vollen Umlauf eines positiven Teilchens im Kreise $SABCS$, den wir als Repräsentanten vieler möglicher Kreise herausgreifen. In diesem fließt, wie gesagt, ein positiver Strom in der durch die Buchstabenfolge gegebenen Richtung, d. h. die Oberfläche bei C wird negativ, der Pol S dagegen positiv[1]). An dem positiven Teilchen wird auf der Strecke CE Arbeit geleistet und diese wird beim Durchlaufen des restlichen Kreises wieder abgegeben. Auf dem Stück BC, d. h. in dem Teil der Troposphäre, der einen positiven Ionenstrom in Richtung zur Erde führt, kann der Energieverbrauch berechnet werden. Der zur Erde fließende positive Gesamtstrom wird zu 1400 Amp angegeben. Das gesamte Potentialgefälle in der Troposphäre beträgt größenordnungsmäßig 10^6 Volt, die gesamte Leistung des luftelektrischen Stromes in diesem Teile der Troposphäre also $1{,}4 \cdot 10^6$ kW. Der Energieverbrauch des luftelektrischen Stromes im Stück BC beträgt demnach im Jahre:

$$U = 1{,}1 \cdot 10^{10}\,\text{kWh}.$$

Der Energieverbrauch in dem Stück ES ist als klein gegen U anzunehmen, da die Leitfähigkeit der Erde groß ist gegen die der Troposphäre (spez. Widerstand der Erde 10^2 bis 10^7 Ohm cm, der Luft in Erdnähe $4{,}5 \cdot 10^{15}$ Ohm cm), und ebenso wird man den Energieverbrauch in dem Stück AB als klein gegen U annehmen können, da die Leitfähigkeit der Stratosphäre mindestens 10^6mal größer ist als die der Troposphäre. Auf dem Stück SA des Stromkreises, d. h. in dem über dem Pol befindlichen Teil der Troposphäre, muß eine besonders hohe Leitfähigkeit vorhanden sein, da hier der luftelektrische Gesamtstrom durch eine Röhre verhältnismäßig geringen Querschnitts gehen muß. Wir nehmen an, daß Träger des Stromes in dieser Röhre positive Teilchen, vielleicht radioaktive Zerfallsprodukte (Ebert), sind, die durch das elektrische Feld zu den Polen

[1]) Dies bemerkt auch bereits Faraday, l. c., Abschn. 182.

transportiert werden. Der Energieverbrauch in diesem Teile des Stromkreises läßt sich nicht abschätzen. Wir wollen ihn dadurch berücksichtigen, daß wir den Gesamtenergieverbrauch des luftelektrischen Stromes zu $10\,U = 10^{11}$ kWh annehmen. Diese Energie wird der Rotationsenergie U_{rot} der Erde entnommen, die beträgt (Θ Trägheitsmoment)

$$U_{rot} = \tfrac{1}{2}\,\Theta\omega^2 = 2{,}7 \cdot 10^{29}\ \text{kg m} = 0{,}75 \cdot 10^{24}\ \text{kWh}.$$

Der Energieverlust der Erde durch den Betrieb des Unipolargenerators beträgt also jährlich nur 1 Teil auf 10^{13}. Es ist unmöglich, auch mit den feinsten Meßmethoden einen so geringen Betrag nachzuweisen, und selbst wenn unsere Schätzung, was höchst unwahrscheinlich ist, um eine Größenordnung zu günstig sein sollte, würde ein so geringer Verlust an Rotationsenergie bei der Erde nicht nachweisbar sein.

Betrachten wir jetzt die Verhältnisse in der Nähe eines Poles etwas näher. Hier ist in der Höhe der Stratosphäre eine starke negative Raumladung anzunehmen, die darauf zurückzuführen ist, daß die langsamen positiven Ionen das Tempo des Elektrizitätsumlaufes bestimmen. Es kann aus der Raumladung über den Polen im stationären Zustand nur derselbe Ladungsbetrag mit den aus der Polfläche austretenden positiven Ionen zum Ausgleich kommen, der von den durch die Troposphäre zur Erde wandernden positiven Ionen an die Erdoberfläche abgegeben wird. Die verhältnismäßig enge Nachbarschaft der mit positiver Ladung versehenen Polfläche und der negativen Raumladung hat ein sehr starkes Potentialgefälle in der Nähe der Pole zur Folge. Treten außergewöhnliche Ereignisse auf, wie z. B. starke Schwankungen der Ionisierung der Stratosphäre, etwa hervorgerufen durch Strahlungsänderungen der Sonne infolge von Sonnenflecken oder starke Schwankungen des Erdmagnetismus, so kann es zu teilweisem Zusammenbruch oder zu anomaler Erhöhung der Raumladung kommen. Diese Ladungsänderungen können, da sie mit beträchtlichen Energien verknüpft sind, zu leuchtenden Entladungserscheinungen führen, die als Polarlicht bekannt sind. Diese Deutung des Polarlichtes [1]) hat den Vorteil, daß sie außer der optischen Sonnenstrahlung keine außerhalb der Erde liegenden Erscheinungen heranzieht, wie es die Störmersche Theorie tut. Bei dieser wird bekanntlich angenommen, daß von der Sonne ausgehende Elektronenstrahlen im Magnetfeld der Erde so abgelenkt werden, daß ihre Bahnen die Pole der Erde umschließen. Hierbei erregen sie die obere Atmosphäre zum Leuchten. Um den Beobachtungsbefund erklären

[1]) M. Faraday, l. c., Abschn. 192.

zu können, müssen diese Elektronen annähernd Lichtgeschwindigkeit haben. Da Elektronen so hoher Geschwindigkeit äußerst unwahrscheinlich sind. bildet dieser Punkt eine große Schwierigkeit der herrschenden Theorie der Polarlichter.

Da die Leitfähigkeit der Troposphäre gering ist, kann auf der Tagseite der Erde nur ein Teil der von dem Unipolargenerator gelieferten Energie durch einen Strom ausgeglichen werden. Der Rest wird auf dem Kugelkondensator gespeichert, dessen innere Belegung die leitende Erde und dessen äußere Belegung die Stratosphäre bildet und dessen unvollkommenes Dielektrikum die Troposphäre ist. Dieser Kugelkondensator, den wir uns also in unserem Ersatzschaltbild parallel zu BC eingezeichnet denken müssen, wird von dem Generator dauernd auf Gleichspannung gehalten. Sein Verluststrom ist der luftelektrische Strom auf der Nachtseite der Erde.

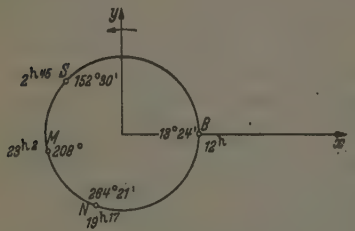


Fig. 2.
BSN Schnittpunkte der Meridiane von Berlin, des magnetischen Südpols und des magnetischen Nordpols mit dem Äquator. *M* Schnittpunkt des Meridians, der von *N* und *S* gleich weit entfernt ist. Zahlen im Kreise Längen östlich Greenwich, Zahlen außerhalb des Kreises Berliner Zeiten, zu denen der Punkt die Mittagslinie passiert.

Die X- und Y-Komponenten von $\mathfrak{B}$ rufen in dem Kreis $SABDN$ einen Wechselstrom hervor. Da dieser für das Problem der Aufrechterhaltung der Erdladung ohne Interesse ist, soll er nicht näher berechnet werden. Es soll nur noch durch eine kurze qualitative Betrachtung gezeigt werden, daß die unserer Überlegung zugrunde gelegten Annahmen sich auch hier als recht fruchtbar erweisen.

In Fig. 2 bedeuten S, N und B die Schnittpunkte der Meridiankreise des magnetischen Nordpols, des magnetischen Südpols und des Meridians von Berlin mit einem Breitenkreis, z. B. dem Äquator. Innerhalb des Breitenkreises sind die Längen östlich Greenwich angegeben, während außerhalb des Kreises die Berliner Zeiten stehen, zu denen am Süd- und Nordpol Mittag ist. Das sind also die Zeitpunkte, an denen die Pole die Mitte des von uns angenommenen, im Strahlenkegel der Sonne ruhenden Leiters passieren. Bei M stehen die entsprechenden Daten für den Meridian, der von den Meridiankreisen des Nord- und Südpols gleich weit entfernt ist. In Fig. 3 ist das Vektordiagramm für die Stundenwerte des Erdstromes wiedergegeben, wie es aus Messungen an den Telegraphenkabeln Berlin

—Dresden und Berlin—Thorn[1]) erhalten wurde. Verfolgt man die Bewegung der Pole relativ zur Mittagslinie und vergleicht die sich ergebenden Zeiten mit den im Vektordiagramm angegebenen, so sieht man, daß die Zeiten der Poldurchgänge durch die Mittagslinie den Zeiten entsprechen, bei denen die Stromkurve Extremwerte erreicht. Von 16 Uhr an nähert sich der magnetische Nordpol der Mittagslinie. Die Ströme werden stärker und stärker, bis bei 19 Uhr, wo dieser Pol durch die Mittagslinie geht, ein Maximum erreicht wird. Die Richtung der Ströme kehrt sich um, während sich auf der einen Seite der magnetische Nordpol von der Mittagslinie entfernt, nähert sich der magnetische Südpol von der anderen Seite. Um 23 Uhr sind beide Pole von der Mittagslinie gleich weit entfernt. Hier liegt das Minimum der Stromkurve. Hierauf nähert sich der Südpol der Mittagslinie, während sich der Nordpol weiter entfernt, der Betrag des Stromes wird sehr schnell kleiner, um 3 Uhr erfolgt der Durchgang des magnetischen Südpols. Hier ist fast das zweite Maximum der Kurve erreicht. Nach Passieren des magnetischen Südpols fallen die Ströme sehr rasch ab. Um 15 Uhr geht der Südpol durch Mitternacht. Der Pol hat seine größte Entfernung von der Mittagslinie, auch dieser Punkt ist ein charakteristischer Punkt der Kurve. Es folgt eine kurze, fast stromlose Zeit, bis um 16 Uhr der neue Zyklus beginnt.

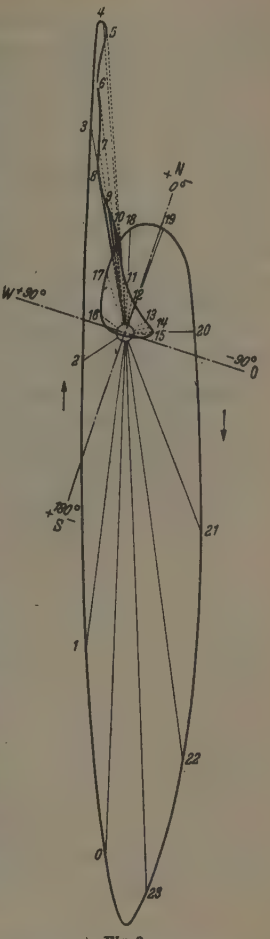


Fig. 3.
Täglicher Gang des Erdstromes im Mittel aus den Beobachtungen an den Telegraphenkabeln Berlin—Dresden und Berlin—Thorn 1884—1887.

Daß die Maxima nicht genau mit den Durchgangszeiten der Magnetpole durch die Mittagslinie übereinstimmen, kann man zwanglos dadurch erklären, daß sich induzierender Pol und induzierter Strom anziehen. Infolgedessen wird

[1]) B. Weinstein, Die Erdströme im deutschen Reichstelegraphengebiet nebst Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1900.

das Maximum bei Annäherung des Pols an die Mittagslinie früher und bei der Entfernung des Pols später erreicht werden, als es die Überlegung ergibt. Aus diesem Grunde tritt das Maximum bei 19 Uhr verfrüht und bei 3 Uhr verspätet auf. Bei dem Minimum um 23 Uhr liegen die Verhältnisse insofern komplizierter, als sich hier der Nordpol entfernt und der Südpol nähert. Wie der Augenschein zeigt, überwiegt die Mitnahme durch den Nordpol.

Zusammenfassung.

Die in die Richtung der Drehungsachse fallende Komponente des Erdmagnetismus erregt in der rotierenden Erde nach Art des Unipolargenerators von Faraday eine Gleichspannung, die den luftelektrischen Strom aufrechterhält. Die zur Drehungsachse senkrechten Komponenten des Erdmagnetismus erzeugen Wechselströme, deren naher Zusammenhang mit den in Telegraphenkabeln gemessenen Erdströmen nachgewiesen wird.

Eine neue Deutungsmöglichkeit der Nordlichter wird kurz erörtert.

Zur Druckabhängigkeit der Gleichspannungskorona*).

Von **Hermann Hinderer** und **Arno Walter** in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 18. November 1940.)

Es wurden für eine zylindrische Koronastrecke mit positivem Axialdraht in Luft zunächst Strom-Spannungskennlinien mit dem Druck als Parameter aufgenommen, ferner Strom-Druckkennlinien bei variierter Elektrodenform. Aus bekannten Beziehungen für Koronastrom und Durchbruchfeldstärke wird für $\partial J/\partial p$ gefolgert, daß hierfür ein $p^{-3/2}$-Gesetz gelten sollte. Dies wird geprüft und in einigen Fällen bestätigt gefunden. Gründe für die Abweichungen in den anderen Fällen werden erörtert. Typische Oszillogramme des Rauschpegels einer Koronastrecke zeigen den stark diskontinuierlichen Entladungscharakter der Korona in Luft. Mittlere Anzahl/sec und relative Stärke der einzelnen Stromimpulse werden festgestellt. Im Schallfeld wurde die dynamische Druckempfindlichkeit der Strecke bestimmt. Die Strecke arbeitet als Druckempfänger. Es folgt eine Erörterung des Mechanismus der Druckwirkung. Zunächst wird die Frage des mechanischen Mitschwingens der Elektroden in einem Schallfeld behandelt. Hieran schließt sich die Betrachtung der Druckwirkung auf den Entladungsmechanismus selbst. Auf Grund der Annahme, daß die Druckabhängigkeit des Koronastroms hauptsächlich in der Druckabhängigkeit der Elektronenstoß-Ionisierungszahl α ihre Ursache hat, wird für Druckabhängigkeit der Koronastromstärke eine Formel abgeleitet und geprüft.

Die auf die Druckabhängigkeit der Koronaentladung bezüglichen Untersuchungen enthalten fast durchweg nur Angaben über die Abhängigkeit der Anfangsfeldstärke bzw. -spannung vom Gasdruck. Die Druckabhängigkeit des Koronastroms ist dagegen im einzelnen wenig untersucht worden. Bei Werner[1]) findet sich eine Formel für den Ersatzwiderstand einer zylindrischen Strecke mit positivem Axialdraht in Wasserstoff als Funktion vom Druck, die jedoch nur im Gebiet kleiner Stromstärken, d. h. bei linearer Strom-Spannungscharakteristik und für Drucke unter 150 Torr gilt.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel die Untersuchung der Koronaentladung in einer Zylinderstrecke mit positivem Axialdraht in Luft in Abhängigkeit vom Druck, und zwar sowohl bei zeitlich konstantem als auch bei rasch veränderlichem Druck.

I. Zeitlich konstante Drucke.

Die bei den statischen Messungen verwendete Strecke bestand aus einem Platindraht von 0,0145 bzw. 0,006 cm Radius und einem diesen umgebenden Zylinder aus Chrom-Nickelblech mit einem Innenradius von 0,4 cm (Kathode 1) bzw. 0,8 cm (Kathode 4), und einer Länge von 3,6 cm. Kathode war stets der äußere Zylinder. Die Chrom-Nickelkathode 1 konnte

*) Ausführlicher siehe Diss. Walter, Berlin 1940.

[1]) Sven Werner, ZS. f. Phys. **92**, 708, 1934.

außerdem gegen eine Nickelnetzkathode (Kathode 2) von gleichen Abmessungen sowie gegen eine solche aus vernickeltem Kupfer (Kathode 3) von ebenfalls gleichen Abmessungen, jedoch mit aufgebördeltem Rand, ausgetauscht werden. Zur Variierung des Druckes konnte die Entladungsstrecke mittels Schliffsockels in ein zylindrisches Glasgefäß von 6 cm Durchmesser und 30 cm Länge eingesetzt werden.

Als Versuchsgas diente trockene Zimmerluft. Der Druckbereich erstreckte sich bei den statischen Messungen von 550 bis 950 Torr.

Ergebnisse der Messungen.

a) Strom-Spannungskennlinienschar. Es wurden zunächst Strom-Spannungskennlinien aufgenommen mit dem Druck als Parameter. Da wegen der Erwärmung der Luft in unmittelbarer Nähe des Sprühdrahtes an dieser Stelle eine ganz andere Luftdichte herrschte, als die zum abgelesenen Luftdruck und zur jeweiligen Raumtemperatur gehörige, mußte möglichst rasch Strom- und Spannungswert abgelesen und danach gewartet werden, bis Abkühlung auf Raumtemperatur eingetreten war, bevor der nächste Meßpunkt aufgenommen werden konnte. Ließen sich vorhergehende Meßwerte trotzdem nicht mehr hinreichend reproduzieren, dann wurde das Entladungsgefäß mit Frischluft durchgespült. Trotz der Vorsichtsmaßnahmen stimmten die an verschiedenen Tagen erhaltenen Meßwerte oft nicht genau überein, was auf Veränderungen der Elektroden zurückzuführen sein dürfte.

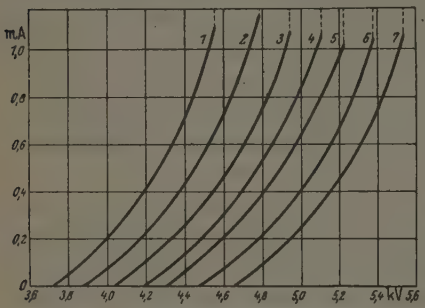


Fig. 1. Strom-Spannungskennlinien bei verschiedenen Drucken.

Fig. 1 zeigt die Ergebnisse der Messungen ($r_i = 0{,}0145$ cm, $r_a = 0{,}4$ cm, Kathode 1, $t = 20^0$ C). Als Abszissen sind die an der Strecke liegenden Spannungen in kV, als Ordinaten die zugehörigen Werte des Koronastroms in mA eingetragen. Die Zahlen neben den Kurven bedeuten folgende Druckwerte in Torr:

Tabelle 1 (zu Fig. 1).

1	2	3	4	5	6	7
660	700	740	780	820	860	900

Die gestrichelte Fortsetzung der Kurven soll andeuten, daß bei der betreffenden Spannung Durchschlag der Strecke erfolgte.

b) Strom-Druckkennlinien. Die Fig. 2a, 3a, 4a und 5a stellen Strom-Druckkennlinien dar. Die näheren Daten gehen aus Tabelle 2 hervor. Die

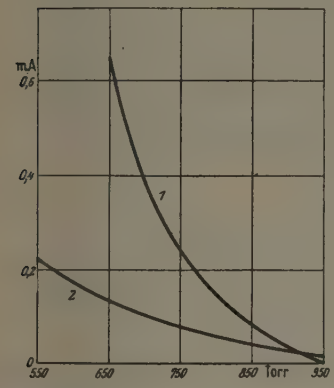


Fig. 2a. Strom-Druckkennlinien für zwei verschiedene Radien des Außenzylinders ($1: r_a = 0{,}4$ cm; $2: r_a = 0{,}8$ cm).

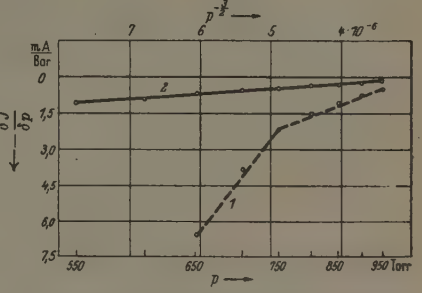


Fig. 2b. Zur Kontrolle des $p^{-3/2}$-Gesetzes.

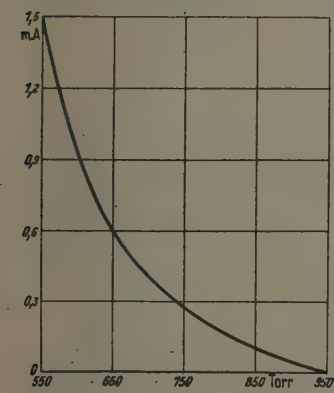


Fig. 3a.

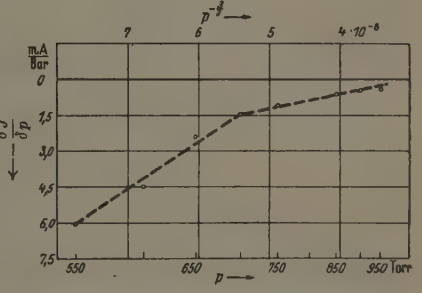


Fig. 3b.

Daten wie bei Fig. 2, Kurve 1, jedoch Rand der Kathode aufgebördelt.

letzten beiden Spalten der Tabelle geben die kleinste bzw. größte im Entladungsraum herrschende Feldstärke an für den Fall schwächerer Ströme.

Die gemessenen Werte des Koronastroms wurden stets auf eine Raumtemperatur von 20° C bezogen.

Tabelle 2 (zu Fig. 2 bis 5).

Figur Nr.	Spannung kV	r_i cm	r_a cm	Kathode Nr.	E_{min} kV/cm	E_{max} kV/cm
2 a 1	6,05	0,0145	0,4	1	4,5	126
2 a 2	8,32		0,8	4	2,6	141
3 a	6,05	0,0145	0,4	3	4,5	126
4 a	4,91	0,006	0,4	2	2,9	194
5 a	4,91	0,006	0,4	3	2,9	194

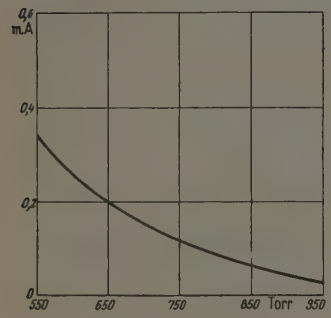


Fig. 4a.

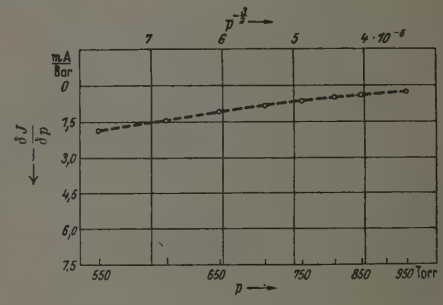


Fig. 4b.

Netzkathode (r_i = 0,006 cm; r_a = 0,4 cm).

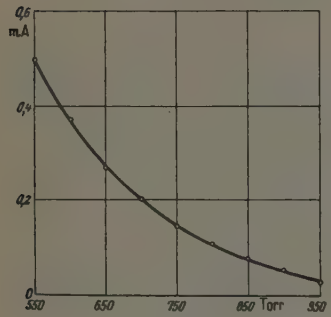


Fig. 5a.

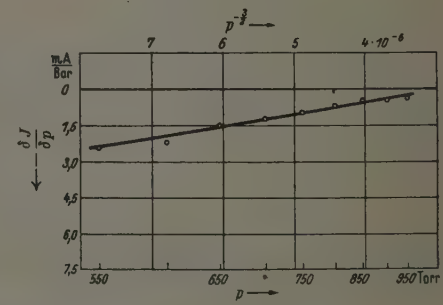


Fig. 5b.

Daten wie bei Fig. 4. Kathode mit aufgebördeltem Rand (r_a = 0,4 cm).

Auch bei diesen Messungen zeigte es sich, daß die Werte des Koronastroms sich innerhalb eines Tages recht genau reproduzierten, daß das

jedoch bei Messungen, die längere Zeit auseinanderlagen, oft nicht der Fall war. Die beobachteten Abweichungen betrugen bis zu 10% nach oben und unten.

Bei Kurve 1 der Fig. 3a erfolgte bei Drucken < 650 Torr Durchschlag der Strecke. Wie gering die Streuung der am selben Tage erhaltenen Meßwerte ist, zeigt Fig. 5a. Die ausgezogene Kurve stellt wie die übrigen Mittelwerte verschiedener Meßreihen (desselben Tages) dar. Die hervorgehobenen Meßpunkte sind keine Mittelwerte, sondern Werte einer willkürlich herausgegriffenen Einzelmessung.

Erörterung. Die bereits von Almy[1]) angegebene Formel für den Zusammenhang zwischen Koronastrom J, angelegter Spannung U und Anfangsspannung U_0,

$$J = K \cdot U\,(U - U_0), \tag{1}$$

gestattet in Verbindung mit der Peekschen Formel[2]) für die Abhängigkeit der beim Einsetzen der Entladung an der Oberfläche des inneren Zylinders herrschenden Feldstärke E_i vom Druck p,

$$E_i = Ap + \frac{B}{\sqrt{p}}, \tag{2}$$

in der A und B bei gleichbleibenden Versuchsbedingungen Konstante sind, prinzipiell die Ermittlung der Form des funktionellen Zusammenhanges zwischen J und p. Es wird nämlich bei konstanter angelegter Spannung U mit neuen Konstanten A' und B'[3])

$$J = A'p + \frac{B'}{\sqrt{p}}. \tag{2a}$$

Über den Faktor K in (1) und damit auch über die Konstanten A' und B' lassen sich bei größeren Stromstärken keine allgemein gültigen Angaben machen. Es soll hier vorausgesetzt werden, daß der Faktor K nicht vom Druck abhängt, was nach den Angaben Almys in der Nähe des Atmosphärendrucks zumindest in grober Näherung zuzutreffen scheint. Dann erhält man für die Druckabhängigkeit des Koronastroms bei sonst konstanten Bedingungen

$$\frac{\partial J}{\partial p} = A' + B'' p^{-3/2}. \tag{3}$$

[1]) J. E. Almy, Am. Journ. Sci. **12**, 175, 1901. — [2]) F. W. Peek jr., Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering, 3 d ed., 1929, S. 66. Theoretische Ableitung in: W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen, 1923, S. 181—188. — [3]) Bei kleineren Stromstärken ergibt sich statt (1) eine Beziehung der Form $J = K' U_0\,(U - U_0)$ mit $K' \sim 1/p$ (z. B. v. Engel-Steenbeck, Bd. 2, S. 15; ähnlich bei Prinz, Arch. f. Elektrotechn. **31**, 761, 1937). Hier würde man statt (3) erhalten:

$$\frac{\partial J}{\partial p} = \bar{A} p^{-2} + \bar{B} p^{-5/2}.$$

Trägt man also $\partial J/\partial p$ als Funktion von $p^{-3/2}$ auf, so müßte man eine Gerade erhalten, solange der obige funktionelle Zusammenhang besteht.

Dies ist in den Fig. 2b, 3b, 4b und 5b für die entsprechenden Strom-Druckkennlinien geschehen. Ordinaten sind die graphisch ermittelten Strom-Druckkoeffizienten $-\partial J/\partial p$ in mA/Bar, Abszissen die Werte von $p^{-3/2}$. Die den Abszissen entsprechenden Werte des Druckes p in Torr sind ebenfalls eingetragen. Wie man sieht, passen sich in einigen Fällen (Fig. 2b 2, 5b) die $\partial J/\partial p$-Werte recht gut einer Geraden an, in den übrigen ist das dagegen nicht der Fall. Jedoch ist zu bemerken, daß in diesen Fällen zwei scharf voneinander getrennte Druckbereiche vorhanden sind, in denen wieder annähernde Geradlinigkeit festgestellt werden kann. Der Knickpunkt liegt dabei zwischen 650 und 750 Torr.

Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, daß die geradlinige Beziehung für $-\partial J/\partial p$ um so besser erfüllt ist, je kleiner E_{min} ist. Die Abweichung von der Geradlinigkeit scheint also um so größer zu sein, je größer der Bruchteil des Entladungsraumes ist, in dem noch Stoßionisation stattfinden kann. Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht ein Vergleich der Fig. 4b und 5b. Die Entladungsstrecke unterschied sich in beiden Fällen nur dadurch, daß der Kathodenrand das eine Mal scharfkantig, das andere Mal dagegen aufgebördelt war. Die Vermutung liegt nahe, daß im ersten Falle Gebiete in unmittelbarer Nähe des Kathodenrandes den Raumteil vergrößerten, in dem Stoßionisation stattfand. Diese Gebiete können jedoch räumlich nur wenig ausgedehnt sein, und dementsprechend weicht auch Fig. 5b nur sehr wenig von der Geradlinigkeit ab. Eine nähere Begründung für die Existenz des Knickpunktes kann bei diesem Stand der Betrachtung nicht gegeben werden.

Es ist somit gezeigt worden, daß unter gewissen einschränkenden Bedingungen der Strom-Druckkoeffizient $\partial J/\partial p$ einem $p^{-3/2}$-Gesetz folgt. Diese qualitative Aussage kann jedoch so lange nicht zu einer quantitativen verschärft werden, solange es nicht gelingt, die Konstanten A' und B' aus den vorgegebenen Daten einer Entladungsstrecke rechnerisch zu ermitteln.

Später soll daher versucht werden, auf einem anderen Wege wenigstens zu einer Abschätzung von $\partial J/\partial p$ zu gelangen.

II. Zeitlich veränderliche Drucke.

Gemessen wurde mit einem Elektronenstrahloszillographen unter Vorschaltung eines handelsüblichen (Tonfilm)-Tonverstärkers mit einem Eingangswiderstand von 0,2 Megohm. Der Verstärkungsfaktor lag meist bei

$2 \cdot 10^3$, gelegentlich bei $4 \cdot 10^4$. Für einige Messungen wurde ein Breitbandverstärker (bis 1 Megahertz) verwendet. Zur vollständigen Glättung der Hochspannung diente ein zusätzlicher Kondensator von 4 μF.

Schallquellen waren Stimmgabeln mit Resonanzkästen, sowie ein elektrodynamischer Lautsprecher und eine Galton-Pfeife für Frequenzen von 4000 bis 25000 Hz.

Rauschpegel der Strecke. Bei Spannungen oberhalb der Anfangsspannung und Strömen von einigen μA ist starkes Rauschen und Prasseln zu hören, wenn man an den Verstärkerausgang einen Lautsprecher schaltet. Der Koronastrom fließt also keineswegs kontinuierlich, sondern besteht aus einzelnen Stößen.

Da die eben erwähnten Schallquellen nur verhältnismäßig kleine Druckschwankungen erzeugen, so konnte bei der Untersuchung der dynamischen Druckabhängigkeit dieser statistische Charakter des Koronastroms störend in Erscheinung treten. Es erschien daher wichtig, den Rauschpegel der Strecke näher zu untersuchen. Über die Ergebnisse sei im folgenden kurz berichtet[1]).

Die Oszillogramme des Koronastroms haben das Aussehen von Fig. 6. Die relativen Stromschwankungen betrugen bis zu einigen Prozent des Gesamtstroms (in Fig. 6b sind es etwa 1 bis 2%). Bemerkenswert ist die rasche Abnahme selbst der absoluten Schwankungen mit zunehmender Stromstärke[2]).

Von Interesse war noch die „Frequenz" der Stromstöße, d. h. ihre mittlere Anzahl pro Zeiteinheit. Bezeichnet man diese mit N, mit Z die Zahl der registrierten Stromstöße und schließlich mit f die obere Grenzfrequenz der gesamten Apparatur, so gilt zwischen diesen Größen nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Beziehung:

$$Z = Ne^{-\frac{N}{f}}.$$

Mit $z = 1{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{sec}^{-1}$ (bei 4 μA, Fig. 6a) und $f = 0{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-1}$ ergeben sich für N die beiden Werte $N_1 = 0{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-1}$ und $N_2 = 0{,}85 \cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Entscheidet man sich für den höheren Wert, so erfolgen also bei einem Koronastrom von 4 μA im Mittel $\sim 10^5$ Stromstöße pro Sekunde. An einem Stromstoß sind damit im Mittel $\sim 2{,}5 \cdot 10^8$ Ladungsträger beteiligt.

Die Koronastrecke im Schallfeld[3]). Bei diesen Versuchen diente als Axialdraht der 0,006 cm-Draht, als Kathoden hauptsächlich die Kathoden 1

[1]) Siehe Dissertation Walter, Berlin 1940. — [2]) Für die Anordnung positive Spitze–Ebene finden sich ähnliche Aufnahmen und Ergebnisse bei G. W. Trichel, Phys. Rev. **55**, 385, 1939. — [3]) Ausführlich a. a. O.

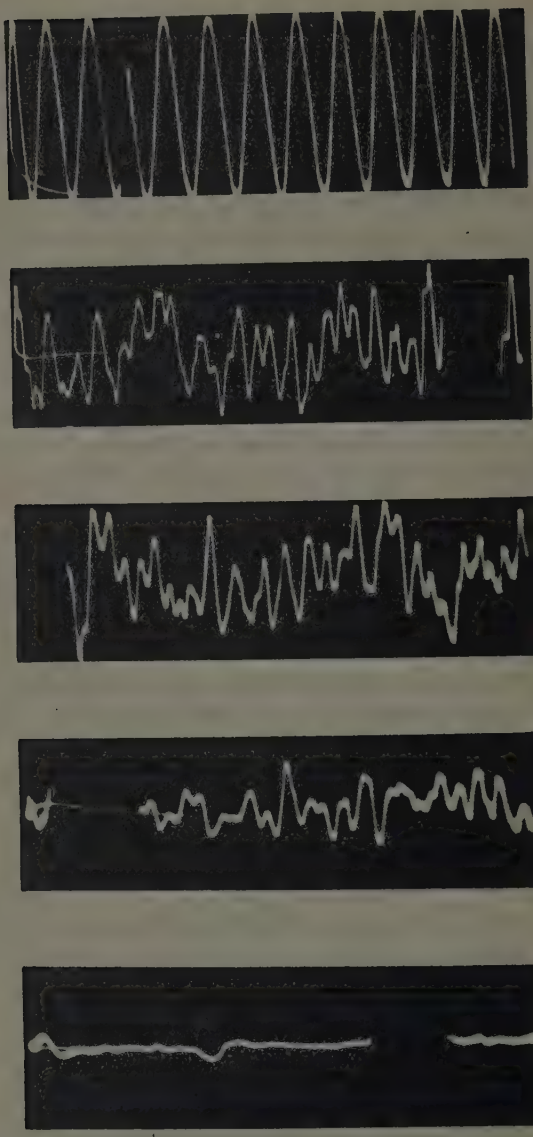


Fig. 6. Stromschwankungsamplitude bei verschiedenen Stromstärken.

und 2. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Blech- und der Netzkathode war nicht zu bemerken.

Zunächst konnte festgestellt werden, daß die Strecke frequenztreu arbeitete. Das bedeutet bereits eine Beantwortung der Frage, ob die Koronastrecke auf Druck- oder auf Bewegungs- bzw. Geschwindigkeitsamplituden anspricht, im ersten Sinne. Träfe der zweite Fall zu, so müßte offensichtlich die Frequenz der Stromschwankungen doppelt so hoch sein wie die der auftreffenden Tonschwingungen. Betrachtet man nämlich den Elongations- bzw. den Geschwindigkeitsvektor der Luftteilchen, so müßten zwei derartige Vektoren gleicher Größe und Richtung eine völlig gleiche Wirkung auf die Strecke ausüben, unabhängig vom Richtungssinn der Vektoren, da bei allen hier in Betracht kommenden Effekten Bevorzugung einer der beiden Richtungen physikalisch nicht verständlich wäre.

Die Tatsache, daß die Koronastrecke als Druckempfänger arbeitet, wurde außerdem durch Beobachtung ihres Verhaltens in der stehenden Welle bei Frequenzen bis zu 15000 Hz erwiesen.

Zu erörtern war ferner der Effekt des mechanischen Mitschwingens der Elektroden. Hier ergab sowohl Experiment als auch Theorie, daß dieser Effekt bei gut zentriertem Draht praktisch unmerklich ist.

Für die Druckempfindlichkeit der verwendeten Koronastrecke ($r_i = 0{,}006$ cm, Kathode 2) ergab sich im Frequenzbereich zwischen 50 und 10000 Hz bei einem Koronastrom von 80 μA annähernd gleichmäßig $\sim 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ μA/μ Bar, während nach den statischen Messungen unter diesen Umständen eine Empfindlichkeit von $\sim 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ μA/μ Bar zu erwarten gewesen wäre.

Die Frage nach dem Mechanismus der Druckwirkung auf die Koronaentladung wurde bisher offen gelassen. Ein jeder Versuch zu ihrer Beantwortung muß sich naturgemäß auf unsere Kenntnisse von den sich in ihr abspielenden physikalischen Vorgängen stützen. Im folgenden sollen daher, bevor auf obige Frage näher eingegangen wird, auf Grund neuerer Anschauungen über den Entladungsmechanismus in Gasen[1]) die physikalischen Vorgänge betrachtet werden, die sich in einer Koronastrecke abspielen, wie sie in den geschilderten Versuchen verwendet wurde.

---

[1]) W. Rogowski, Arch. f. Elektrotechn. **20**, 99, 1928; W. O. Schumann, ZS. f. techn. Physik **81**, 58, 132, 195, 1930; A. v. Hippel, Erg. d. exakt. Naturw. **14**, 79, 1935; E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936; **103**, 315, 1936; A. F. Kip, Phys. Rev. **54**, 139, 1938; **55**, 549, 1939; H. C. Pollock u. F. S. Cooper, ebenda **56**, 170, 1939; G. W. Trichel, a. a. O.; L. B. Loeb u. A. Kip, Journ. App. Phys. **10**, 142, 1939.

Für die Existenz einer stationären Koronaentladung ist ganz allgemein wesentlich, daß das elektrische Feld im Entladungsraum inhomogen ist. Das ist auch der Fall bei der Anordnung koaxialer Zylinderelektroden, die den folgenden Betrachtungen zugrunde liegen möge. Die Feldstärke ist hier dem Abstand von der Zylinderachse umgekehrt proportional. Da die Ionisierung mit wachsender Feldstärke zunimmt, ist sie am größten in der Nähe des inneren Zylinders. Wegen der stark verschiedenen Beweglichkeit der positiven bzw. negativen Ladungsträger wird die Polarität des Innenzylinders dabei von großer Bedeutung sein. Der Innenzylinder sei, wie bei den Versuchen, stets Anode.

Soll nun ein primäres, vor Beginn der Koronaentladung vorhandenes Elektron imstande sein, durch Stoßionisation mindestens ein neues nachzuliefern, so muß es auf seinem Weg zur Anode Gebiete durchlaufen, in denen $E/p \geq 80$ ist, wobei E den Betrag der Feldstärke in V/cm und p den Gasdruck in Torr bedeutet. Diese Bedingung ist bei der betrachteten Anordnung schon bei mäßigen angelegten Spannungen erfüllt, wenn nur der Radius des Innenzylinders klein genug gewählt wird. Ein Elektron, das sich innerhalb eines solchen Gebietes befindet, erzeugt also auf seinem Wege zur Anode sekundäre Elektronen und positive Ionen. Die sekundären Elektronen erzeugen ihrerseits tertiäre, und so fort. Es entsteht eine Elektronenlawine, die innerhalb sehr kurzer Zeiten (10^{-8} bis 10^{-9} sec) vom Feld des Sprühdrahtes abgesaugt wird. Wegen der viel geringeren Beweglichkeit der positiven Ionen bleiben diese innerhalb so kurzer Zeiten praktisch stehen und bilden einen positiven Raumladungsfaden, der sich bis zur Anode erstreckt, senkrecht zu deren Oberfläche. Steht nun im Gebiet höherer Feldstärken kein neues Elektron zur Einleitung der nächsten Lawine zur Verfügung, so reißt die Entladung bei Ankunft der Elektronen der vorhergehenden an der Anode ab, da die positiven Ionen wegen ihrer geringen Beweglichkeit innerhalb solcher Zeiten überhaupt nicht zur Ionisierung kommen. Die gewöhnlich vorhandenen, etwa durch Höhenstrahlung usw. gebildeten Elektronen reichen nicht aus, um die beobachteten Ströme zu erklären, so daß man nach weiteren Elektronenquellen Umschau halten muß. Als solche kommen hauptsächlich in Frage Photoionisierung durch Strahlung der hochangeregten Moleküle in der Lawine, sowie in den Nachbarlawinen; ferner in manchen Gasen die Abspaltung freier Elektronen aus negativen Ionen. Diese Abspaltung aus negativen Ionen erfordert Werte von $E/p \geq 90$ in einiger Entfernung von der Anode. Wird so auf irgendeine Art das Primärelektron innerhalb der Zeitdauer einer Lawine nachgeliefert, so ist damit die Kontinuität der Entladung gesichert.

Für den diskontinuierlichen Charakter der Korona scheinen die negativen Ionen verantwortlich zu sein, da dieser in Gasen, die keine negativen Ionen bilden, nicht auftritt. Die Abschätzung der mittleren Anzahl der an einem Stromstoß beteiligten Ionen aus der mittleren Anzahl der Stromstöße pro Sekunde, die nach den Oszillogrammen bei Stromstärken der Größenordnung Mikroampere etwa 10^5 betrug, ergab, daß diese etwa gleich 10^8 sein muß. Aus den Gleichungen für die Ionisation durch Elektronenstoß läßt sich berechnen, daß in den betrachteten Fällen die Zahl der in einer Elektronenlawine der erwähnten Art gebildeten Ionen mindestens um einige Größenordnungen darunter bleibt. Der Mechanismus der Koronaentladung in Luft kann also nicht in dem bloßen Auftreten der Elektronenlawinen bestehen.

Die positive Raumladung, die die erste Elektronenlawine hinterlassen hat, bewirkt nun eine scheinbare Ausdehnung der Anode in den Entladungsraum hinein. Der auf der Anodenoberfläche senkrecht aufsitzende Raumladungsfaden läßt an seiner Spitze ein starkes Feld entstehen, in dem Elektronen, die durch einen der betrachteten Prozesse in der Nähe der Spitze erzeugt worden sind, beschleunigt werden und eine Lawine hervorrufen, die in die vorhergehende einmündet, und deren hinterlassene Raumladung den Faden weiter in den Entladungsraum vorwachsen läßt. Da jede dieser Lawinen etwa 10^{-9} sec dauert, können innerhalb von Zeiten der Größenordnung 10^{-8} sec eine ganze Anzahl solcher Lawinen entstehen, die den Raumladungsfaden weiter und weiter verlängern. Wird dieser Prozeß nicht unterbrochen, so kann unter Umständen ein solcher Faden bis zur Kathode vordringen und so den Funkendurchbruch einleiten. Als Ursachen für das vorherige Abreißen der Fäden kommt zunächst der geometrische und durch die sich ansammelnde Raumladung noch verstärkte Feldabfall in Betracht, ferner Zerstreuung der Raumladungsfäden durch elektrostatische Abstoßung der Ionen untereinander, Diffusion, Vernichtung der Raumladung durch Zusammenstöße von Elektronen aus verschiedener Richtung innerhalb des Fadens unter Einbuße ihrer Geschwindigkeit. Eine große Bedeutung scheinen auch in dieser Hinsicht die negativen Ionen zu besitzen. Sie sind also anscheinend in doppelter Weise an der Entladung beteiligt und für den diskontinuierlichen, büschelartigen Charakter der Korona in Luft verantwortlich, indem sie einerseits Nachschubelektronen in der Nähe der Raumladungsfadenspitzen liefern und andererseits die Raumladungsfäden wieder zerstören. Ist das Vorwachsen eines Fadens einmal unterbrochen, so können sich ähnliche Feldverhältnisse, wie sie zu Beginn der Entladung bestanden, erst wieder herstellen, nachdem

das Feld im Entladungsraum die inzwischen angesammelte positive Raumladung abgesaugt oder zumindest in feldschwächere Zonen geschafft hat. Das erfolgt in Zeiten von etwa 10^{-7} bis 10^{-8} sec, in denen die positiven Ionen Strecken von 10^{-3} bis 10^{-2} cm zurücklegen, wenn die Feldstärke etwa 50 kV/cm beträgt. Wird die Feldstärke so hoch, daß sich bereits ein neuer Raumladungsfaden aufzubauen beginnt, wenn der alte sich noch fast an derselben Stelle befindet, so benutzt der neue vorzugsweise die Bahn des alten, da der Raum zwischen den zu gleicher Zeit vorhandenen Fäden durch die Raumladungen weitgehend abgeschirmt ist. Dadurch wird die Raumladung an der Fadenspitze und damit die Feldstärke in ihrer Nähe weiter gesteigert, und der neue Faden wird weiter vorzudringen imstande sein als der alte. So ist es verständlich, daß schließlich bei genügend hoher Spannung Durchschlag der Strecke erfolgt.

Mit Hilfe dieses Bildes wollen wir an die Klärung der Frage gehen, wie der Einfluß des Gasdruckes auf den Entladungsmechanismus aufzufassen ist. Zunächst ist es offensichtlich, daß Druckänderungen Änderungen der mittleren freien Weglänge der Entladungsträger innerhalb des Gases bewirken. Dies bewirkt weiter eine geänderte Trägerbeweglichkeit und damit eine Stromänderung. Eine solche Träger-Druckwirkung wird jedoch, wenn sie auch vorhanden sein mag, völlig überdeckt von den statistischen Stromschwankungen.

Z. B. würde einer Schalldrucksschwankung von 40 μBar nach dem Obigen bei Atmosphärendruck eine Koronastromschwankung vom $3 \cdot 10^{-5}$fachen des jeweiligen Stromes entsprechen. Bei einer Stromstärke von 50 μA würden also die durch Träger-Druckwirkung verursachten Stromschwankungen $\sim 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ μA betragen, d. h. etwa $^1/_7$ der statistischen. Aus den statischen und dynamischen Messungen hatte sich jedoch ein etwa zwei Größenordnungen höher liegender Wert der Druckempfindlichkeit ergeben.

Die Wirkung des Druckes auf die Trägerbeweglichkeit reicht also nicht aus, um die beobachtete Empfindlichkeit zu erklären, selbst wenn man die statischen Werte zugrunde legt, die ja etwa $^1/_4$ der dynamischen betrugen. Sucht man nach einer Erklärung, so bietet sich als einfachste die Beeinflussung der Trägererzeugung durch den Druck an. Da in der stationären Koronaentladung die Ionisierung hauptsächlich durch Elektronenstoß erfolgt, so liegt es nahe, zunächst von anderen Effekten abzusehen und eine Erklärung der Druckabhängigkeit allein auf Grund der Abhängigkeit des Elektronenstoß-Ionisierungskoeffizienten α vom Druck zu versuchen.

Die allgemeine Beziehung $\alpha/p = f(E/p)$, in der α die Zahl der pro Längeneinheit erzeugten Ionenpaare, p den Druck und E die an der Stelle der Ionisierung herrschende Feldstärke bedeutet, läßt erkennen, daß $\partial\alpha/\partial p$ bei nicht zu großer Stromstärke so lange von Null verschieden ist, als $f(E/p) \neq E/p$. (Vorausgesetzt ist Konstanz der Feldstärke E, was für größere Stromstärken nicht der Fall zu sein braucht.) Im allgemeinen ist also α vom Druck abhängig.

Wir wollen jetzt mit J_0 den Strom bezeichnen, der unter dem Einfluß der Elektrodenspannung fließen würde, wenn $\alpha \equiv 0$ wäre, der jedoch die durch Rückwirkung der vorangehenden Lawine erzeugten Elektronen enthält. Nimmt man nun an, daß Ionisierung längs des Weges d stattfindet und daß ferner die Feldstärke im Ionisationsgebiet konstant ist, so wächst J_0 auf $J_0 \cdot e^{\alpha d}$ an. Unter diesen Voraussetzungen erhält man für $\partial J/\partial p$, wenn man J_0 in erster Näherung als druckunabhängig ansieht: $\partial J/\partial p = J \cdot d \cdot \partial\alpha/\partial p$. $\partial\alpha/\partial p$ kann man nun als Funktion von E/p bestimmen, sobald die Funktion f in der Beziehung $\alpha/p = f(E/p)$ bekannt ist. Es soll hier die Beziehung[1])

$$\frac{\alpha}{p} = A\left(\frac{E}{p} - B\right)^2$$

benutzt werden, die mit $A = 1{,}35 \cdot 10^{-4}$ und $B = 28{,}8$ für E/p von etwa 36 bis 180 gültig ist (die in unseren Entladungsstrecken auftretenden E/p-Werte fallen in diesen Bereich). Setzt man in die allgemeine Beziehung für $\partial\alpha/\partial p$ für $f(E/p)$ und $f'(E/p)$ die aus obiger Gleichung folgenden Werte ein, so ergibt sich nach einfacher Zwischenrechnung $\partial\alpha/\partial p = A[B^2 - (E/p)^2]$. Einsetzung in die Formel für $\partial J/\partial p$ ergibt $\partial J/\partial p = A \cdot J \cdot d \cdot [B^2 - (E/p)^2]$. d soll nun die Dicke der den Sprühdraht umgebenden „Koronahaut" bedeuten, für die bekanntlich gilt: $d = 0{,}8\sqrt{r_i}$ (r_i = Radius des Innenzylinders)[2]). Damit erhält man schließlich

$$\frac{\partial J}{\partial p} = 0{,}3 \cdot A \cdot J \cdot \sqrt{r_i}\left[B^2 - \left(\frac{E}{p}\right)^2\right].$$

Diese Beziehung ist für folgende, möglichst verschiedenen Entladungsbedingungen entsprechende Fälle nachgeprüft worden. Die Nummern in Spalte 1 der folgenden Tabelle beziehen sich auf die Kurven der entsprechenden Abbildungen in I. Die Werte von $-\partial J/\partial p$ (in mA/Bar) sind für den Druck von 750 Torr den Kurven entnommen. Für E/p ist der (als konstant angenommene) Wert im Innern der Koronahaut eingesetzt,

[1]) A. Jodlbauer, ZS. f. Phys. 92, 124, 1934. — [2]) F. W. Peek jr., a. a. O., S. 58.

d. h. der bei Fehlen von Raumladungen im Abstand d vom Sprühdraht sich ergebende.

Wie man sieht, sind zwar die berechneten Werte um den Faktor 1,2 bis 1,7 zu hoch, geben aber den Gang und die Größenordnung der Druckempfindlichkeit — auch dem Vorzeichen nach — richtig wieder. Zu berücksichtigen ist dabei, daß ziemlich grob vereinfachende Vorstellungen der Berechnung zugrunde liegen, und daß ferner für die Druckabhängigkeit einer Koronastrecke nicht nur die Druckabhängigkeit von α maßgebend sein wird.

Tabelle 3.

Figur Nr.	$-\partial J/\partial p$ ber.	gem.
2a 2	0,75	0,45
3a	1,84	1,1
5a	1,14	0,98

Es kann also angenommen werden, daß für die Druckwirkung nur die den Sprühdraht umgebende Koronahaut empfänglich ist. Da diese mit r_i abnimmt, kann man sie, solange das gilt, durch Wahl eines genügend kleinen Drahtradius beliebig dünn machen, sofern nur der Sprühdraht die Strombelastung aushält. Damit kann aber selbst bei Schallfrequenzen über 10^5 Hz noch eine Verwendbarkeit der Koronastrecke als Schallempfänger erwartet werden.

Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler.

Von **Z. Bay** in Budapest.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 15. November 1940.)

Eine neue, auf die sekundäre Elektronenvervielfachung gegründete Methode der Zählung von Elektronen wird beschrieben. Die zu diesem Zweck verwendbaren Elektronenvervielfacher müssen einen kleinen Nulleffekt aufweisen. Dies war auf zwei Wegen zu erreichen: a) durch Kühlung der Elektroden mit flüssiger Luft, oder b) bei Verwendung von Elektroden mit hoher Austrittsarbeit. — Als sekundäremittierende Elektroden wurden die bekannte Ag-Cs_2O-Cs-Elektrode, Legierungen von Cu und Zn (Messing), Ag und Mg, Fe und Cr (letztere nach vorangegangener Wärmebehandlung und Oxydierung) verwendet. Der erhaltene Koeffizient der sekundären Emission betrug 4,5 bis 6 bei einer primären Elektronengeschwindigkeit von 200 Volt. — Verglichen mit den Methoden, wo sich die Zählung in einer Gasatmosphäre abspielt, zeichnet sich die beschriebene Methode dadurch aus, daß nur Vakuumvorgänge verwendet werden. Dadurch erklärt sich das hohe, die bekannten Methoden mit einigen Größenordnungen übersteigende Auflösungsvermögen und die gute Reproduzierbarkeit. Der Einfluß einer Nachverstärkung auf das Auflösungsvermögen wird ausführlich untersucht. Die Methode wurde auf Licht-, α-, β-, γ- und Röntgen-Strahlen angewendet.

Einleitung.

In zwei kurzen Notizen[1] [2]) habe ich das Prinzip eines neuen Korpuskularzählers angegeben. Dem Zählverfahren lag die Idee der Vervielfachung von Elektronen durch sekundäre Emission zugrunde. Im Gegensatz zu den bisherigen elektrischen Zählmethoden, die alle von der Ionisation einer Gasatmosphäre Gebrauch machen, verwendet das neue Verfahren nur Vakuumprozesse. Infolgedessen ergibt sich eine Reihe von Vorteilen, die folgenderweise zusammengefaßt werden können:

1. Es ist keine Gasatmosphäre vorhanden; eine sekundäre Wirkung derselben kommt deshalb nicht in Frage.

2. Infolge der Abwesenheit von schweren Teilchen verkürzte sich die zum Zählprozeß notwendige Zeit um zwei bis drei Zehnerpotenzen, d. h. das zeitliche Auflösungsvermögen wird stark vergrößert.

Naturgemäß gestattet das neue Verfahren die Zählung aller Elektronen auslösender Prozesse (s. S. 242). In den erwähnten zwei kurzen Notizen behandelte ich die Zählung von Licht- und γ-Quanten, seitdem dehnte

[1]) Z. Bay, Nature **141**, 284, 1938. — [2]) Z. Bay, ebenda S. 1011.

ich meine Untersuchungen auf die Zählung von α- und β-Korpuskeln und auf Röntgenstrahlen aus. Neuerdings hat sich Allen[1]) auch derselben Methode zugewendet und verwendete sie — in Verbindung mit einem Massenspektrographen — auf Atomstrahlen. Als Ergebnis dieser Untersuchungen hat sich das Prinzip der Multiplikation mittels sekundärer Elektronen als Zählmethode universell bewährt.

Elektronen-Vervielfacher.

Slepian[2]) war der erste, der das Prinzip der Sekundäremission auf die Konstruktion eines Elektronenvervielfachers anwandte. Seine Anordnung gestattete die primären Elektronen durch wiederholte sekundäre Emission, zu vervielfachen. Bezeichnet m das Verhältnis der Zahl der entstandenen sekundären Elektronen zu jener der primären, dann beträgt die Gesamtzahl der Elektronen in der letzten Stufe m^n, wenn n Stufen verwendet werden. Diese optimale Zahl kann aber nur dann erhalten werden, wenn Sorge getragen wird, daß praktisch alle in einer Stufe entstandenen Elektronen die nächste Stufe tatsächlich erreichen. Das ist erst von Zworykin[3]) verwirklicht worden, dem es durch eine zweckmäßige Anordnung der Elektroden und durch Anwendung elektronenoptischer Mittel gelang, die eine emittierende Fläche verlassenden Elektronen auf die nächste zu fokussieren. Die Technik des Fernsehens kennt manche praktischen Ausführungsformen des Zworykinschen „Multiplier". Die untere Grenze der Lichtempfindlichkeit solcher Röhren liegt — infolge der in der Röhre sich abspielenden Stromverstärkung — bei ungefähr um zwei Größenordnungen kleineren Intensitäten, als bei gewöhnlichen Photozellen mit nachfolgender Röhrenverstärkung.

Im Laufe der Versuche wurden verschiedene Vervielfacher (einige von der Radio Corporation in Amerika hergestellte zehnstufige Röhren mit magnetischer Fokussierung und verschiedene in unserem Laboratorium hergestellte Röhren mit magnetischer und elektrostatischer Fokussierung) verwendet. Die Art und die Herstellung der Elektroden der selbstgemachten Röhren wird später beschrieben; die innere Konstruktion derselben ersieht man aus den Fig. 1, 2, 3. Vom Standpunkte unseres Problems: Zählung der Elektronen, spielt die Geometrie der Elektroden und die Art der Fokussierung der Elektronen keine entscheidende Rolle. Demgegenüber sind folgende Gesichtspunkte von großer Wichtigkeit:

[1]) J. S. Allen, Phys. Rev. **55**, 966, 1939. — [2]) J. Slepian, U. S. A.-Pat. Nr. 1450265, 1923. — [3]) V. K. Zworykin, Proc. Inst. Radio Eng. **24**, 351, 1936.

1. Der Nulleffekt soll so klein wie möglich sein.

2. Die Feldemission soll außerordentlich klein sein bei den angewendeten Spannungen.

3. Die Isolation der Ausgangselektrode soll möglichst hoch und ihre Kapazität möglichst niedrig gehalten werden (s. insbesondere Tabelle 2 auf S. 239).

Die auf dem Markte erhältlichen Vervielfacher entsprechen nicht den obigen Forderungen. So wurde ein zehnstufiges Exemplar der bekannten Vervielfacherröhre mit Ag—Cs_2O—Cs-Elektroden untersucht. Die Zahl der von einer solchen Fläche ausgesandten Richardson-Elektronen beträgt bei Zimmertemperatur [$A = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$ Amp./cm^2 · grad^2 $\varphi = 0{,}75$ Volt], $N = 10^{10}$ El · cm^{-2} sec^{-1}, und infolge der Vervielfachung tritt ein Strom von $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ Amp. an der Anode auf, dessen statistische Schwankung bereits viel größer ist als die Amplitude des durch die Vervielfachung eines einzigen Elektrons zu erwartenden Stoßes.

Zwei Wege stehen zur Verfügung, die thermische Emission bzw. den Nulleffekt herabzusetzen:

Methode a): *Erniedrigung der Temperatur*[1]). Bei Zimmertemperatur beträgt die thermische Emission der erwähnten Ag—Cs_2O—Cs-Schicht 10^{10} El · cm^{-2} sec^{-1}, dieselbe wird zu $8{,}7 \cdot 10^{-4}$ El · cm^{-2} sec^{-1} bzw. zu $2{,}8 \cdot 10^{-10}$ El · cm^{-2} sec^{-1} reduziert bei 150° K, bzw. 120° K. Durch Kühlung mit flüssiger Luft läßt sich also die Forderung 1 gut verwirklichen.

Methode b): *Anwendung von sekundäremittierenden Flächen mit hoher Austrittsarbeit.* Es sei verlangt, daß die Zahl der bei Zimmertemperatur emittierten thermischen Elektronen nicht mehr als 10/min pro cm^2 betrage. Gesucht ist eine entsprechende emittierende Schicht, charakterisiert durch den Wert der Austrittsarbeit bei gegebenem Wert der Richardsonschen Konstante A. Die in Betracht kommenden Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Infolge der Unsicherheit, die den Bestimmungen der Richardson-Konstanten anhaftet, gibt die Tabelle nur einen ungefähren Anhaltspunkt zur Auswahl der geeigneten Schichten. Die Streuung der in der Literatur vorkommenden Werte wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die erwähnten zwei Konstanten, insbesondere die Austrittsarbeit, stark von der Art der Herstellung der emittierenden Flächen abhängen.

Tabelle 1.

A Amp/cm^2 grad^2	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
φ Volt	1,48	1,42	1,36	1,30	1,25	1,19

[1]) Vgl. R. Schulze, ZS. f. Phys. **90**, 63, 1934.

Versuche nach Methode a). Am Anfang der Arbeit hatte ich nur eine beschränkte Anzahl kommerzieller Caesiumvervielfacher zur Verfügung. Auch war das Erscheinungsgebiet der sekundären Emission nicht soweit erforscht, daß man mit Sicherheit die Wahl derjenigen Elektrode hätte treffen können, die einen geeigneten Wert des Koeffizienten der sekundären Emission und einen hohen Wert der Austrittsarbeit vereint aufweist. Die ersten Versuche schienen gerade das Gegenteil des Gewünschten zu beweisen, nämlich, daß ein hoher Wert des Koeffizienten der sekundären Emission gewöhnlich mit einem *niedrigen* Wert der Austrittsarbeit begleitet ist. Das ist der Grund gewesen, der die ersten Versuche der Methode a) zulenkte. Die thermische Emission der Ag—Cs_2O—Cs-Schicht konnte durch Kühlung mit flüssiger Luft fast vollständig beseitigt werden und da es gelang, eine gute Isolierung der Ausgangselektrode zu erreichen und die Feldemission nicht störte, war die Möglichkeit gegeben, das Prinzip der sekundären Emission als Zählmethode auf ihre Brauchbarkeit nachzuprüfen.

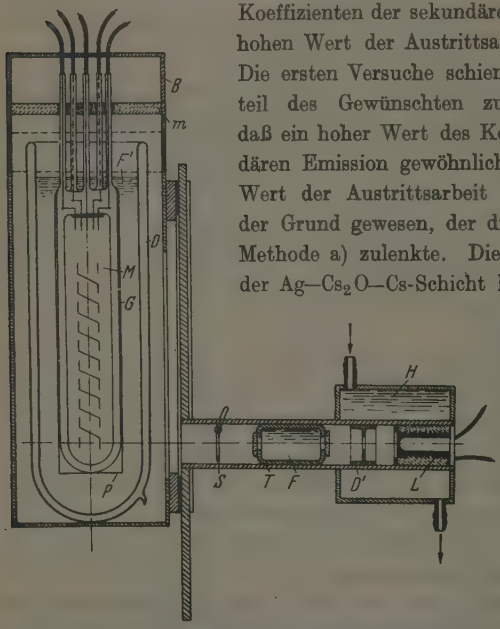


Fig. 1. Methode a). Vervielfacherröhre mit magnetischer Fokussierung, gekühlt mit flüssiger Luft. Anordnung für Zählung von Photonen.

Fig. 1 zeigt die verwendete experimentelle Anordnung. Die Vervielfacherröhre war in flüssige Luft getaucht, die in der Dewar-Flasche *D* enthalten war. Das fokussierende magnetische Feld, dessen Kraftlinien auf die Ebene der Zeichnung senkrecht stehen, wurde von einem Elektromagnet (nicht gezeichnet) geliefert. Die Zuführungsdrähte der Elektroden gehen isoliert durch eine Messingkappe *B* durch. Der Vervielfacher *M* ist in eine Glashülle *G* eingebaut, oben mit langen Ansätzen für die Zuleitungen versehen; um eine gute Isolation zu erreichen und etwaige Kondensation zu vermeiden, wurde der Zwischenraum zwischen *M* und *G* mit getrocknetem Stickstoff gefüllt. *G* ist in schwarzes Papier *P* eingehüllt und taucht direkt

in die flüssige Luft. P dient teilweise dazu, um diffus reflektiertes Licht abzufangen, teils dazu, die Kühlung der im Vakuum der Röhre untergebrachten, durch Strahlung allein gekühlten Elektroden zu beschleunigen. Auch schützt es die Röhre von der Strahlung des auf Zimmertemperatur befindlichen Micalex-Ringes m und der Messingkappe B. Am schwarzen Papier und an der Versilberung des Dewar-Gefäßes waren entsprechende Fenster angebracht, die dem Licht der im Seitenrohr T enthaltenen Lichtquelle L (kleine Glühlampe, oder schwarzer Körper) freien Durchgang gestatteten. Die langwellige ultrarote Strahlung wurde vom Wasserfilter F absorbiert; das Seitenrohr T war vom Wasserkühler H gekühlt. D' ist ein Diaphragma, S ein Lichtverschluß.

Die an der Anode des Vervielfachers entstehenden Spannungsstöße wurden durch einen Dreiröhrenverstärker mit veränderlicher Bandbreite verstärkt, wodurch die Stöße bereits in einem Lautsprecher hörbar waren. Die visuelle Beobachtung am Schirm der Kathodenstrahlröhre, oder die Betätigung eines Telephonzählers erfordert noch einen weiteren Verstärker. Zum Betrieb des Telephonzählers dient eine Thyratronröhre.

Der Gang der Beobachtungen war wie folgt: Bei Zimmertemperatur fließt ein Gleichstrom von 17 μA, der durch die thermische Emission der Caesiumelektroden verursacht wird, durch den Anodenwiderstand. Da der Gleichstrom nicht registriert wird, zeigt der Leuchtschirm der Kathodenstrahlröhre nur die Schrotschwankung an. Mit der Fortschreitung der Kühlung vermindert sich diese Schwankung, da die thermische Emission abnimmt. Man sieht bei Verwendung einer horizontalen Zeitachse Stöße, die sich auf beide Seiten der Horizontale, nach unten und oben gleicherweise erstrecken. In ungefähr 10 Minuten ändert sich das Bild: die Stöße verlieren ihren alternierenden Charakter und werden immer mehr *einseitig*. Wenn die Endtemperatur erreicht ist, vermindert sich die Zahl dieser Stöße auf eine kleine Anzahl pro Minute und bleibt nahe konstant. Das ist der Nulleffekt der Anordnung. Die Höhe der übrig gebliebenen Stöße ist bei dem verwendeten Vervielfacher (Gesamtvervielfachung 10^4) um eine Größenordnung größer als jene des Schroteffektes des Verstärkers, der sich als eine dauernde kleine Schwankung der Nullinie kundgibt. Die von der Seitenröhre T ausgehenden Photonen erhöhen die Anzahl der beobachtbaren Stöße und können gezählt werden (s. S. 241).

Es mußte Sorge getragen werden, akustische und elektrische Störungen durch entsprechenden Aufbau und Abschirmung zu beseitigen.

Versuche nach Methode b). Für diesen Zweck wurde eine zehnstufige Röhre gebaut, deren emittierende Flächen die Zusammensetzung Ni—Ba O—Ba

hatten (hergestellt nach dem bei den Radioröhren üblichen Verfahren). Der Vervielfachungsfaktor wurde $m = 2{,}5$ gefunden (bei einer primären Geschwindigkeit von 200 V), die totale Verstärkung 10^4. Die thermische Emission war verschwindend klein, der Nulleffekt ungefähr 5 pro Minute. Es war möglich, die von einer Lichtquelle ausgelösten, oder von einem eingebauten Hitzdraht kommenden individuellen Elektronen zu zählen. Weitere Versuche zeigten gewisse Unregelmäßigkeiten, die eine gute Reproduzierbarkeit nicht gestatteten. Die Austrittsarbeit der Schicht lag in ziemlicher Nähe des durch Tabelle 1 geforderten Wertes und die kleinste Schwankung derselben — die von unkontrollierbaren Ursachen bei der Herstellung herrührt — bringt die thermische Emission zum Vorschein, die eine Erhöhung des Nulleffektes bis auf etwa 1000/min herbeiführen kann. Schichten, wo an Stelle von BaO, SrO oder eine Mischung der Oxyde von Ba, Sr und Ca verwendet wird, zeigen ähnliches Verhalten. Möglicherweise sind die erwähnten Unregelmäßigkeiten durch die grobkörnige Struktur der verwendeten Materialien bedingt. Es wurde deshalb nach einem Material gesucht, dessen Oxydschicht mikrokristallinische Struktur aufweist. Legierungen von Mg wurden neuerdings von Zworykin als Elektroden von Vervielfachern vorgeschlagen. Das zu verwendende Material soll vor dem Einbau in die Röhre in Vakuum erhitzt werden. Bei Wiederholung der entsprechenden Versuche fand ich, daß stabilere Werte der Sekundäremission erhalten werden können, wenn man die Wärmebehandlung in einer Sauerstoffatmosphäre an Stelle des Vakuums ausführt. Zur Erklärung dieser Tatsache könnte angenommen werden, daß die Wärmebehandlung die Diffusion von Mg an die Oberfläche begünstigt und die freie Mg-Fläche im Sauerstoff zu MgO oxydiert wird. Die MgO-Oberfläche hat entweder für sich bessere sekundär emittierende Eigenschaften als die Legierung, oder die erhöhte sekundäre Elektronenemission ist eine Folge der Eigenschaft der Fläche, Alkalien — die als Verunreinigungen immer vorhanden sind — besser binden zu können. Letztere Vermutung wird durch die Beobachtung unterstützt, daß, wenn absichtlich Alkalien auf die Fläche aufgetragen werden, der sekundäre Emissionskoeffizient dadurch erhöht wird. Als günstigste Vorbehandlung erwies sich ein halbstündiges Erhitzen auf 400° C in einer Sauerstoffatmosphäre von 0,2 bis 0,3 mm Hg. Aus so behandeltem Material verfertigte Elektroden haben einen Multiplikationsfaktor von 4,5 bis 6 bei 200 bis 300 Volt Primärgeschwindigkeit und besitzen reproduzierbare Eigenschaften. Eine primäre (Richardson) Emission war bei Zimmertemperatur nicht zu beobachten. Der größte Vorteil solcher Elektroden ist die Möglichkeit, sie in der freien Luft, ohne die Gefahr, ihre

sekundären Emissionseigenschaften zu verlieren, aufbewahren zu können. Auf diese Weise verfertigte Röhren können beliebig oft geöffnet und wieder ausgepumpt oder an irgendeine Vakuumapparatur für Meßzwecke angeschlossen werden.

Eine vor kurzem gebaute zwölfstufige Vervielfacherröhre (mit emittierenden Elektroden aus Mg—Ag-Legierung) hatte folgende Eigenschaften: gemessene Gesamtmultiplikation: 10^8, Gesamtspannung 3000 Volt, Isolation etwa 10^{14} Ohm. Der letztgenannte hohe Wert erklärt sich aus dem Umstande, daß kein Getter verwendet wurde, da es sich bei den Versuchen herausstellte, daß zum einwandfreien Funktionieren der Röhre als Zähler

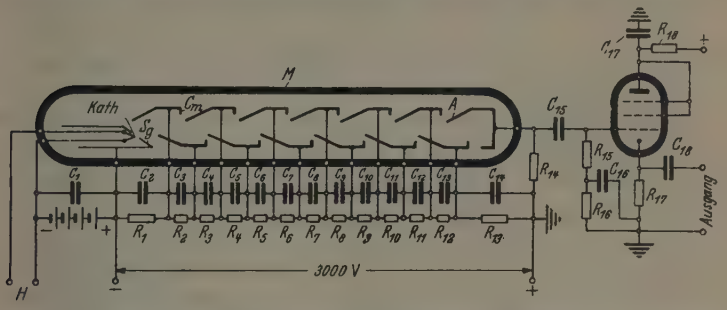


Fig. 2. Methode b). Vervielfacherröhre mit elektrostatischer Fokussierung und Einröhrenverstärker. *Sg* = Schutzgitter, *H* = Glühkathode.

kein sehr gutes Vakuum erforderlich ist. Es genügt, daß in der Röhre keine Glimmentladung entsteht. Bei den verwendeten Spannungen war keine Feldemission zu beobachten.

Die obenerwähnte Erklärung, wonach die gute sekundäre Emission dadurch entsteht, daß diejenige Komponente der Legierung, die den niedrigeren Schmelzpunkt hat, aus der Legierung herausdiffundiert und auf der Oberfläche oxydiert wird, wurde durch weitere Versuche unterstützt. Es zeigte sich, daß die gute sekundäre Emission nicht an das Vorhandensein von Mg geknüpft ist, und daß ähnlich hohe Vervielfachungsfaktoren mit Zn- und Cu- (Messing) und mit Fe- und Cr-Legierungen nach ähnlicher Vorbehandlung zu erreichen sind. Vervielfacherelektroden aus Messing zeigten einen Vervielfachungsfaktor von 5, der auch nach einer tausendstündigen makroskopischen Stromentnahme erhalten blieb.

Wenn keine Kühlung mit flüssiger Luft verwendet wird, vereinfacht sich die ganze Einrichtung wesentlich. Der hohe Wert des Koeffizienten der sekundären Emission gestattet eine beträchtliche Vereinfachung der

elektrischen Schaltung. Keine elektrische Abschirmung ist mehr nötig und sämtliche früher notwendigen Vorsichtsmaßregeln, die Mikrophonie zu bekämpfen, sowie die Isolation zu verbessern, sind nun entbehrlich. Der Dreiröhrenverstärker der Methode a) vereinfacht sich auf eine Verstärkerröhre. Fig. 2 gibt die prinzipielle Schaltung an; der Apparat ist immer betriebsbereit und registriert reproduzierbar und automatisch die zu zählenden Partikeln. Das volle Auflösungsvermögen der Methode kann ausgenutzt werden (s. S. 239).

In allen Fällen — mit Ausnahme der Zählung von ultraroten Photonen — (s. S. 241) gibt Methode b) einen einfacheren Aufbau der Einrichtung und eine bequemere Arbeitsmöglichkeit als Methode a).

Der Nulleffekt.

Um festzustellen, welcher von den möglichen Ursachen — thermische Emission, Feldemission, kosmische Strahlen — der noch übriggebliebene kleine Nulleffekt zuzuschreiben ist, wurden die Temperatur der Röhre, sowie die verwendete Spannung systematisch erniedrigt. Man kann annehmen, daß jener Teil des Nulleffektes, der sich bei weiterer Erniedrigung der Temperatur und der Röhrenspannung nicht mehr ändert, von kosmischen Strahlen herrührt. Diese Folgerung wird dadurch bestätigt, daß die Größe des Nulleffektes von derselben Größenordnung ist als die Anzahl der Stöße, die erwartungsgemäß von kosmischen Strahlen ausgelöst werden. Auch ist die Amplitude der Nulleffektstöße größer als jene, die man individuellen Elektronen zuschreiben könnte, was damit in Einklang steht, daß unter dem Einfluß der kosmischen Strahlen eine gleichzeitige Auslösung von mehreren Elektronen aus der Kathode zu erwarten ist. Je nach Dicke und Material der Kathode war ein Nulleffekt von 1 bis 5 Stößen pro Minute beobachtet.

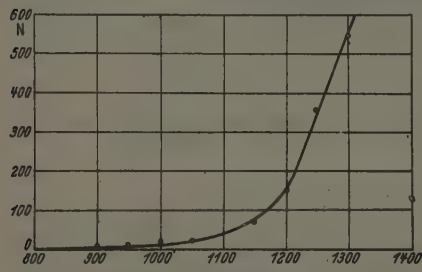


Fig. 3. Änderung des Nulleffektes einer Caesiumröhre mit der Gesamtspannung.

Fig. 3 deutet an, wie der Nulleffekt eines Cs-Vervielfachers sich unter dem Einfluß der Feldemission ändert. Solange die Elektrodenspannung unter 950 Volt bleibt, beträgt der Nulleffekt, wie es der Anfang der Kurve anzeigt, nicht mehr als ein Stoß pro Minute. Mit Erhöhung der Spannung

vergrößert sich auch der Nulleffekt, zuerst langsam, dann schneller. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, die Feldemission bis zu extrem schwachen Strömen frei von Nebenerscheinungen studieren zu können.

Amplitudenverteilung.

Die Amplituden der an der Anode des Vervielfachers entstandenen Spannungsstöße zeigen eine statistische Schwankung. Zur Untersuchung dieser Erscheinung wurden die Stöße mittels einer Kathodenstrahlröhre auf photographischem Film registriert und ausgemessen. Eine so gewonnene Verteilungskurve ist in der Fig. 4 wiedergegeben. Daß der Vervielfachungsfaktor des Multiplikators eine Schwankung zeigt, liegt wohl in der Natur der Erscheinung. Einerseits weist die sekundäre Elektronenemission als Elementarakt eine Streuung auf, andererseits ist die Fokussierung der Elektronen in den verschiedenen Stufen ebenfalls mit einer Streuung verknüpft. Diese Frage ist von Zworykin, Morton und Malter[1]), sowie von Schokley und Pierce[2]) behandelt worden. Letztgenannte Autoren haben nachgewiesen, daß aus der im makroskopischen Falle gewonnenen Stromschwankungsmessungen der mittlere Wert und die Streuung der sekundären Emission bestimmt werden kann. In dem uns interessierenden Falle (mikroskopischer Fall) wird eine nähere Untersuchung der Amplitudenverteilung die *Wahrscheinlichkeitskurve* der sekundären Emission ergeben. Diesbezügliche Untersuchungen sind in Angriff genommen worden.

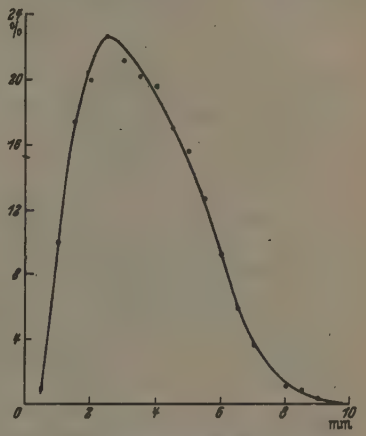


Fig. 4. Amplitudenverteilung der Stöße. Ordinate: Prozentzahl der Stöße pro 0,5 m/m Abszissenintervall.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ist von prinzipieller Wichtigkeit der experimentell gewonnene Befund, daß (wie z. B. aus Fig. 4 zu ersehen) die Verteilungskurve der Amplituden ein *außerhalb* der Null-

[1]) V. K. Zworykin, G. A. Morton u. L. Malter, Proc. I. R. E. **24**, 351, 1936. — [2]) W. Schokley and I. R. Pierce, Proc. I. R. E. **26**, 321, 1938.

stelle befindliches *Maximum* zeigt. Wird die Verstärkung erhöht, so erreicht die Zahl der beobachteten Stöße eine Sättigung. Erst dadurch ist die Möglichkeit gegeben, einen Vervielfacher als Zähler verwenden und die Ausbeute der Elektronen auslösenden Prozesse bestimmen zu können (s. S. 243).

Das Auflösungsvermögen.

In Gegensatz zu gasgefüllten Auslösezählern nimmt der Anodenstrom der Vervielfacherröhre proportional der Zahl der die Kathode verlassenden Elektronen zu, wenn die Anzahl der zu zählenden Elektronen beliebig erhöht wird. Der *Zähler* geht also stetig in einen *Intensitätsmesser* über.

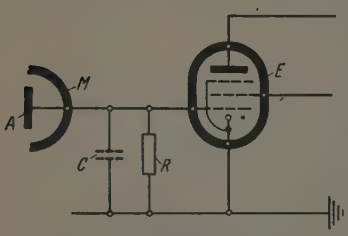


Fig. 5. Prinzipielle Schaltung einer Vervielfacherröhre und Eingangsstufe eines Verstärkers.

Abgesehen von diesem Vorteil ist das zeitliche *Auflösungsvermögen* bei der neuen Zählmethode größer als jenes von *allen* bisher existierenden Zählern. Das Auflösungsvermögen wird mit dem Zeitintervall definiert, welches notwendigerweise nach einem eingeleiteten Zählvorgang vergehen muß, um den nächstfolgenden Zählvorgang getrennt beobachten zu können. Diese Zeitdauer ist bei den gasgefüllten Zählern jedenfalls nicht kleiner als 10^{-4} sec, da die Stoßdauer unter optimalen Bedingungen von der gleichen Größenordnung ist[1]).

Nach Zworykin (l. c.) arbeitet eine Vervielfacherröhre bei Frequenzen von 10^8 sec^{-1} noch ohne Verzerrung. Hieraus folgt, daß das notwendige Zeitintervall, welches zwei einzelne Stöße beim Zählen trennen muß, kleiner ist als 10^{-8} sec. Dieses Zeitintervall wird nur durch die Laufzeit der Elektronen bedingt. Wir können also diese Zeitdauer — solange weitere diesbezügliche Messungen fehlen — 10^{-8} sec als das Auflösungsvermögen der Vervielfacherröhre akzeptieren. Es fragt sich nun, ob und inwieweit dieses bei nachfolgender Röhrenverstärkung ungünstig beeinflußt wird. Diese Fragestellung ist von Wichtigkeit, solange man nicht imstande ist, eine Röhre zu bauen, die ohne Nachverstärkung die Registrierung der Spannungsstöße ermöglicht. Die nachfolgenden Überlegungen zeigen, daß das hohe Auflösungsvermögen der Röhre nur dann ausgenutzt werden kann, wenn die Vervielfachung einen bestimmten, gut angebbaren Wert übertrifft. Ist das nicht der Fall, so sind wir zwar imstande, durch entsprechende

[1]) A. Trost, ZS. f. Phys. **105**, 399, 1937; J. M. Lyshade u. J. C. Madsen, ebenda **108**, 777, 1938.

Nachverstärkung die Spannungsstöße zu beobachten, erhalten aber notwendigerweise ein kleineres Auflösungsvermögen.

Fig. 5 zeigt die prinzipielle Schaltung einer Vervielfacherröhre und Eingangsstufe eines Verstärkers. Die Ladung q an der Anode der Röhre ladet die Kapazität C auf, die durch den Widerstand R entladen wird. Die untere Grenze von C ist die Summe der Ausgangskapazität des Vervielfachers und der Eingangskapazität der Verstärkerröhre, die obere Grenze von R wird durch den größtmöglichen Isolationswiderstand der Vervielfacheranode und des Gitters der Eingangsröhre gegeben. Der Spannungsstoß kann als Funktion der Zeit durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{Rq}{t_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) && \text{wenn} \quad 0 \leqq t < t_0, \\ V &= \frac{Rq}{t_0}\left(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}\right) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} && \text{wenn} \quad t_0 < t. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hier ist $t_0 \sim 10^{-8}$ sec die Aufladezeit der Anode (während der der Ladestrom als konstant betrachtet werden kann). C ist ungefähr gleich 10^{-11} F, für R war ein Wert von 10^{12} Ohm leicht zu erreichen, so daß die Zeitkonstante $RC \sim 10$ sec beträgt. Da die Werte von t_0 und RC von ganz verschiedener Größenordnung sind, hat die maximale Spannung einen angenäherten Wert von q/C und die Kurve kann mit sehr großer Annäherung durch den folgenden *Sprung* dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} V &= 0 && \text{wenn} \quad t < 0, \\ V &= \frac{q}{C} = a && \text{wenn} \quad t \geqq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Resonanzkurve des Verstärkers möge die einfache Form des idealen Bandfilters haben, nämlich $r(\omega) = 1$ im Innern des Intervalls $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$ und $r(\omega) = 0$ außerhalb desselben.

Küpfmüller[1]) hat gezeigt, daß

1. Wenn $\omega_1 = 0$, hat die Ausgangskurve eine ähnliche Form, als jene von (2) mit dem Unterschiede, daß die Amplitude a erst in der Zeit von

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_2} \tag{3}$$

erreicht wird.

2. Wenn $\omega_1 \neq 0$, wird die Amplitude der Ausgangskurve

$$x_{max} = \frac{a}{\pi \Omega}(\omega_2 - \omega_1), \quad \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{4}$$

[1]) K. Küpfmüller, Elektr. Nachrichtentechnik **1**, 141, 1924.

Die Zeit, in der das Maximum erreicht wird, wird in diesem Falle von Küpfmüller nicht berechnet; eine nähere Berechnung gibt als Minimum dieser Zeit:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{5}$$

(8) ist also auch in diesem Falle gültig und die zur Messung notwendige Zeit ist in beiden Fällen umgekehrt proportional der Bandbreite.

Nun hängen die bekannten Störgeräusche des Verstärkers ebenfalls von der Bandbreite ab. Der Johnson-Effekt, der — infolge des Nebenschlusses von R und C — auch von der Frequenz abhängt, kann durch eine entsprechende Erhöhung von R verschwindend klein gemacht werden. Das mittlere Quadrat der Amplitude des Schrot- und Flicker-Effektes beträgt:

$$\overline{y^2} = \frac{2kT}{\pi} R_{ae} (\omega_2 - \omega_1), \tag{6}$$

wo R_{ae} den vom Standpunkte der Geräusche der Röhre äquivalenten Röhrenwiderstand bezeichnet.

Die Bedingung der Meßbarkeit von x_{max} ist

$$x_{max} > \varrho \sqrt{\overline{y^2}}, \tag{7}$$

wo $\varrho > 1$ die Genauigkeit der Messung kennzeichnet.

Die Bedingung der Meßbarkeit lautet also im Falle (1) aus den Gleichungen (3), (6) und (7)

$$a\sqrt{\tau} \geqq \varrho \sqrt{2kTR_{ae}} \tag{8}$$

im Falle (2) [aus (4), (5), (6), (7)]

$$a\sqrt{\tau} \geqq \varrho \sqrt{2kTR_{ae}} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{9}$$

Die kleinste Amplitude, die noch gemessen werden kann, ist im Falle (1) kleiner als im Falle (2). Das zeigt den Vorteil der Niederfrequenzverstärkung. Bei der Verstärkung von sehr niedrigen Frequenzen treten gewisse Schwierigkeiten auf, aber es genügt, wenn der Bedingung $\omega_1 \ll \omega_2$ entsprochen wird [1]).

Gleichung (8) ist die Ausdehnung der bekannten Regel der Theorie des Galvanometers auf Röhrenverstärker. Bekanntlich wird die Empfindlichkeit des Galvanometers nach unten durch die Brownsche Bewegung

[1]) Wenn $\omega_1 = 0$ gibt (9) in der Grenze (8), aber multipliziert mit $\pi/2$. Diese Abweichung erklärt sich durch die nur angenäherte Gültigkeit von (4). Eine genauere Vergleichung der beiden Fälle (1) und (2) hat die Frequenzabhängigkeit von R_{ae} in Betracht zu ziehen. Bei niedrigeren Frequenzen muß man den Flicker-Effekt besonders in Rechnung ziehen.

des Systems begrenzt, dessen Energie bei einem Freiheitsgrade bis auf $^1/_2\,kT$ unbestimmt bleibt. Die Rolle des Widerstandes des Galvanometers übernimmt hier der Schroteffekt der ersten Röhre, bzw. der äquivalente Widerstand der Geräusche. (Ein genauerer Vergleich der Konstanten in beiden Fällen würde nur bei identischen Resonanzkurven möglich sein.)

Man sieht aus Gleichung (8), daß es bei einem Röhrenverstärker zwar durch Verminderung der Bandbreite möglich ist, beliebig kleine Spannungsstöße (Ladungen) zu messen, jedoch nur unter Verlängerung der Beobachtungszeit, also in unserem Falle auf Kosten des Auflösungsvermögens. Bei einer gegebenen Empfindlichkeit eines Registrierapparates ist es also im Interesse des Auflösungsvermögens günstig, die Stromverstärkung der Vervielfacherröhre höher und die Spannungsverstärkung des Nachverstärkers niedriger zu wählen. Dadurch ergibt sich der prinzipielle Vorteil der Vervielfacherröhre gegenüber einem Röhrenverstärker.

Tabelle 2. Zusammenhang zwischen Mindestamplitude und Beobachtungszeit.

Beobachtungszeit sec	Untere Frequenzgrenze sec^{-1}	Obere Frequenzgrenze sec^{-1}	Untere Grenze der meßbaren Ladung Elektron	Minimaler Widerstand Ω
10^{-8}	10^8	$5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^3$	*)
10^{-7}	10^8	$5 \cdot 10^6$	$1{,}6 \cdot 10^3$	$2{,}6 \cdot 10^6$
10^{-6}	10^8	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^2$	$6{,}3 \cdot 10^7$
10^{-5}	10^3	$5 \cdot 10^4$	$1{,}6 \cdot 10^2$	$6{,}3 \cdot 10^8$
10^{-4}	$\sim 5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10$	$\sim 10^{10}$
10^{-3}	$\sim 5 \cdot 10$	$5 \cdot 10^2$	$1{,}6 \cdot 10$	$\sim 10^{12}$
10^{-2}	~ 5	$5 \cdot 10$	5	$\sim 10^{14}$

Die Tabelle 2 gibt die Mindestamplituden an, die bei verschiedenen Beobachtungszeiten mit einem Röhrenverstärker noch beobachtbar sind, berechnet bei einem äquivalenten Störwiderstand der Eingangsröhre von 2000 Ohm. (Entsprechend ungefähr dem heutigen Stande der Röhrentechnik. Die Frequenzabhängigkeit wurde vernachlässigt.) Die Tabelle bezieht sich auf $\varrho = 1$. Die Mindestamplituden sind in Elektronenzahlen angegeben, wobei $C = 2 \cdot 10^{-11}$ F gesetzt wurde. Die in der vierten Reihe angegebenen Mindestwerte von R sind so berechnet, daß der effektive Wert des Johnson-Effektes dem des Schroteffektes gleichkommt.

Aus der Tabelle ersieht man, daß man, um das volle Auflösungsvermögen ($\tau \sim 10^{-8}$ sec) erhalten zu können, einen Bandfilter benutzen muß, dessen

*) Der Johnson-Effekt ist unabhängig vom verwendeten Widerstande immer kleiner als der Schroteffekt.

Bandbreite größer ist als $10^7\,\mathrm{sec}^{-1}$. Wenn $\varrho = 10$ gesetzt wird, so findet man $5 \cdot 10^4$ Elektronen als untere Grenze der Ladung, die gemessen werden kann. Infolge der Schwankung der Stoßamplituden der Röhre, die einen Fehler von einer Größenordnung verursachen kann, muß man eine Vervielfachung von ungefähr $5 \cdot 10^5$ zur Verfügung haben, um ein Auflösungsvermögen von der Ordnung 10^{-8} sec erhalten zu können. Dieser Wert war mit Hilfe der oben beschriebenen Röhre (s. S. 232) bereits zu erreichen. Ein kleinerer Wert der Vervielfachung kann zwar mit Hilfe der nachträglichen Verstärkung ausgeglichen werden, so daß die Beobachtung der Stöße möglich ist, aber nur auf Kosten des Auflösungsvermögens.

Photonenzählung.

Der Geiger-Müller-Zähler, das für die Zählung von energiereichen Photonen geeignete Instrument, zeigt in seiner Anwendung auf sichtbare und ultrarote Photonen gewisse Schwierigkeiten. Diese stammen hauptsächlich von der an der Alkalikathode adsorbierten Gasschicht[1] [2]), sowie von einer durch Ionenproduktion verursachten Änderung der Austrittsarbeit[3]). Das durch die Entladung verursachte Licht wirkt im Ablauf der Entladung mit[4]) und kann die Stoßdauer verlängern[5]). Infolge des niedrigen Wertes der Austrittsarbeit ist die Breite des „Spannungsplateaus" nicht größer als 10 bis 100 Volt[6]). Infolge der kleinen Austrittsgeschwindigkeit kehrt ein erheblicher Teil der Photoelektronen nach Zusammenstößen mit Gasmolekülen zur Kathode zurück und entzieht sich dem Zählvorgang[7]). Dadurch verringert sich die Empfindlichkeit des Zählers. Es ist zwar Kiepenhauer (l. c.) gelungen, diese Schwierigkeiten durch Trennung des Zählraumes von der Austrittsstelle zu beseitigen, jedoch ohne Erhöhung des Auflösungsvermögens.

Die Methode der Elektronenvervielfachung ist frei von den genannten Schwierigkeiten und gibt reproduzierbare Werte. Die Bedingung des kleinen Nulleffektes ergibt hier für die Photoelektrode dieselbe Forderung, die wir oben (s. S. 229, Tabelle 1) für die sekundäremittierenden Schichten gestellt haben. Daraus folgt, daß die Austrittsarbeit bei Zimmertemperatur den Wert von $\varphi = 1{,}3$ Volt nicht überschreiten darf. Dadurch wird den bei Zimmertemperatur zählbaren Photonen mit $\lambda = 9500$ Å eine Grenze gesetzt.

---

[1]) Gordon L. Locher, Phys. Rev. **42**, 525, 1932. — [2]) W. Christoph, Ann. d. Phys. **23**. 747, 1935. — [3]) K. O. Kiepenhauer, ZS. f. Phys. **107**, 145, 1937. — [4]) W. Christoph u. W. Hanle, Phys. ZS. **34**, 644, 1933. — [5]) K. H. Kreuchen, ZS. f. Phys. **94**, 549, 1935 und **97**, 625, 1935. — [6]) Gordon L. Locher, l. c.; W. Christoph, Ann. d. Phys. l. c. — [7]) Gordon L. Locher, l. c.; W. Christoph, Phys. ZS. **37**, 265, 1936.

Photonen von größerer Wellenlänge können prinzipiell nur unter Kühlung der Photokathode gezählt werden[1]).

Die Zählung von ultraroten Photonen geschah mit Hilfe eines Caesiumvervielfachers, der in flüssige Luft getaucht wurde [s. S. 229, Methode a)]. Dank der hohen Empfindlichkeit der Ag—Cs_2O—Cs-Schicht stellt der Apparat auch im Sichtbaren den zur Zeit empfindlichsten Lichtzähler dar.

Fig. 6 beweist die Unabhängigkeit der Zählung von der verwendeten Spannung. Die Messungen erstreckten sich auf ein Intervall von 250 Volt und die Zahl der beobachteten Stöße war unabhängig von der benutzten Spannung gefunden. Bei höheren Spannungen ist die durch die Feldemission verursachte Vergrößerung des Nulleffektes in Betracht zu ziehen (siehe S. 234). Zur Empfindlichkeitsbestimmung des Apparates diente die Strahlung eines schwarzen Körpers[2]), bei dem die Verteilung der Photonendichte im Spektrum nach der Planckschen Formel berechnet werden kann. Ein Wasserfilter diente zur Verhinderung der Erwärmung der Kathode. Der Apparat war imstande, das außerordentlich geringe „Licht", das ein schwarzer Körper von 0,5 cm^2 Oberfläche und von der Temperatur von 200° C in einem Raumwinkel von $d\Omega = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ aussendet, anzuzeigen. Die Empfindlichkeit des Apparates ist — wenn man die bekannte Absorptionskurve des Wassers und die relative Empfindlichkeit der Ag—Cs_2O—Cs-Schicht der Berechnung zugrunde legt — in der Gegend der Wellenlänge $\lambda = 8000$ Å (rotes Maximum der Caesiumkurve) zu

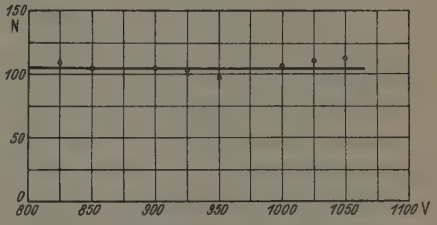


Fig. 6. Unabhängigkeit der Zählung von der Röhrenspannung.

$$E = 75 \text{ Photon/Elektron}$$

bestimmt worden.

Laut Barness und Czerny[3]) beträgt die untere Grenze der Empfindlichkeit des menschlichen Auges (bei $\lambda = 5300$ Å, maximale Augenempfindlichkeit) 80 bis 150 Photon/sec. Die Beobachtungen von Buisson[4])

[1]) Vgl. Gordon L. Locher, Phys. Rev. **53**, 333, 1938. — [2]) Z. Bay, Math. u. Naturw. Anz. ung. Akad. d. Wiss. LVII, 513, 1938; I. L. Roich, C. R. Moskau **24**, 687, 1939; Phys. Ber. **21**, 891, 1940. — [3]) R. Bowling, Barness and M. Czerny, ZS. f. Phys. **79**, 436, 1932. — [4]) H. Buisson, Journ. d. Phys. **7**, 67, 1917.

geben 350 Phot/sec, jene von Russel[1]) 215 Phot/sec und diejenigen von Reeves[2]) 400 Phot/sec als untere Grenze.

Wird der obige Wert von E auf Grund der Cs-Empfindlichkeitskurve auf $\lambda = 5300$ Å umgerechnet, so erhält man 90 Phot/El. Wird auch der Nulleffekt (ungefähr $^1/_{60}$ El $\cdot$ sec^{-1}) berücksichtigt, so kommt man zum Schlusse, daß die von unserem Apparat *meßbare* Lichtintensität erheblich kleiner ist als jene, die vom menschlichen Auge wahrgenommen werden kann.

Zum Vergleiche mit der Empfindlichkeit der photographischen Platten kann die Angabe von Minnaert[3]) herangezogen werden, wonach beim Schwellenwert der Augenempfindlichkeit im Grünen eine Belichtungszeit von 30 Stunden notwendig ist. Derselbe Lichtstrom kann mit unserem Photonenzähler innerhalb 20 sec mit dem mittleren Fehler von 20% *gemessen* werden.

Will man sich auf die Zählung der sichtbaren Photonen beschränken, so ist natürlich eine Kühlung unnötig und eine in die Röhre destillierte Kaliumkathode leistet gute Dienste. Der Nulleffekt dieser Kathode ist ebenfalls klein (2 bis 10/min), ihre Empfindlichkeit wurde in Übereinstimmung mit Kiepenhauer zu 4000 Phot/El geschätzt (blaues Licht).

Die Lichtempfindlichkeit der BaO-Schicht ist zwar hoch, ist aber wegen der bereits erwähnten Unregelmäßigkeit des Nulleffektes nicht reproduzierbar.

Weitere Untersuchungen, eine Photokathode (mit zusammengesetzter Schicht) von höherer Empfindlichkeit im Sichtbaren und ohne Kühlung mit kleinem Nulleffekt zu finden, sind im Gange.

Zählung von Korpuskeln und Photonen hoher Energie.

Das wichtigste Bauprinzip der beschriebenen Elektronenvervielfacher liegt in der Anwendung der Elektronenfokussierung, dimensioniert für einige 100 Volt Geschwindigkeit. Elektronen *hoher* Geschwindigkeit werden nicht fokussiert, für solche hat also die Zählung eine kleine Ausbeute. Danach ist zu erwarten, daß nur Elementarprozesse, die Elektronen *kleiner* Geschwindigkeit auslösen, mit der neuen Methode gezählt werden können.

Bekanntlich lösen α-Teilchen aus Metalloberflächen Elektronen kleiner Geschwindigkeit aus[4]), es ist also die unten beschriebene Zählbarkeit

[1]) H. N. Russel, Astrophys. Journ. **45**, 60, 1917. — [2]) P. Reeves, ebenda **46**, 167, 1917. — [3]) M. Minnaert, ZS. f. Astrophys. **4**, 358, 1932. — [4]) H. Geiger, Handb. d. Phys. **22/2**, 219, 1933; E. Rutherford, J. Chadwick, C. D. Ellis, Radiations f. Rad. Subst. **147**, 1; G. A. Hill, W. W. Buechner, J. S. Clark and J. B. Fisk, Phys. Rev. **55**, 463, 1939.

von α-Teilchen nicht überraschend. Dasselbe bezieht sich auf Ionen hoher Geschwindigkeit, deren Zählbarkeit mit dieser Methode Allen[1]) gezeigt hat. Dasselbe gilt für Elektronen hoher Geschwindigkeit und für β-Teilchen[2]), deren Zählung in dieser Arbeit beschrieben wird.

Für Photonen hoher Energie (γ- und Röntgenstrahlen) kann nicht einfach eine ähnliche Folgerung gezogen werden. Trotzdem zeigen die unten beschriebenen Untersuchungen, daß diese mit der Vervielfachermethode ungefähr mit derselben Empfindlichkeit zählbar sind, wie mit dem Geiger-Müllerschen Zählrohr. Die Erklärung hierfür liegt offenbar darin, daß die primär ausgelösten Compton- und Photoelektronen beim Austritt aus der Metalloberfläche sekundäre Elektronen kleiner Geschwindigkeit mit auslösen.

Die Zählung von α- und wahrscheinlich auch von β-Teilchen erwies sich als quantitativ. Die vergleichsweise angestellten Untersuchungen erfolgten mit Hilfe von identischen Po- und Ra E-Präparaten unter identischen Raumwinkeln. Die Präparate waren in Metallhülsen mit kleinem Öffnungswinkel untergebracht, die Enden derselben waren mit Aluminiumfolie bedeckt, um das Entweichen der vom Röhreninnern ausgelösten Elektronen zu verhindern. Die Metallhülsen waren auf die Kathode zu gerichtet, und es sind Vorkehrungen getroffen worden, um die Vervielfacherelektroden von der einfallenden Strahlung zu schützen. Messing, Wolfram und Silber dienten als Kathodenmaterial. Die Stoßzahl war bei der Zählung von α-Teilchen im Falle des Vervielfachers und in dem des Spitzenzählers gleich groß. Bei der Zählung von β-Teilchen ergaben sich im Vervielfacher mehr Stöße, als im Spitzenzähler, was wahrscheinlich durch die schwierige Einstellbarkeit des Spitzenzählers für β-Strahlen zu erklären ist.

Die Empfindlichkeit der Zählung von γ- und Röntgenquanten war von derselben Größenordnung, wie bei einem Geiger-Müllerschen Zählrohr. Kathodenplatten aus verschiedenen Materialien, oder Platten aus demselben Material, jedoch mit verschiedener Vorbehandlung (Oxydieren) zeigten abweichende Empfindlichkeit. Diesbezügliche weitere Untersuchungen sind im Gange.

Die Zahl der durch die Photonen oder Korpuskeln ausgelösten langsamen Elektronen kann durch die Amplituden der Stöße bestimmt werden.

Die Amplituden der einzelnen Stöße sind infolge der bereits erwähnten statistischen Schwankungen nicht einfach proportional der Anzahl der die

[1]) J. S. Allen, l. c. — [2]) E. Rutherford, J. Chadwick, C. D. Ellis, l. c. 153 l.

Kathode verlassenden Elektronen, und es existiert keine maximale Amplitude (s. Fig. 4) — im Gegensatz zu den Behauptungen von Allen[1]) — die die maximale Anzahl der ausgelösten Elektronen bestimmen könnte. Die Amplitudenverteilung gibt nur über die durchschnittliche Zahl der im untersuchten Prozeß ausgelösten Elektronen Aufschluß. Die Wahrscheinlichkeitstheorie der Amplitudenverteilung würde aber auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zahl der durch die primären Teilchen ausgelösten sekundären Elektronen liefern (s. S. 285).

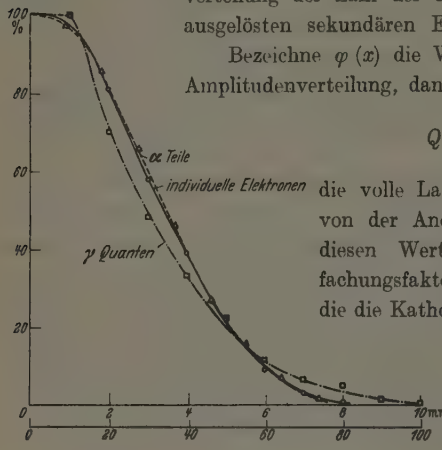


Fig. 7.

Bezeichne $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Amplitudenverteilung, dann gibt das Integral

$$Q = N \int_0^\infty \varphi(x)\, \mathrm{d}\, x$$

die volle Ladung, die während N Stöße von der Anode abfließt. Dividiert man diesen Wert mit dem Gesamtvervielfachungsfaktor der Röhre, so erhält man die die Kathode verlassende volle Ladung und daraus die einem einzigen Teilchen zukommende Zahl der Elektronen. Eine genauere Bestimmung ergibt sich, wenn man an Stelle der totalen Vervielfachung jene Ladung der Berechnung zugrunde legt, die an der Anode entsteht, wenn unter der Wirkung von sichtbaren Photonen oder einer Erhitzung aus der Kathode N individuelle Elektronen austreten.

Fig. 7 gibt die Resultate, die bei Benutzung von Po α- und Ra γ-Strahlen gewonnen waren. Die Kurven sind aus ähnlichen der Fig. 4 durch Integration gewonnen. Die zu irgendeiner Abszisse gehörige Ordinate gibt die prozentuelle Anzahl jener Stöße an, die größer sind als die Abszisse, so daß der Flächeninhalt unterhalb der Kurve der Ladung Q proportional ist. Die Kurven der Fig. 7 stellen das Ergebnis von je einigen tausend beobachteten Stößen dar. Jene Kurven, die sich auf Richardsonsche Elektronen und γ-Strahlen beziehen, haben einfache, jene der α-Teilchen eine zehnfache Abszissenskale.

Aus Fig. 7 ersieht man, daß ein α-Teilchen aus einer Messingelektrode durchschnittlich 10 Elektronen auslöst, dagegen in einem erfolgreichen

[1]) J. S. Allen, l. c. S. 969.

γ-Stoß durchschnittlich nur ein Elektron ausgelöst wird. Die Elektronenkurve und die γ-Kurve haben etwas abweichende Form; das hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß der benutzte γ-Bündel (trotz der Abblendung durch ein Bleirohr) nicht genügend eng war und es bestand die Möglichkeit, daß nicht nur aus der Kathode, sondern auch aus den ersten Vervielfachungselektroden Elektronen austreten können. Da die weitere Vervielfachung dieser geringer ist, so wird die Zahl der Stöße mit geringer Amplitude größer.

Was die β- und Röntgenstrahlen betrifft, sind ähnliche Kurven wie bei den γ-Strahlen zu erwarten. Die vorläufigen — nur qualitativen — Beobachtungen scheinen diese Folgerung zu bestätigen. Die beobachteten Amplituden sind von derselben Größenordnung als jene, die sich im Falle der individuellen Elektronen zeigten.

Der Verfasser wünscht auch an dieser Stelle dem Herrn G. Papp, sowie den Herren Angestellten der Tungsram A. G. in Ujpest: A. Budincsevits, G. Dallos, G. Grünwald, A. Horváth, Z. Szepesi seinen Dank für die wertvolle Hilfe, die er im Laufe der Untersuchung von den genannten Herren erhalten hat, auszusprechen.

Budapest, Atomphysikalisches Institut d. K. ung. Universität f. technische u. Wirtschaftswissenschaften.

Über das Auftreten von isomeren Atomkernen.

Von **J. Mattauch.**

(Eingegangen am 31. Dezember 1940.)

Es wird gezeigt, daß das vorliegende Material den empirischen Schluß zu ziehen erlaubt, daß die energetisch besonders günstig liegenden Kerne vom $g-g$ Typ keine isomeren Zustände besitzen. Dadurch kann die Auswahl der Massenzahlen von zwei isomeren Kernen beim Xenon und Cadmium, über deren Zuordnung bisher noch nichts bekannt war, auf je zwei Werte eingeschränkt werden. Ferner zeigt es sich, daß unter anderem gerade von solchen Kernen ein isomerer Zustand bekannt ist, die im Grundzustand den Spin $\geqq {}^9/_2\,\hbar$ besitzen. Daraus wird geschlossen, daß das daraufhin noch nicht untersuchte stabile Wismutisotop ^{209}Bi isomer sein dürfte. Schwer verständlich ist es, daß nach dem heutigen Stande der Theorie in vier (von sechs bekannten) Fällen ein Spinunterschied von $5\,\hbar$ zwischen Grundzustand und isomerem Zustand verlangt wird, was für den letzteren zu einer Bevorzugung des unwahrscheinlich hohen Wertes von ${}^{19}/_2$ für den Spin führt.

Einleitung. Die Atomkerne teilt man bekanntlich nach der Anzahl der sie aufbauenden Protonen und Neutronen in drei Typen ein, die man kurz mit $g-g$ (beide Teilchenzahlen gerade), $g-u$ (eine Teilchenzahl ungerade) und $u-u$ (beide Teilchenzahlen ungerade) bezeichnet; man spricht auch von geraden, ungeraden und doppelt ungeraden Kernen. Die gesamte Teilchenzahl ist durch die Massenzahl A gegeben, die also bei den Kernen des ersten und dritten Typs gerade, bei denen des zweiten Typs ungerade sein muß. Da die beiden Elementarteilchen den Spin $+{}^1/_2$ oder $-{}^1/_2$ besitzen, können in jedes Niveau zwei gleichartige Teilchen eingebaut werden. Wegen der abgeschlossenen Zweierschalen liegen die $g-g$ Kerne energetisch am günstigsten; die $g-u$ Kerne, die ein unpaares Proton *oder* Neutron enthalten, sind lockerer, die $u-u$ Kerne wegen ihres unpaaren Protons *und* Neutrons am lockersten gebunden; denn die Bindungsenergie der unpaaren Teilchen ist kleiner, als es dem Schalendurchschnitt entspricht. Demnach ist verständlich, daß unter den stabilen Kernen der $g-g$ Typ, obwohl er auf gerade Elemente beschränkt ist, 1,5mal so oft vorkommt wie der $g-u$ Typ, der auf alle Elemente gleichmäßig verteilt ist (fast jedes besitzt mindestens ein oder höchstens zwei ungerade Isotope); vom $u-u$ Typ sind nur die ersten vier Vertreter stabil. Jedes gerade Element (oberhalb

Sauerstoff) besitzt also mehrere (bis zu 7) stabile Isotope von geradem A, während nur ein oder zwei Zwischenräume von stabilen Kernen des $g-u$ Typs ausgefüllt sind.

Auch im Kernspin i sind die drei Kerntypen wohl unterschieden. Da bei den $g-g$ Kernen niemals eine Hyperfeinstrukturaufspaltung beobachtet werden konnte, nimmt man an, daß sie durchwegs den Spin 0 besitzen, was vollkommen dem Bilde von den abgeschlossenen Zweierschalen entspricht; das wurde auch in den wenigen Fällen bestätigt gefunden, in denen der Kernspin 0 experimentell feststellbar war (Beobachtung des Ausfalls alternierender Linien im Bandenspektrum von Molekülen, die aus zwei gleichen Atomen bestehen). Die Kerne vom $g-u$ Typ haben alle halbzahligen Spin $-1/2$ vom unpaaren Elementarteilchen plus einem ganzzahligen Bahndrehimpuls —, während von drei der vier stabilen $u-u$ Kerne bekannt ist, daß sie den Spin 1 haben, weshalb man annimmt, daß die Kerne dieses Typs ganzzahligen (aber von 0 verschiedenen) Spin besitzen.

Isomerie. Bald nach Entdeckung der künstlichen Radioaktivität fand man, daß man manchmal zwei verschiedene Halbwertszeiten demselben — durch die gleiche Protonen- wie Neutronenzahl festgelegten — Kern zuordnen müsse[1]). Solche Kerne bezeichnet man als isomer. Unter den natürlich radioaktiven Kernen war seit langem ein Fall dieser Art beim $^{234}_{91}$Pa, nämlich UZ und UX_2, bekannt[2]). Die Kernisomerie erklärt sich nach v. Weizsäcker[3]) folgendermaßen: Während in der Regel die Lebensdauer von angeregten Kernzuständen 10^{-14} sec beträgt, da sie ihren Energieüberschuß in Form von γ-Quanten abstrahlen, so daß in unmeßbar kurzer Zeit der Grundzustand erreicht wird, kann in einzelnen Fällen durch großen Spinunterschied Δi bei gleichzeitig geringer Energiedifferenz E der Übergang zum Grundzustand so hoch verboten sein, daß die Lebensdauer des angeregten (metastabilen) Zustandes beobachtbar wird. Natürlich darf dann zwischen dem metastabilen und dem Grundzustand kein angeregter Zustand mit kleinerem Δi liegen.

Man unterscheidet zwei Fälle. Im ersten erfolgt der Übergang vom metastabilen Zustand durch einen γ-Strahl, dessen Energie E wegen des hohen inneren Umwandlungskoeffizienten in der Regel im β-Strahlspektrographen an sekundären β-Linien genau gemessen werden kann, in den

---

[1]) W. Bothe u. W. Gentner, Naturwissensch. **25**, 284, 1937; ZS. f. Phys. **106**, 236, 1937; A. H. Snell, Phys. Rev. **51**, 1011, abs. 69; **52**, 1007, 1937. — [2]) O. Hahn, Ber. d. D. chem. Ges. (B) **54**, 1131, 1921; ZS. phys. Chem. **103**, 461, 1923. — [3]) C. F. v. Weizsäcker, Naturwissensch. **24**, 813, 1936.

Grundzustand (γ-Zerfall) und von dort durch β-Strahlung (oder K-Einfang) in das benachbarte stabile Isobar. In diesem Falle, der am häufigsten vorzukommen scheint, wird von beiden Halbwertszeiten das gleiche kontinuierliche β-Spektrum, nämlich das des Grundzustandes, beobachtet; die beiden isomeren Zustände sind ferner nach Art der Szilard-Chalmers-Methode chemisch voneinander trennbar und der Grundzustand ist außerdem als Tochtersubstanz des metastabilen Zustandes herstellbar. Im zweiten Falle ist der γ-Übergang vom metastabilen Zustand so hoch verboten, daß ihm der direkte β-Übergang zum Folgekern zuvorkommt. Von den beiden Halbwertszeiten werden dann verschiedene β-Spektren beobachtet und die Differenz der oberen Grenzen ist durch E gegeben. Ein Beispiel hierfür ist $^{52}_{25}$Mn. Wenn die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand des isomeren Kerns und dem benachbarten Isobar nicht zur Erzeugung eines β-Teilchens ausreicht, dann ist auch im zweiten Falle nur *ein* kontinuierliches β-Spektrum zu beobachten, das dem metastabilen Zustand entspricht, während sich der Grundzustand durch K-Einfang umwandelt. Dieser Fall scheint beim $^{106}_{47}$Ag vorzuliegen.

a) Isomerie bei künstlich radioaktiven Kernen. In der Tabelle 1 ist die Anzahl der bekannten Kerne der verschiedenen Typen, sowie der Prozentsatz an sichergestellten bzw. nur vermuteten Isomeren angegeben. Man beachte, daß bei den künstlich radioaktiven Kernen auf die beiden Typen g—u und u—u prozentuell gleich viel gesicherte Isomere entfallen, also kein Typ vor dem anderen bevorzugt erscheint. Bei diesen Kernen sind Fälle von Isomerie bei ($^{49}_{20}$Ca), $^{51}_{22}$Ti, ($^{49}_{23}$V)[1]), $^{69}_{30}$Zn, (($^{69,71}_{32}$Ge)), $^{79,81}_{34}$Se, $^{85}_{38}$Sr, $^{87}_{39}$Y, $^{89}_{40}$Zr, $^{99}_{43}$, $^{127}_{52}$Te, $^{129}_{52}$Te, $^{131}_{52}$Te, ($^{159}_{64}$Gd), ($^{175}_{70}$Yb), ($^{197}_{78}$Pt) für den g—u Typ und bei $^{44}_{21}$Sc, $^{52}_{25}$Mn, ($^{60}_{27}$Co), $^{80}_{35}$Br, $^{104}_{45}$Rh, $^{106}_{47}$Ag, ($^{108,110}_{47}$Ag), $^{114}_{49}$In, $^{116}_{49}$In, ($^{134}_{55}$Cs), ($^{152,154}_{63}$Eu), (($^{194}_{77}$Ir)), ($^{196}_{79}$Au) für den u—u Typ bekannt[2]). Die Fälle, bei denen Isomerie nur vermutet wird, weil die vernünftige Zuordnung zweier beobachteter Halbwertszeiten zum gleichen Kern führt, bei denen aber diese Zuordnung nicht durch verschiedenartige Kernreaktionen gesichert oder die Strahlung der beiden Körper getrennt beobachtet wurde, sind eingeklammert. Die Angabe zweier Massenzahlen bedeutet, wie üblich, ein Entweder-Oder; der Isomeriefall kann dabei jedoch durch Beobachtung des γ-Zerfalls, Trennung der Isomeren und Gewinnung des einen Körpers als Tochtersubstanz aus dem anderen durchaus sichergestellt sein.

---

[1]) Wegen der bei ^{49}V vermuteten Isomerie siehe L. A. Turner, Phys. Rev. **58**, 679, 1940. — [2]) Wegen Literatur siehe J. J. Livingood u. G. T. Seaborg, Rev. Mod. Phys. **12**, 30, 1940 oder J. Mattauch u. S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin 1941.

Tabelle 1.

		Kerntyp	Anzahl der bekannten Kerne	Isomere	
				bekannt	vermutet
	Stabil	$g-g$	162	*keine*	0,6 – 1,9 %
		$g-u$	108	5,6 %	1,9 %
		$u-u$	4	keine	keine
Radioaktiv	Künstlich	$g-g$	7	keine	keine
		$g-u$	143	7,0 %	4,2 %
		$u-u$	100	7,0 %	6,0 %
	Natürlich	$g-g$	20	keine	keine
		$g-u$	15	keine	keine
		$u-u$	9	11 %	11 %

Außer den hier erwähnten Fällen ist von Götte[1]) unter den bei der Uranspaltung gebildeten Xenonisotopen ein Fall von Isomerie festgestellt worden; von diesem Isotop ist jedoch bis jetzt über die Massenzahl nur bekannt, daß sie größer als 131 sein muß, so daß eine Einordnung in die Kerntypen nicht erfolgen kann. Bei der Uranspaltung entstehen nämlich u. a. zwei X-Isotope von den Halbwertszeiten $T = 10$ m und 9,5 h, die beide durch β-Zerfall aus einem sichergestellten Jod-Isotop von $T = 6{,}6$ h gebildet werden; das letztere muß, da neben dem stabilen ^{127}J die radioaktiven Isotope ^{128}J, ^{130}J und ^{131}J sichergestellt sind und der 6,6 h-Körper bestimmt nicht das Folgeprodukt des bekannten ^{129}Te ist, eine Massenzahl haben, die größer als 131 ist.

Wegen der eingangs erwähnten Struktur des Systems der stabilen Kerne können bei den geraden Elementen durch die am meisten benutzten Kernprozesse, die entweder von einem benachbarten Elemente ausgehen oder in Neutronenanlagerung oder -abspaltung bestehen, fast immer nur die radioaktiven g—u Kerne hergestellt werden, die die Zwischenräume zwischen den stabilen g—g Kernen ausfüllen oder an diese unmittelbar angrenzen. Zu künstlich radioaktiven g—g Kernen, die vom leichtesten oder schwersten stabilen Isotop des betreffenden Elementes um mindestens zwei Neutronen entfernt liegen müssen, ist man bihser nur bei den leichtesten Elementen oder durch Spaltungsprozesse gelangt. Bei der äußerst geringen Zahl dieser Kerne nimmt es daher zunächst nicht wunder, daß kein Fall von Isomerie bei einem g—g Kern bekanntgeworden ist. Für die Frage, ob bei diesem Kerntyp ebenfalls Isomerie auftritt, sind daher die Isomere von stabilen Kernen von besonderem Interesse.

[1]) H. Götte, Naturwissensch. 28, 449, 1940.

b) Isomerie bei stabilen Kernen. Nachdem verhältnismäßig spät durch Goldhaber[1]) der erste Fall von Isomerie bei einem stabilen Kern, nämlich ^{115}In, entdeckt worden war, wurden in rascher Folge weitere derartige Isomere — im ganzen 6 — aufgefunden, die alle von ungerader Massenzahl sind, so daß auch in dieser Klasse (siehe Tabelle 1) schon heute nahezu der gleiche Prozentsatz an Isomeren erreicht ist, wie in den beiden großen Klassen von künstlich radioaktiven Isotopen. Trotzdem es bei den stabilen Kernen 1,5mal soviel Gerade wie Ungerade gibt, ist beim g—g Typ kein einziger Fall von Isomerie bekanntgeworden. Auf die vereinzelten Fälle, wo eine solche vermutet wird, kommen wir noch zurück.

Die sechs Fälle von Isomerie bei stabilen, ungeraden Kernen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Charakteristisch für ihre Erzeugung ist die reine Stoßanregung. Beim ^{115}In gelangte man durch (n, n)[2]) [3])-, (p, p)[4])-, (α, α)[5])- und (e^-, e^-)[6])-Prozesse, sowie durch Anregung mittels sehr harter Röntgenstrahlen[6]) [7]), beim ^{87}Sr durch (n, n)[8]) [9]) und (p, p)[9]) zum angeregten Zustand; beim $^{107, 109}_{47}$Ag schließlich meinen Alvarez und Mitarbeiter[10]) wohl mit Recht, daß die bald nach der Fermischen Entdeckung erfolgte Beobachtung einer 40 sec-Aktivität bei Neutronenbestrahlung von Ag durch Bjerge und Westcott[11]) nicht, wie Guében[12]) vorschlug, dem $^{104}_{45}$Rh zuzuordnen sei — bei so schweren Elementen sind mit Rn-Be-Neutronen bisher noch niemals (n, α)-Prozesse erzielt worden —, sondern dem jetzt bekannten $^{107, 109}_{47}$Ag*, das durch einen (n, n)-Prozeß hergestellt worden war.

Die Auffindung dieser Isomere erfolgte jedoch durchweg in der Weise, daß sie als Tochtersubstanzen aus anderweitig bekannten, künstlich radioaktiven Kernen, die sich teils durch β-Zerfall, teils durch K-Einfang umwandeln, gewonnen wurden. Das hat seinen experimentellen Grund darin,

---

[1]) M. Goldhaber, Nature **142**, 521, 1938; M. Goldhaber, R. D. Hill u. L. Szilard, Phys. Rev. **55**, 47, 1939. — [2]) L. Szilard u. T. A. Chalmers, Nature **135**, 98, 1935. — [3]) M. Goldhaber, R. D. Hill u. L. Szilard, l. c. — [4]) S. W. Barnes u. P. W. Aradine, Phys. Rev. **55**, 50, 1939; S. W. Barnes, ebenda **56**, 414, 1939. — [5]) K. Lark-Horovitz, J. R. Risser u. R. N. Smith, Phys. Rev. **55**, 878, 1939; J. R. Risser, K. Lark-Horovitz u. R. N. Smith, ebenda **57**, 355, abs. 55, 1940. — [6]) G. B. Collins u. B. Waldmann, Phys. Rev. **57**, 1088, abs. 169, 1940. — [7]) B. Pontecorvo u. A. Lazar, C. R. **208**, 99, 1939; G. B. Collins, B. Waldmann, E. M. Stubblefield u. M. Goldhaber, Phys. Rev. **55**, 507, 1939. — [8]) H. Reddemann, Naturwissensch. **28**, 110, 1940; ZS. f. Phys. **116**, 137, 1940. — [9]) L. A. Du Bridge u. J. Marshall, Phys. Rev. **57**, 348, abs. 19; **58**, 7, 1940. — [10]) L. W. Alvarez, A. C. Helmholz u. E. Nelson, Phys. Rev. **57**, 660, 1940. — [11]) T. Bjergè u. C. H. Westcott, Nature **134**, 177, 1934. — [12]) G. Guében, Nature **138**, 1095, 1936.

daß sonst der eindeutige Nachweis, daß es sich um isomere Zustände von stabilen Kernen handelt, schwierig gewesen wäre. Um zu untersuchen, ob darin vielleicht ein rein zufälliger Grund liegt, daß bis jetzt noch keine isomeren Zustände von $g-g$ Kernen aufgefunden worden sind, wurden diejenigen künstlich radioaktiven Kerne abgezählt, die als Muttersubstanzen von stabilen Isotopen in Betracht kommen; ihre Anzahl ist kleiner als die in Tabelle 1 angegebene, da ein Teil der letzteren nicht unmittelbar in stabile Kerne zerfällt. Dabei wollen wir für das folgende bei den ungeraden Kernen noch zwischen den beiden Gruppen $g-u$ und $u-g$ unterscheiden, je nachdem die Protonenzahl gerade oder ungerade ist. Die Abzählung ergab, daß 65 $g-u$ Kerne und 28 $u-g$ Kerne bekannt sind, die ganz entsprechend ihrem Verhältnis zur Auffindung von vier isomeren $u-g$ Kernen (die letzten vier von Tabelle 2) und zwei isomeren $g-u$ Kernen (die ersten beiden von Tabelle 2) geführt haben. Die Tatsache, daß sich selbst bei diesen kleinen Gruppen derselbe Prozentsatz von etwa 7% an bekannten Isomeriefällen zeigt, macht es recht unwahrscheinlich, daß die gegenwärtigen Untersuchungsmethoden die Auffindung von isomeren Zuständen bei bestimmten Typen begünstigen oder verhindern. Von 94 bekannten, künstlich radioaktiven $u-u$ Kernen aber, die als Muttersubstanzen von stabilen $g-g$ Kernen in Betracht kommen, hat auch kein einziger zur Entdeckung eines

Tabelle 2.

Muttersubstanz	$^{83}_{35}$Br	$^{87}_{39}$Y	$^{93}_{40}$Zr	$^{107,109}_{48}$Cd	$^{113}_{50}$Sn	$^{115}_{48}$Cd
T	140 m [1])	80 h [2])	63 d [3])	6,7 h [4])	105 d [6])	56 h [8])
Art des Zerfalls	β^-	K	β^-	K	K	β^-
Isomeres Folgeprod.	$^{83}_{36}$Kr [1])	$^{87}_{38}$Sr [2])	$^{93}_{41}$Nb [3])	$^{107,109}_{47}$Ag [5])	$^{113}_{49}$In [6])	$^{115}_{49}$In [9])
T	113 m [1])	2,75 h [2])	55 d [3])	40 s [5])	104 m [7])	272 m [7])
E in MeV	0,049 [1])	0,37 [2])	0,20 [3])	0.0935 [5])	0,39 [6])	0,3377 [7])
i (Grundzustand)	$^9/_2$	$^9/_2$	$^9/_2$	$^1/_2$	$^9/_2$	$^9/_2$
Δi (berechnet)	3—4	5	5	3—4	5	5

[1]) A. Langsdorf jr. u. E. Segrè, Phys. Rev. **57**, 105, 1940. — [2]) L. A. Du Bridge u. J. Marshall, ebenda **56**, 705, 1939; **57**, 348, abs. 19; **58**, 7, 1940. — [3]) R. Sagane, S. Kojima, G. Mijamoto u. M. Ikawa, ebenda **57**, 750, 1940. — [4]) L. A. Delsasso, L. N. Ridenour, R. Sherr u. M. G. White, ebenda **55**, 113, 1939. — [5]) L. A. Alvarez, A. C. Helmholz u. E. Nelson, ebenda **57**, 660, 1940. — [6]) S. W. Barnes, ebenda **55**, 241, abs. 42; **56**, 414. 859, abs. 55, 1939. — [7]) J. L. Lawson u. J. M. Cork, ebenda **57**, 356, abs. 57, 982, 1940. — [8]) J. M. Cork u. J. L. Lawson, ebenda **56**, 291, 1939. — [9]) M. Goldhaber, Nature **142**, 521, 1938; M. Goldhaber, R. D. Hill u. L. Szilard, Phys. Rev. **55**, 47, 1939.

Falles von Isomerie geführt. Hierzu kommt noch, daß von einem Teil dieser u—u Kerne dualer Zerfall bekannt ist, so daß sie zu zwei verschiedenen stabilen g—g Kernen führen müssen, während sich die früher erwähnten $65 + 28$ ungeraden Kerne z. T. paarweise in den gleichen stabilen Kern verwandeln; die Chancen für die Auffindung von Isomerie bei stabilen g—g Kernen wären somit bedeutend größer, wenn sie bei diesem Typ in einem ähnlichen Prozentsatz vorkommen würden.

Interessant sind in diesem Zusammenhang diejenigen Elemente, bei denen, da sie gut untersucht sind, von mehr als einem Isotop (stabil oder radioaktiv) ein isomerer Zustand bekannt ist. Es gibt deren vier, von denen zwei ($_{47}$Ag und $_{49}$In) ungerade und zwei ($_{38}$Sr und $_{52}$Te) gerade sind. Beim Indium zeigen alle Isotope zwischen den Massenzahlen 113 und 116 (beides inklusive) Isomerie, sowohl die beiden instabilen u—u Kerne ^{114}In und ^{116}In, als auch die benachbarten stabilen u—g Kerne ^{113}In und ^{115}In; auch beim Silber ist außer den beiden instabilen u—u Kernen ^{106}Ag und ^{108,110}Ag auch von einem der beiden dazwischen liegenden stabilen u—g Kerne ^{107,109}Ag (nur die Zuordnung ist unsicher) Isomerie bekannt. Anders beim Strontium, wo außer dem instabilen g—u Kern ^{85}Sr nur der eine stabile g—u Kern ^{87}Sr Isomerie zeigt, obwohl die drei übrigen stabilen Sr-Isotope (alles g—g Kerne) wahrscheinlich alle, sicher aber ^{86}Sr und ^{88}Sr in den gut bekannten instabilen Kernen ^{86}Y und ^{88}Y Muttersubstanzen besitzen. Nach den eingehenden Untersuchungen von Seaborg, Livingood und Kennedy[1]) zeigen beim Tellur die drei instabilen g—u Kerne ^{127}Te, ^{129}Te und ^{131}Te Isomerie, wobei in jedem Falle nach vorhergehender chemischer Trennung der Grundzustand als Folgeprodukt des angeregten erhalten werden konnte, während die dazwischen liegenden und angrenzenden, stabilen g—g Kerne davon verschont zu bleiben scheinen.

Außer den in Tabelle 2 angeführten Fällen schreibt man auch die von Dodé und Pontecorvo[2]) beim Cadmium aufgefundene 50 m-Aktivität wegen der Art der Anregung [wahrscheinlich (n, n)-Prozeß] und Strahlung (weiche γ-Strahlung) einem isomeren Zustand eines der acht stabilen Cd-Isotope zu. Ferner vermuten Lawson und Cork[3]), daß die 5,6 d Halbwertszeit von Gold, mit der eine bestimmte γ-Linie abklingt und die durch Deuteronenbeschuß von Pt erhalten wurde, entweder dem ^{196}Au oder dem ^{197}Au zuzuordnen sei. Im letzteren Falle würde es sich ebenfalls um einen isomeren Zustand bei einem stabilen u—g Kern handeln.

---

[1]) G. T. Seaborg, J. J. Livingood u. J. W. Kennedy, Phys. Rev. **55**, 794, 1939; **57**, 363, 1940. — [2]) M. Dodé u. B. Pontecorvo, C. R. **207**, 287, 1938. — [3]) J. L. Lawson u. J. M. Cork, Phys. Rev. **58**, 580, 1940.

Das vorliegende experimentelle Material scheint demnach auf folgende Regelmäßigkeit hinzudeuten. *Bei g—g Kernen gibt es keine isomeren Zustände*; jedenfalls scheinen die Halbwertszeiten zu kurz (oder zu lang, eventuell auch die γ-Strahlung zu weich) zu sein, um mit den gegenwärtigen Untersuchungsmethoden erfaßt zu werden. Das Göttesche Xenon-Isomer müßte demnach sehr wahrscheinlich ^{133,135}X sein, während der isomere Zustand beim Cadmium entweder dem ^{111}Cd oder dem ^{113}Cd zuzuschreiben wäre; hierzu sei noch bemerkt, daß ^{111}Cd sowohl im ^{111}In (β^+-aktiv) als auch im ^{111}Ag (β^--aktiv) Muttersubstanzen besitzt, während Zingg[1]) trotz sorgfältiger Untersuchung bei dem dem ^{113}Cd benachbarten ^{113}In, wohl wegen zu großen Spinunterschiedes, keinen K-Einfang feststellen konnte und ein ^{113}Ag bisher nicht bekannt ist.

In einem vereinzelten Falle haben Fajans und Voigt[2]) versuchsweise eine Pb-Aktivität von 52 h, die bei Beschießung von ^{203,205}Tl mit Deuteronen auftritt, dem g—g Kern ^{204,206}Pb zugeordnet; aber die Möglichkeit eines $(d, 2n)$-Prozesses, wobei ^{203,205}Pb (vom g—u Typ) entstünde, ist wohl nicht ausgeschlossen. Ferner haben Creutz u. a.[3]) bei der Beschießung von Brom bzw. Jod mit Protonen je zwei Halbwertszeiten von 13 s und 55 s bzw. von 75 s und 34 d gefunden, wobei sie es unentschieden lassen, ob es sich um (p, n)- oder (p, γ)-Prozesse handelt; die letztere Art der Kernumwandlung würde zu Isomeren von stabilen g—g Kernen führen, wobei aber zu bemerken ist, daß (p, γ)-Reaktionen oberhalb Ni und eventuell Zn bisher noch nicht beobachtet wurden.

c) Isomerie bei natürlich radioaktiven Kernen. Wie erwähnt, ist man in der kleinen Gruppe von natürlich radioaktiven u—u Kernen beim UZ und UX_2 zum ersten Male auf einen Fall von Isomerie gestoßen. In diese Gruppe gehört außerdem $^{176}_{71}$Cp. Cassiopeium, das massenspektrographisch aus dem sehr häufigen Isotop ^{175}Cp und dem seltenen ^{176}Cp besteht, welch letzterem sehr wahrscheinlich die natürliche β^--Aktivität des Cassiopeiums zuzuordnen ist, zeigt nach Hevesy und Levy[4]) nach Bestrahlung mit langsamen Neutronen zwei Halbwertszeiten von 4 h und von 6 — 7 d; mindestens eine von diesen muß wohl dem ^{176}Cp zugeordnet werden, bei dem somit ein isomerer Zustand vermutet werden kann.

Wenn man die nur vermuteten Fälle von Isomerie mit einbezieht und alle Kerne (stabile und radioaktive) zusammenfaßt, dann scheint es, als

[1]) E. Zingg, Helv. Phys. Acta **13**, 209, 1940. — [2]) K. Fajans u. A. F. Voigt, Phys. Rev. **58**, 177, 1940. — [3]) E. C. Creutz, L. A. Delsasso, R. B. Sutton, M. G. White u. W. H. Barkas, Phys. Rev. **58**, 481, 1940. — [4]) G. v. Hevesy u. H. Levy, Kgl. Dansk. Akad. **14**, 5, 1936.

ob bei den energetisch am ungünstigsten liegenden u—u Kernen am häufigsten isomere Zustände vorkommen.

Spin. Bei den künstlich erzeugten Isotopen ist über den Spin leider wenig bekannt, so daß wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf die in der Natur vorkommenden Isotope beschränken müssen. Wie ein Blick auf Tabelle 2 zeigt, besitzen fast alle ungeraden, stabilen Kerne, von denen Isomerie bekannt ist, im Grundzustand den Spin $^9/_2$. Nur ^{107,109}Ag hat den Spin $^1/_2$, während bei ^{197}Au, bei dem, wie erwähnt, Isomerie vermutet wird, der Spin wahrscheinlich $^3/_2$ ist; auch der Grundzustand der Dodé-Pontecorvoschen Cd-Aktivität, die, wie erwähnt, nach der oben genannten Regel einem isomeren Zustand des stabilen $^{111, 113}$Cd zuzuordnen wäre, besitzt den Spin $^1/_2$. Da andererseits von ^{176}Cp. der abnorm große Spin $\geqq 7$ bekannt ist, kann man jedenfalls sagen: *unter anderen besitzen alle Kerne, die im Grundzustand den Spin* $\geqq {}^9/_2$ *haben, einen isomeren Zustand*, der der gegenwärtigen Untersuchungstechnik auch zugänglich geworden ist. Eine Ausnahme hiervon bildet nur der daraufhin noch nicht untersuchte Kern ^{209}Bi (Spin $^9/_2$), von dem auch eine Muttersubstanz (^{209}Pb) noch nicht mit Sicherheit feststeht.

Zunächst würde man sagen, daß besonders großer oder besonders kleiner Spin des Grundzustandes gerade das ist, was man erwarten würde, um den für die Beobachtung von Isomerie notwendigen großen Spinunterschied unterbringen zu können, ohne zu unvernünftig großen Werten des Spins für den angeregten Zustand zu kommen. In der letzten Zeile von Tabelle 2 sind jedoch die Spinunterschiede Δi angegeben, die nach der theoretischen Formel[1]) für die Lebensdauer angeregter Zustände mit den beobachteten Werten für die Halbwertszeit T und die Energiedifferenz E gegenüber dem Grundzustand noch verträglich sind. Da, wie erwähnt, die γ-Strahlung in allen Fällen einen großen Koeffizienten der inneren Umwandlung zeigt und dieser, worauf mich Herr Flügge aufmerksam machte, die Lebensdauer des angeregten Zustandes verringert, was in der theoretischen Formel noch nicht berücksichtigt ist, müßten die Spinunterschiede sogar noch etwas größer sein als die in Tabelle 2 angegebenen Δi-Werte. Man darf nun nicht einfach den Wert $\Delta i = 5$ von $^9/_2$ abziehen, da eine gleichzeitige Vorzeichenänderung des Spins keinen Sinn hat. Wenn man sich also nicht damit abfinden will, daß vorzugsweise solche Kerne einen isomeren Zustand besitzen, bei dem dieser den unwahrscheinlich klingenden Spinwert $^{19}/_2$ hat, dann wird man zusehen müssen, ob man die Theorie

[1]) Siehe H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9, 226, 1937; Gleichung (732) mit $\varkappa = 1$ und $R = 7 \cdot 10^{-13}$ cm.

der Isomerie vernünftigerweise so ändern kann, daß man mit kleineren Werten von Δi auskommt. Gelänge das, dann würden auch alle eventuell noch vorhandenen Schwierigkeiten für das Verständnis der Ausnahmen der Isobarenregel wegfallen; denn ein entsprechender zusätzlicher Faktor müßte natürlich auch bei der Berechnung der Lebensdauern für β-Übergänge oder K-Einfänge auftreten. Um die großen Lebensdauern[1]) bei den wenigen anscheinend stabilen Isotopen benachbarter Elemente zu verstehen, hätte man dann nur recht plausible Spindifferenzen anzunehmen.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie.

Einige zusätzliche Überlegungen zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mattauch.

Von **S. Flügge.**

Die von Herrn Mattauch aufgestellten Regeln sind:

1. Die Kerne vom Typus g—g besitzen keine isomeren Zustände. Es liegt nahe, diese Regel in Zusammenhang zu bringen mit der anderen Eigenschaft, daß der Grundzustand dieser Kerne durchweg den Spin Null hat (vgl. Einleitung). Man wird diese zweite Eigenschaft wohl so zu verstehen haben, daß bei geraden Teilchenzahlen ein Zustand, bei dem sich die Teilchen immer paarweise mit entgegengesetzten Spins zusammenschließen und abgeschlossene Zweierschalen bilden, die auch keinen resultierenden Drehimpuls mehr besitzen, energetisch gegenüber den anderen Zuständen besonders ausgezeichnet ist. Dieser Zustand wird dann beträchtlich tiefer liegen als alle anderen. Dadurch wird erstens die Wahrscheinlichkeit gering, daß durch eine zufällige andere Termlage bei irgendeinem Kern ein anderer Term an die tiefste Stelle gelangt, wodurch die bekannte Spinregel verständlich wird. Zweitens bedeutet es, daß der Abstand dieses tiefsten Terms vom ersten angeregten immer ziemlich groß ist. Diese letztere Eigenschaft führt dazu, daß der erste angeregte Term selbst bei sehr hohem Drehimpuls nicht metastabil sein kann, entsprechend der ersten Regel von Herrn Mattauch.

2. Kerne, die im Grundzustande den Spin $\geqq {}^9/_2$ *haben, besitzen einen isomeren Zustand.* Diese Regel erscheint plausibel, wenn man annimmt, daß Zustände kleinen Drehimpulses immer wahrscheinlicher sind, als solche großen Drehimpulses, so daß für den ersten angeregten Zustand eine große

[1]) Siehe E. Zingg, l. c.

Wahrscheinlichkeit besteht, daß er den Spin $^1/_2$ hat. Denn dann ergibt sich in allen diesen Fällen eine Spindifferenz gegenüber dem Grundzustande von mindestens vier Einheiten und bei den üblichen Termabständen von 50 bis 200 keV genügt das zur Erklärung einer Metastabilität.

Die Analyse von Herrn Mattauch hat nun aber in mehreren dieser Fälle dazu geführt, daß (etwa auf Grund von Bethes Formel) eine Spindifferenz von mindestens 5 Einheiten erforderlich sei, um die beobachteten Lebensdauern des metastabilen Zustandes zu verstehen. Von $i = {}^9/_2$ würde man dann zu $i = -{}^1/_2$ kommen, was keinen Sinn hat, da der Drehimpuls natürlich kein Vorzeichen besitzt. Es bleibt dann nur die Möglichkeit, für den metastabilen Zustand $i = {}^{19}/_2$ zu fordern, was sehr unwahrscheinlich klingt und vor allem gar nicht die Gültigkeit der von Herrn Mattauch festgestellten Regel verstehen ließe. Man wird daher zwangsläufig vor die Notwendigkeit gestellt, in diesen Fällen noch eine andere Auswahlregel außer der Drehimpulsregel hinzuzunehmen, also etwa nur einen Teil des Verbots mit der Spindifferenz 4 zu erklären (was eine zu kurze Lebensdauer ergeben würde) und den Rest durch irgendeine weitere Symmetrieeigenschaft des Kerns zu verstehen. Ob es sich dabei um die Symmetrie bezüglich der Spiegelung am Nullpunkt handelt, wie dies Cork und Lawson (l. c.) im Falle des Indiums angenommen haben, oder um eine andere Eigenschaft, bleibe dahingestellt.

Daß der angeregte Zustand den Spin $^9/_2$ und der Grundzustand den Spin $^1/_2$ hat, ist sicher gleich wahrscheinlich wie der umgekehrte Fall. Daher darf man wohl erwarten, daß es auch ungefähr ebenso viele Isomerien bei Kernen mit dem Spin $^1/_2$ im Grundzustande gibt, wie im ganzen Kerne mit dem Spin $^9/_2$ im Grundzustande existieren. Bei den stabilen Kernen, deren Spin der Messung allein zugänglich ist, ist bisher nur erst ein Fall dieser Art sicher festgestellt (^{107,109}Ag) und ein zweiter auf Grund der ersten Regel von Herrn Mattauch wahrscheinlich gemacht (Cd). Die Zahl der hier insgesamt nachgewiesenen Fälle von Isomerie ist aber noch so klein, daß es einstweilen sinnlos ist, eine solche Statistik treiben zu wollen.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Dezember 1940.

(Mitteilung der Reichs-Röntgenstelle beim Staatlichen Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.)

Eine Methode zur Messung hoher Strahlungsintensitäten mit dem Zählrohr.

Von **Adolf Trost.**

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Dezember 1940.)

Die bisher üblichen Zählrohreinrichtungen sind nur für kleine Zählrohrstoßzahlen geeignet und daher für rasche Intensitätsmessungen nicht brauchbar. Für viele Fälle, z. B. für die Anwendung des Zählrohres in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung und für die Ausmessung von Röntgen-Interferenzen sind rasche Messungen mit hohen Stoßzahlen erforderlich. Die Untersuchungen wurden ausgeführt, um das Zählrohr für diese Zwecke nutzbar zu machen[1]). — In der Zählrohrstrommessung wird eine für beliebige Stoßzahlen geeignete Registrierungsmethode gefunden. Eine geeignete Schaltung wird angegeben. — Verschiedene Maßnahmen zur Steigerung des Zählrohrauflösungsvermögens werden besprochen. Es wird festgestellt, daß bei Zählrohren mit Dampfzusatz auch unterhalb der Einsatzspannung sehr große Zählrohrströme auftreten, wobei auch bei hohen Zählrohrstoßzahlen gute Proportionalität zwischen Strahlungsintensität und Zählrohranzeige vorhanden ist. Dadurch wird es möglich, mit *einer* Zählrohreinrichtung praktisch beliebige Intensitäten durch Regulierung der Zählrohrspannung und der Anzeigeempfindlichkeit zu messen. Messungen starker Strahlungen lassen sich in weniger als $^1/_{10}$ sec ausführen.

Einleitung. Die hohe Strahlungsempfindlichkeit des Zählrohres legt den Gedanken nahe, das Zählrohr an Stelle von Film oder Leuchtschirm bei der Materialprüfung mit Röntgen- oder Gammastrahlen zu verwenden. Dabei muß das durchstrahlte Werkstück mit dem Zählrohr abgetastet werden. Ferner besteht die Möglichkeit, Röntgeninterferenz-Diagramme durch Abtasten der Winkelbereiche mit dem Zählrohr zu erhalten. Es ist leicht einzusehen, daß solche aus vielen Einzelmessungen der Strahlungsintensität bestehende Untersuchungen mit dem Zählrohr nur dann möglich sind, wenn die Einzelmessungen in sehr kurzer Zeit, etwa in $^1/_{10}$ sec bis 1 sec durchzuführen sind. Dazu sind sehr hohe Zählrohrstoßzahlen erforderlich, für die weder die üblichen Registriergeräte noch die Zählrohre in der üblichen Betriebsweise geeignet sind. Die Entwicklung einer rasch anzeigenden Zählrohreinrichtung war die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

[1]) Über die technischen Anwendungen siehe A. Trost, Stahl u. Eisen **58**, 668, 1938; Metallwirtschaft XVIII, 687, 1939; ferner R. Lindemann u. A. Trost, ZS. f. Phys. **115**, 450, 1940.

1. Die Registrierung der Zählrohranzeige. Die in der Physik üblichen Zählwerke sind für rasche Messungen nicht geeignet. Die Strahlungsintensität muß vielmehr direkt durch den Ausschlag eines Instrumentes, z. B. eines rasch anzeigenden Milliamperemeters, angezeigt werden.

Die Zählrohre mit Dampfzusatz bieten eine einfache Möglichkeit der *Direktanzeige, die für beliebig hohe Stoßzahlen geeignet ist.* Bei diesen Zählrohren reißt die Entladung auch bei beliebig kleinem Widerstand im Zählrohrkreis allein durch innere Vorgänge im Zählrohr ab. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei, daß bei jeder Zählrohrentladung eine ganz bestimmte Strommenge durch das Zählrohr fließt[1]). Die Größe dieses Stromstoßes ist von der Zählrohrspannung, der Zählrohrfüllung und den Zählrohrdimensionen abhängig. Sind diese Bedingungen gleich, so sind die einzelnen Stromstöße alle gleich groß. *Der Mittelwert des Stromes durch das Zählrohr ist somit proportional zur Zahl der Zählrohrstöße pro sec* und damit zur Strahlungsintensität. Zweckmäßig mißt man den Zählrohrstrom durch den Spannungsabfall an einem in den Stromkreis gelegten Widerstand R passender Größe. Um aus den einzelnen Stromstößen einen mittleren Zählrohrstrom zu erhalten, legt man parallel zum Widerstand einen Kondensator C von solcher Größe, daß die statistischen Schwankungen das gewünschte Maß nicht überschreiten.

Die Schaltung unseres für Netzanschluß gebauten Zählrohrgerätes zeigt Fig. 1. Die Registrierung des Zählrohrstromes erfolgt mit der Triode REN 904. Zur Erhöhung der Ausschlagsempfindlichkeit wird der ohne Zählrohrstrom vorhandene Anodenstrom von 6 mA durch einen Gegenstrom kompensiert. Als Meßinstrument wird ein Milliamperemeter für 2 mA mit einer Einstelldauer von $^1/_{10}$ sec verwendet. Die Meßempfindlichkeit kann durch Einschalten verschiedener Gitterwiderstände R von 10^6 bis $10^8\,\Omega$, die Anzeigeträgheit durch Einschalten verschiedener Kondensatoren C stufenweise verändert werden. Um eine genügende Konstanz der Zählrohrspannung zu erhalten, wird die zuerst von Medicus[2]) angegebene Stabilisierung mit einem mit Luft gefüllten „glimmenden Zählrohr" (*St*) benutzt. Zur Regulierung der Zählrohrspannung wird ein von 0 bis 200 Volt kontinuierlich veränderlicher Teil der Anodenspannung von der Stabilisatorspannung abgezogen. Ein in den Primärkreis des Transformators gelegter Eisenwasserstoffwiderstand dient zum Ausgleich der Netzspannungsschwankungen.

---

[1]) A. Trost, ZS. f. Phys. **105**, 399, 1937. — [2]) G. Medicus, ZS. techn. Phys. **14**, 304, 1933.

2. Das Zählrohr-Auflösungsvermögen (Stoßzahlproportionalität). Bei den Zählrohren mit Dampfzusatz ließ sich bisher ein Auflösungsvermögen von etwa 10^{-4} sec erreichen[1]). Damit kann man bis zu etwa 1000 Stöße/sec mit guter Proportionalität zwischen Zählrohranzeige und Strahlungsintensität registrieren. Bei einer Meßzeit von 1 sec beträgt also der mittlere Fehler mindestens $\pm 3\%$, zu Messungen mit einem Fehler von $\pm 1\%$

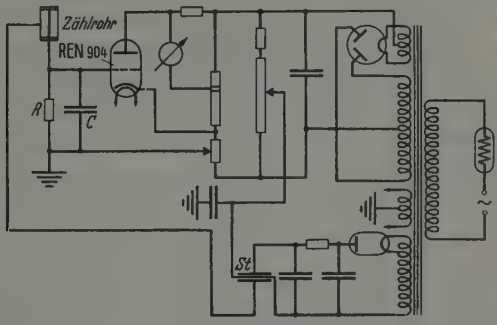


Fig. 1. Zählrohrgerät für Zählrohrstrommessung.

benötigt man mindestens 10 sec. Um solche Messungen in $^1/_{10}$ sec auszuführen, muß daher ein um 2 bis 3 Zehnerpotenzen höheres Auflösungsvermögen als das der bisher üblichen Zählrohre erreicht werden.

Eine naheliegende Möglichkeit, Zählrohreinrichtungen höheren Auflösungsvermögens zu erhalten, besteht darin, *statt eines größeren Zählrohres mehrere kleine Zählrohre* zu verwenden, denn mit n Zählrohren können natürlich n-mal so viel Stöße pro sec registriert werden wie mit einem einzigen Zählrohr. Bei Verwendung von Zählrohren mit Dampfzusatz können die Zählrohre direkt parallel geschaltet, d. h. alle Zähldrähte und alle Kathodenzylinder unmittelbar verbunden werden; so wird bei unserer Zählrohrstrommessung durch einen einzelnen Zählrohrstoß die Spannung zwischen den Elektroden nicht merklich herabgesetzt. Bei einer Entladung in einem Zählrohr werden also die Betriebsbedingungen für die übrigen Zählrohre nicht verändert. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, *Zählrohre in Bündeln* nebeneinander anzuordnen. Statt eines Zählrohres von 30 mm Durchmesser können z. B. bei gleichem Raumbedarf 7 Zählrohre von 10 mm Durchmesser verwendet werden. Da das Zählrohrauflösungsvermögen bei Zählrohren kleinen Rohrdurchmessers

[1]) A. Trost, l. c.

höher ist, wird durch diese Unterteilung das Auflösungsvermögen nicht nur auf das 7fache, sondern etwa auf das 15fache verbessert.

Weiterhin bringt die *Zählrohrstrommessung* gegenüber der Stoßzählung auch im Hinblick auf das Auflösungsvermögen einen gewissen Vorteil. Ein „Auflösungsvermögen" im strengen Sinne existiert bei der Zählrohrstrommessung nicht, denn die Größe eines Zählrohrstoßes hat auch bei beliebig kleinem Zeitabstand vom vorhergehenden Stoß nie den Wert 0, zumindest bleibt die normale Ionisationswirkung des Strahlungsteilchens als Stoßgröße übrig. Bei der Zählrohrstrommessung trägt also auch bei beliebig kleinen Zeitabständen jedes von der Strahlung ausgelöste Elektron noch einen geringen Teil zum Zählrohrstrom bei. Der Ausdruck „Zählrohr-Auflösungsvermögen" soll daher für die Zählrohrstrommessung vermieden

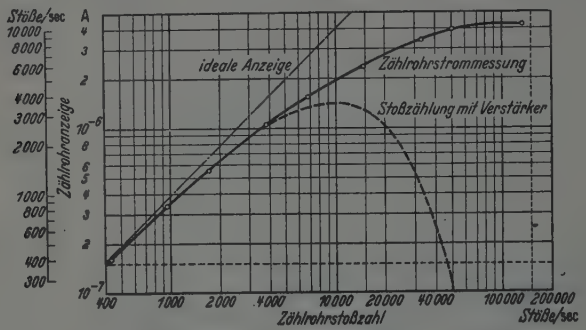


Fig. 2. Zählrohranzeige in Abhängigkeit von der Stoßzahl.

und durch den Begriff der „*Stoßzahl-Proportionalität*" ersetzt werden, d. h. es soll jeweils nur die Abweichung von der Proportionalität zwischen Zählrohranzeige und Strahlungsintensität betrachtet werden.

In Fig. 2 ist der Strom durch ein Zählrohr von 10 mm Durchmesser mit einem Zähldraht von 0,2 mm Durchmesser und 40 mm Länge („Zählrohr 10/0,2/40") mit Dampfzusatz (125 mm Argon + 10 mm Alkohol, 60 Volt über der Einsatzspannung) in Abhängigkeit von der Zählrohrstoßzahl aufgetragen. Zum Vergleich ist die Stoßzahl aufgezeichnet, die man bei trägheitsloser Stoßzählung mit einem Verstärker, der etwa auf die Hälfte der normalen Impulsgröße noch anspricht, bei demselben Zählrohr erhalten würde [theoretische Kurve[1]) mit demselben Anfangsverlauf]. Die eingezeichnete Gerade würde sich als Anzeige bei vollkommener Stoßzahlproportionalität ergeben. Das tatsächliche Auflösungsvermögen bei Stoßzählung ergibt sich zu $1{,}0 \cdot 10^{-4}$ sec; während jedoch die registrierte Stoßzahl schon bei

[1]) H. Volz, ZS. f. Phys. **93**, 539, 1935.

4000 registrierten Stößen ein Maximum erreicht und dann rasch abfällt, steigt der Zählrohrstrom bei diesen Intensitäten noch wesentlich an, so daß bei Zählrohrstrommessung eine Registrierung bis zu höheren Stoßzahlen als bei der Stoßzählung möglich ist.

Bei Versuchen über die Spannungsabhängigkeit der Stoßzahlproportionalität führte die Methode der Zählrohrstrommessung auf eine sehr einfache Lösung des Problems der Messung beliebiger Stoßzahlen. Es zeigte sich nämlich, daß man *bei Zählrohren mit Dampfzusatz auch bei Unterschreitung der Einsatzspannung noch genügend große Ströme zur Registrierung höherer Stoßzahlen* mit unserem einfachen Verstärker erhält und daß dabei die Stoßzahlproportionalität sehr stark ansteigt. Fig. 3 zeigt die Stromspannungskurve eines Zählrohres 10/0,2/40 bei einer Füllung mit 10 mm Alkohol + 125 mm Argon in logarithmischem Maßstab. Die Kurve ist bei konstanter Stoßzahl aufgenommen und stellt somit die Stoßgröße in Abhängigkeit von der Spannung dar[1]). Der Zählrohrstrom sinkt bei der Einsatzspannung innerhalb von 20 Volt auf $^1/_{35}$ seines Wertes, dann wird überraschend die Steigung der Kurve gering. Berücksichtigt man, daß der reine Ionisationsstrom bei der verwendeten Gasfüllung nur etwa 10^{-14} Amp. betragen würde, so sind die Ströme unter der Einsatzspannung bei dem Zählrohr mit Dampfzusatz als sehr hoch zu bezeichnen. Bei Zählrohren ohne Dampfzusatz sinkt bei der Einsatzspannung die Verstärkung

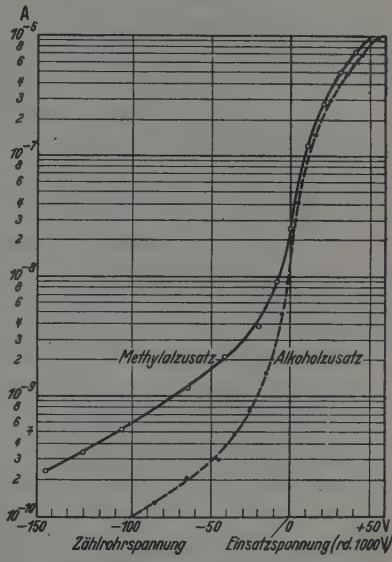


Fig. 3. Stromspannungskurven bei Zählrohren mit Dampfzusatz zu Argon (Zählrohr 10/0,2/40).

[1]) Um unter der Einsatzspannung noch gut meßbare Ströme zu erhalten, wurde die Stoßzahl mit 3800 Stößen/sec (durch Präparat von 10 mg in 20 cm Abstand) so hoch gewählt, daß über der Einsatzspannung gerade noch genügende Proportionalität zu erreichen war. Die hohe Stoßzahl bedingt, daß die erhaltenen Kurven über der Einsatzspannung nicht genau die Stoßgröße in Abhängigkeit von der Spannung darstellen, jedoch ist diese Abweichung für die Ergebnisse nicht wesentlich.

des Ionisationsstromes plötzlich und sehr stark ab. Werner[1]) hat diese Erscheinung bei Wasserstoffzählrohren genauer untersucht. Bei 10 Volt unter der Einsatzspannung war die Verstärkung nur noch etwa 50fach, die bei solchen Zählrohren beobachteten Ströme waren etwa 1000mal kleiner als die Ströme bei unseren Zählrohren und damit für eine rasch anzeigende Registrierung zu gering.

Durch eine günstigere Füllung lassen sich noch wesentlich höhere Ströme erhalten. Bei früheren Untersuchungen des Verfassers hat es sich gezeigt, daß auch einige wenige andere Dämpfe als Zählrohrzusatz verwendet werden können, z. B. *Methylal* $CH_2(OCH_3)_2$, das außerdem den Vorzug eines wesentlich höheren Dampfdruckes hat. Zählrohre mit 10 mm Alkohol können nur bei Temperaturen über -2^0 C verwendet werden. Da der Dampfdruck von Methylal selbst bei -10^0 C noch 90 mm beträgt, können auch bei sehr tiefen Temperaturen hohe Methylalzusätze verwendet werden. Es lag nahe, solche Zählrohre auch im Hinblick auf Stromspannungskurve und Stoßzahlproportionalität zu untersuchen. Die ausgezogene Kurve in Fig. 3 stellt die Stromspannungskurve des früher mit Alkoholzusatz untersuchten Zählrohres bei einer Füllung mit 15 mm Methylal + 175 mm Argon dar. Die Ströme unter der Einsatzspannung sind etwa sechsmal so groß wie bei Alkoholzusatz.

Will man für die Zählrohrstrommessung gerade noch Steigungen zulassen, die pro 1 Volt Spannungsänderung eine Stromänderung von 10% bedingen, so kann bei Spannungen gemessen werden, die mehr als etwa 10 Volt über oder auch unter der Einsatzspannung liegen, wobei als Einsatzspannung der Wendepunkt der Kurve verstanden sein soll. Die Ströme verhalten sich bei diesen beiden Spannungspunkten wie 14 zu 1. Durch Veränderung des Gitterwiderstandes kann dieser Sprung bequem überbrückt werden. Man kann also Stoßzahlen bis etwa 3000 pro sec über der Einsatzspannung, Stoßzahlen über 3000 pro sec unter der Einsatzspannung registrieren, vorausgesetzt, daß die Stoßzahlproportionalität bei diesen Spannungen auch bei höheren Stoßzahlen genügt. Diese wurde durch Erhöhung der Stoßzahl von 3800 pro sec auf das 10fache, also auf 38000 Stöße pro sec untersucht. In Fig. 4 ist als willkürliches Maß für die Stoßzahlproportionalität das Verhältnis der sich ergebenden Anzeigen in Abhängigkeit vom Zählrohrstrom bei der kleineren Stoßzahl aufgetragen. Mit kleinerem Zählrohrstrom, also mit kleinerer Zählrohrspannung, steigt die Stoßzahlproportionalität stark an. Sie ist bei hohen Strömen (über der Einsatzspannung) bei der untersuchten Methylalfüllung etwas schlechter als bei der

[1]) S. Werner, ZS. f. Phys. 90, 384, 1934.

Alkoholfüllung, dagegen ist sie bei kleinen Strömen bei Methylalzusatz wesentlich größer. 38000 Stöße/sec lassen sich bei 75 Volt unter der Einsatzspannung mit weniger als 5% Abweichung von der Stoßzahlproportionalität registrieren. Eine besondere Messung mit 90000 Stößen/sec ergab bei 100 Volt unter der Einsatzspannung eine Abweichung von 5%. Da bei unserem Gerät ein Spannungsbereich von 900 bis 1100 Volt zur Verfügung steht, können bei einer Einsatzspannung von 1000 Volt mit einem einzigen Zählrohr 10/0,2/40 somit bei 900 Volt mehrere 100000 Stöße/sec registriert werden. Mit einem Siebenfach-Zählrohr lassen sich also über 1 000 000 Stöße/sec registrieren. Mit wesentlich größeren Stoßzahlen braucht nach unseren Erfahrungen nicht gemessen zu werden. *Mit einem solchen Zählrohr lassen sich somit durch einfaches Regulieren der Zählrohrspannung und durch Umschalten auf verschiedene Meßwiderstände und Kapazitäten Intensitäten in Direktanzeige messen, die Stoßzahlen von etwa 10 pro sec bis zu 1000000 pro sec hervorrufen.* Intensitäten, die weniger als 10 Stöße/sec hervorrufen, werden zweckmäßig durch Anschalten eines Zählwerks an das Meßgerät gemessen.

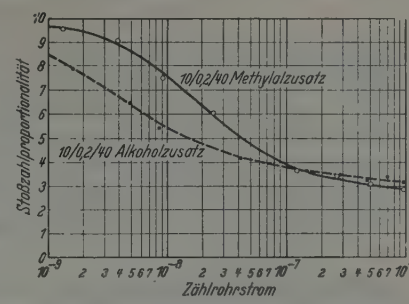


Fig. 4. Die Stoßzahlproportionalität in Abhängigkeit vom Zählrohrstrom bei Zählrohren mit Dampfzusatz. (Stoßzahl 38000 bzw. 3800 Stöße/sec.)

Weitere Untersuchungen ergaben, daß die Stoßzahlproportionalität desto besser wird, je größer der Zähldrahtdurchmesser und je kleiner der Zählrohrdurchmesser gewählt werden. Die Zählrohrströme werden mit größerem Dampfzusatz größer. Das Funktionieren der Zählrohre wird jedoch durch diese Maßnahmen verschlechtert. Das Zählrohr 10/0.2 mit einem Dampfzusatz von 10 mm Methylal stellt nach unseren Erfahrungen die beste Lösung dar, wenn sowohl über als auch unter der Einsatzspannung gearbeitet werden muß.

In vielen Fällen brauchen die *Zählrohre* nicht für sehr kleine, sondern *nur für hohe Stoßzahlen* geeignet zu sein. Es genügt, wenn sie unter der Einsatzspannung einwandfrei arbeiten. Daher lassen sich dann mit Vorteil Zählrohre mit dickerem Zähldraht, etwa Zählrohre 10/1,0 verwenden. Die Untersuchungsergebnisse bei verschiedenen Füllungen an einem solchen Zählrohr sind in Fig. 5 wiedergegeben, wobei die Intensität gegenüber den früheren Messungen auf das 320fache bis zu $1{,}2 \cdot 10^6$ Stößen pro sec

gesteigert wurde. Bei dieser Stoßzahl lassen sich Strahlungsunterschiede von 1% bei Meßzeiten von weniger als $^1/_{10}$ sec feststellen. Die ausgezogenen Kurven sind die erhaltenen Stromspannungslinien, die gestrichelten Fortsetzungen würden den Verlauf der Kurven bei vollkommener Stoßzahlproportionalität wiedergeben. Auch bei dem Zählrohr 10/1,0 liegt die Kurve für Methylalzusatz wesentlich höher als diejenige für Alkoholzusatz (Zusätze 10 mm, Einsatzspannung 1100 Volt). Da bei Methylal mit hohen Dampfdrucken gearbeitet werden kann, lag es nahe, auch bei reiner Methylalfüllung (25 mm) zu untersuchen. Die Ströme sind noch bedeutend höher als bei Methylalzusatz. Bei Strömen kleiner als 10^{-6} Amp. ist keine Abweichung von der Stoßzahlproportionalität festzustellen, die ausgezogenen und gestrichelten Kurven fallen zusammen. Man kann also mit hohen Strömen und geringer Stromempfindlichkeit des Meßgerätes arbeiten und damit die Unempfindlichkeit gegen Störungen (z. B. Isolationsfehler) erhöhen.

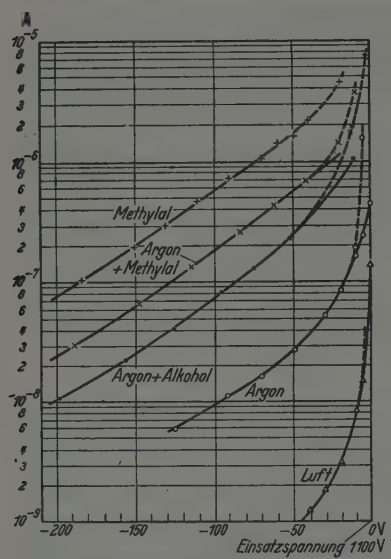


Fig. 5. Stromspannungskurven des Zählrohres 10/1,0 bei verschiedenen Füllungen (Stoßzahl $1{,}2 \cdot 10^6$ pro sec).

Zum Vergleich wurden zwei Kurven eingezeichnet, die mit demselben Zählrohr ohne Dampfzusatz bei Luft- und Argonfüllung erhalten wurden und die den starken Vorteil der Dampffüllung zeigen. Die Ströme bei Luft sind um drei bis vier Zehnerpotenzen niedriger als die bei Methylalfüllung. Sie entsprechen etwa denjenigen, wie sie Werner bei Wasserstoff erhalten hat. Das Edelgas Argon nimmt eine Zwischenstellung zwischen den normalen Gasen und den Dämpfen ein. Immerhin sind auch bei Argonfüllung die Ströme um fast zwei Zehnerpotenzen kleiner als bei Methylalfüllung. Weitere Untersuchungen ergaben, daß auch im Hinblick auf die Stoßzahlproportionalität die reine Methylalfüllung die beste Füllung darstellt und daß die Füllungen mit Dampfzusatz wesentlich besser sind als die Füllungen mit Argon oder gar mit Luft.

Lawinenprodukte, Durchschlagsenkung und fallende Charakteristik.

Von **W. Rogowski**, Aachen.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 16. September 1940.)

Es werden die Ergebnisse der neueren Durchschlagsforschung zusammengestellt. Die Begründung wird vereinfacht und verallgemeinert.

Vorgeschichte. Die neuen Durchschlaggesetze von Rogowski, Fucks und Wallraff. Bestätigung der Form der Gesetze durch den Versuch a) bei Molekülgasen (Rogowski, Wallraff und Brinkmann, Fucks, Schuhmacher und Kettel), b) bei Edelgasen (Schade, Schoefer und Büttner). Die Konstanten der Gesetzmäßigkeiten abhängig von Feld- und Gasänderung bei Stromdurchgang. Erweiterung der Townsendschen Theorie. Rückblick.

1. Vorgeschichte. Neuere Ergebnisse. Ziel. Eine bestrahlte Funkenstrecke spricht besser an als eine unbestrahlte[1]). Als Ursache weist Hallwachs[2]) (1888) eine lichtelektrische Wirkung nach. Die Bestrahlung soll nach Warburg[3]) (1896) lediglich die Funkenverzögerung aufheben[4]), die Durchschlagspannung selbst dagegen nicht meßbar beeinflussen. Erst spät wurde nachgewiesen[5]), daß sich entgegen dieser Aussage dennoch recht merkliche Änderungen der Durchschlagspannung mit der Bestrahlung ergeben können. Es gelang aber weder dem Versuch noch der Theorie, zu *Gesetzmäßigkeiten* vorzudringen. Dies geschieht erst (1935 bis 1936) in den Arbeiten von Rogowski, Fucks und Wallraff[6]), nach denen folgende Aussagen *bei nicht zu starker Bestrahlung* für ebene Funkenstrecken zutreffen sollen:

1. Bei merklicher Bestrahlung sinkt die Durchschlagspannung proportional der Wurzel aus dem Fremdstrom ab: Bedeutet i_0 die Fremdstromdichte infolge Bestrahlung, U_0 die Durchschlagspannung bei $i_0 \to$ Null, ΔU die Durchschlagsenkung, K_1 und K_2 zwei von den Eigenschaften der Funkenstrecke abhängige Konstanten, so soll gelten[7]) (Rogowski-Fucks):

$$\frac{\Delta U}{U_0} = K_2 \sqrt{i_0}. \tag{I}$$

[1]) H. Hertz, Wiedemanns Ann. **31**, 983, 1887. — [2]) W. Hallwachs, ebenda **33**, 301, 1888. — [3]) E. Warburg, ebenda **59**, 1, 1896. — [4]) Ein eindrucksvoller Versuch hierzu findet sich bei H. Scholtheis, Arch. f. Elektrotechn. **34**, 237, 1940. — [5]) Schrifttum bei C. Brinkmann, ebenda **33**, 121, 1940. — [6]) W. Rogowski, ebenda **26**, 674, 1932; W. Rogowski u. W. Fucks, ebenda **29**, 362, 1935; W. Rogowski, ZS. f. Phys. **100**, 1, 1936; W. Rogowski u. A. Wallraff, ebenda **102**, 183, 1936. — [7]) Die Bezeichnung der Konstanten ist in Übereinstimmung mit meinen früheren Arbeiten gewählt. Daß das obige Wurzelgesetz auch für das inhomogene Feld gilt, hat Scholtheis a. a. O. nachgewiesen.

2. Der Durchschlagstrom i_d wird nicht unendlich. Er wächst ebenfalls proportional mit der Wurzel aus dem Fremdstrom. Es soll sein (Rogowski-Fucks):

$$i_d = \frac{K_2}{2K_1}\sqrt{i_0}. \qquad \text{(II)}$$

3. Bei verschwindendem Fremdstrom ($i_0 \to 0$) fällt die Spannung nach Überschreiten des Durchschlags proportional mit dem Strome i ab[1]) (linear fallende Charakteristik, Fig. 1, Gerade OC) (Rogowski):

$$\frac{\Delta U}{U_0} = K_1\, i. \qquad \text{(III)}$$

4. Die Charakteristik bei merklicher Bestrahlung besteht in der Umgebung des Durchschlagspunktes aus einem Stück einer Hyperbel (steigende

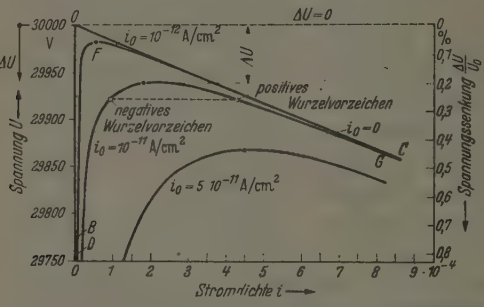


Fig. 1. Stromspannungscharakteristik bei verschiedenen Bestrahlungsstärken i_0. Luft. Atmosphärendruck. Elektrodenabstand etwa 1 cm. Durchgang durch den Durchschlagspunkt. W. Rogowski und A. Wallraff, ZS. f. Phys. 102, 183, 1936.

und fallende Charakteristik; vgl. die Kurven Fig. 1; Rogowski-Fucks-Wallraff):

$$i = \frac{1}{2K_1}\cdot\frac{\Delta U}{U_0} \pm \frac{K_2}{2K_1}\sqrt{-i_0 + \left(\frac{\Delta U}{K_2 U_0}\right)^2}. \qquad \text{(IV)}$$

Die Aussagen I bis IV stützen einander gegenseitig. So geht I aus IV hervor, wenn man zur Bestimmung des Scheitels der Hyperbel den Wurzelausdruck in IV gleich Null setzt. Der hierzu gehörige (Durchschlag) Strom nimmt dann den für i_d angeschriebenen Wert II an. Beim Ausdruck III schrumpft die Hyperbel auf eine ihrer Asymptoten zusammen. Fig. 1 ist daher für den Inhalt der Aussagen I bis IV charakteristisch.

[1]) W. Rogowski, Archiv f. Elektrot. 26, 674, 1932.

Die angeschriebenen Gesetzmäßigkeiten sind im Schrifttum mehrfach durch den Versuch geprüft worden. Über die zugehörige Erweiterung der Townsendschen Theorie ist wiederholt diskutiert worden. Es konnte eine Klärung strittiger Fragen herbeigeführt werden. Ein gewisser Fortschritt kann heute als gesichert gelten. Da sich die Ergebnisse in einer Reihe von Arbeiten verstreut vorfinden, halten wir es zur Zeit für nützlich, sie kurz zusammenzufassen. Dabei werden wir die Begründung vereinfachen und verallgemeinern.

2. Form der Durchschlaggesetze. Versuchsergebnisse. Wir richten unser Augenmerk zunächst auf die *Form* der Aussagen I bis IV und stellen die genauere Betrachtung der Konstanten für den folgenden Abschnitt zurück.

a) Durchschlagsenkung. Am einfachsten läßt sich die Aussage I experimentell prüfen, nach der die Durchschlagsenkung proportional der Wurzel aus der Bestrahlung zunehmen soll. Aufgetragen über der Wurzel aus der Fremdstromdichte sollen sich somit für die prozentuale Durchschlagsenkung *gerade Linien* ergeben (Auftragung 1). Noch eine andere (doppelt logarithmische) Auftragung ist gebräuchlich. Es folgt aus I:

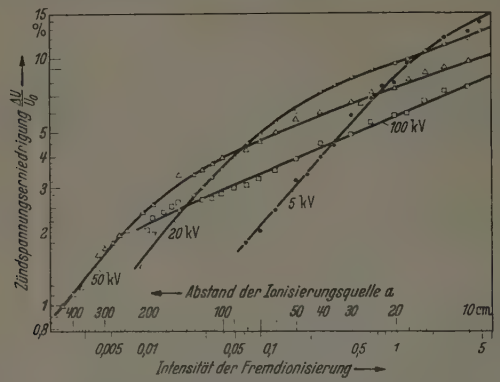
$$2 \ln \left(\frac{\Delta U}{U_0} \right) = 2 \ln K_2 + \ln i_0. \tag{2.1}$$

Tragen wir daher $\ln (\Delta U / U_0)$ in *doppeltem Maßstabe* über $\ln i_0$ auf, so erwartet man unter *einem Winkel von 45° geneigte Geraden* (Auftragung 2). Die Geraden liegen um so mehr nach links (nach schwächeren Bestrahlungen) verschoben, je größer die Konstante K_2 ausfällt.

Molekülgase. Die ersten Messungen stammen von Rogowski und Wallraff[1]) (Fig. 2) und beziehen sich auf *Luft.* Die Elektroden der Meßfunkenstrecke bestanden aus Kupfer bzw. Messingkugeln von 15 und 5 cm Durchmesser. Bestrahlt wurde mit dem Lichte einer zweiten Funkenstrecke. Die Intensität der Bestrahlung wurde unter Vernachlässigung der Absorption umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Funkenstrecken angesetzt. Diese Annahme ist später von Brinkmann durch den Versuch nachgeprüft worden[2]). Er fand sie besonders gut bestätigt, wenn Zink und Kupferelektroden bei der Beleuchtungsfunkenstrecke verwendet wurden. Man entnimmt Fig. 2 mit seiner doppelt logarithmischen Auftragung, daß sich die Meßpunkte der durch das Wurzelgesetz

[1]) W. Rogowski und A. Wallraff, ZS. f. Phys. **97**, 758, 1935. — [2]) C. Brinkmann, ebenda **97**, 758, 1936.

geforderten Geraden unter einer Neigung von 45° (vgl. oben) zwanglos einordnen. Bei höheren Bestrahlungen wächst die Absenkung langsamer.



g. 2. Durchschlagsenkung und Bestrahlung. *Luft.* Atmosphärendruck. Doppeltlogarithmische Auftragung. Der Wurzel entspricht eine Gerade unter 45°. W. Rogowski und A. Wallraff, ZS. f. Phys. 97, 758, 1935.

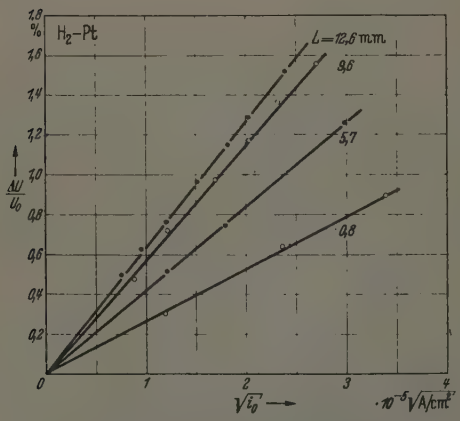


Fig. 3. Durchschlagsenkung und Bestrahlung. *Wasserstoff.* **Druck 451 Torr. Veränderlicher Elektrodenabstand. Entnommen der Arbeit von W. Fucks und F. Kettel: Zündung in Wasserstoff. ZS. f. Phys. 116, 657, 1940.**

Auch dies entspricht der Vorhersage, interessiert uns aber in diesem Zusammenhange nicht. Weitere Messungen an Luft stammen von Brink-

mann (a. a. O.), von Fucks und Bongartz[1]). Auch diese Autoren finden eine recht befriedigende Übereinstimmung mit dem Wurzelgesetz.

Für *Wasserstoff* haben Fucks, Schumacher und Kettel[2]) ein reichhaltiges Beobachtungsmaterial zusammengetragen. Den Inhalt einer ihrer Messungen gibt Fig. 3. Wir führen noch eine Messung von Fucks und

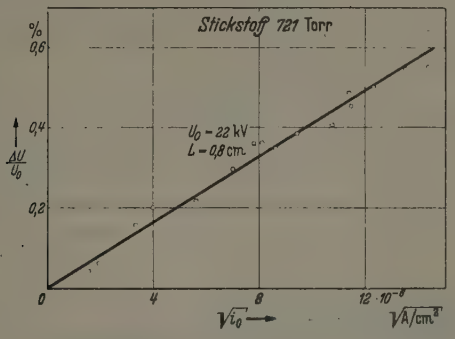


Fig. 4. Durchschlagsenkung und Bestrahlung. *Stickstoff.* 721 Torr. W. Fucks und G. Schumacher, ZS. f. Phys. **112**, 605, 1939.

Schumacher[3]) an *Stickstoff* an (Fig. 4). Der Versuch hat daher sowohl bei Wasserstoff wie bei Stickstoff die geforderte Linearität mit der Wurzel aus der Fremdstromdichte aufs beste bestätigen können.

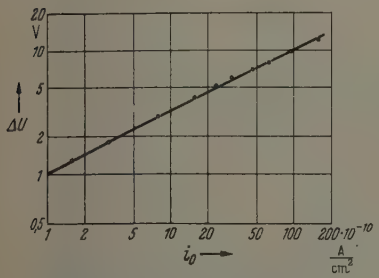


Fig. 5. Durchschlagsenkung und Bestrahlung. *Argon.* Druck 10 Torr. R. Schade, ZS. f. Phys. **105**, 614, 1937.

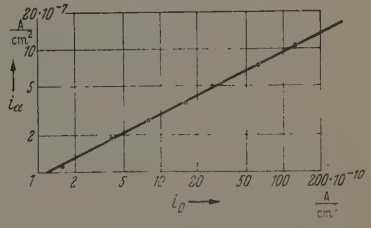


Fig. 6. Durchschlagstrom und Bestrahlung. *Argon.* 10 mm Druck. R. Schade, ZS. f. Phys. **105**, 614, 1937.

[1]) W. Fucks und H. Bongartz, ZS. f. techn. Phys. **20**, 205, 1939. — [2]) W. Fucks und G. Schumacher, Naturwissensch. **28**, 110, 1940. — W. Fucks u. G. Schumacher, ZS. f. Phys. **112**, 605, 1939.

Edelgase. Es ist nur *Argon* untersucht worden. Fig. 5 enthält Ergebnisse von Schade[1]). Die Übereinstimmung mit der theoretischen Geraden ist so gut, wie man sie nur erwarten kann. Messungen von Schöfer[2]) stehen hiermit in Einklang.

b) Durchschlagstrom. Er ist von Schade und Schöfer an *Argon* gemessen worden. Fig. 6 entstammt einer Schadeschen Arbeit[3]). Die Proportionalität mit der Wurzel aus der Fremdstromdichte (Gesetz II) kommt überzeugend zum Ausdruck.

c) Charakteristik. Keine Bestrahlung. Bei verschwindender Bestrahlung soll sich nach Aussage III ein einfacher geradliniger Zusammenhang zwischen Spannungsabfall und Stromdichte ergeben (vgl. Fig. 1, Gerade *OC*). Die Richtigkeit dieser Aussage ist wiederholt experimentell festgestellt worden. Fig. 7 zeigt Messungen von Büttner[4]). Sie beziehen

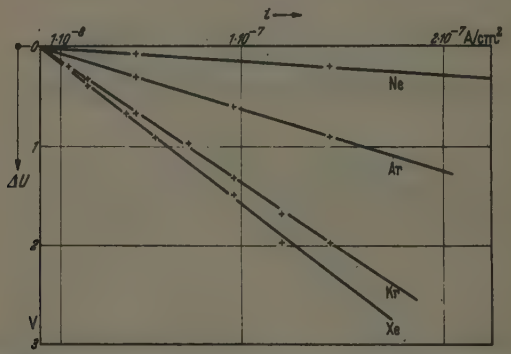


Fig. 7. Keine Bestrahlung. Stromspannungscharakteristik. Druck 5 Torr. Elektrodenabstand 0,5 cm. *Neon, Argon, Krypton* und *Xenon.* H. Büttner, ZS. f. Phys. 111, 761, 1939.

sich auf Argon, Neon, Xenon, Krypton. Mit Ausnahme von Helium sind somit sämtliche Edelgase untersucht worden.

d) Charakteristik. Merkliche Bestrahlung. Auch die experimentelle Aufnahme der Charakteristik bei merklicher Bestrahlung hat sich an *Argon* verwirklichen lassen. Die Versuchsergebnisse (Fig. 8) stammen von Schöfer (l. c.). Die Übereinstimmung mit dem hyperbolischen Verlauf

---

[1]) R. Schade, ZS. f. Phys. **105**, 614, 1937. — [2]) R. Schöfer, ebenda **110**, 29, 1938. — [3]) R. Schade, a. a. O. — [4]) H. Büttner, ZS. f. Phys. **111**, 761, 1939; vgl. auch R. Schade, ebenda **108**, 369, 1938.

(vgl. Fig. 1; Gesetz IV) fällt ohne weiteres in die Augen. Die Übereinstimmung ist überraschend gut.

Wir fassen zusammen: Der Versuch hat ein überzeugendes, ja man kann sagen ein erdrückendes Beweismaterial für die Richtigkeit der Rogowski-

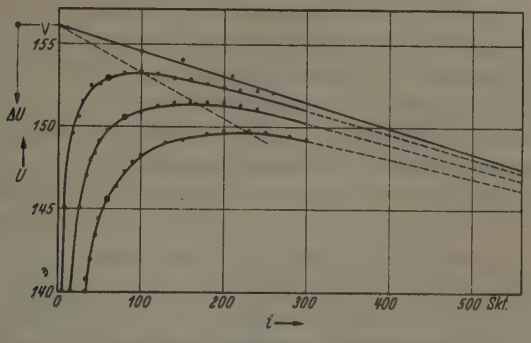


Fig. 8. Charakteristik bei verschiedenen Bestrahlungsstärken. *Argon.* R. Schöfer, ZS. f. Phys. 110, 29, 1938 (vgl. auch Fig. 1).

Fucks-Wallraffschen Gesetzmäßigkeiten I bis IV — soweit ihre Form in Betracht kommt — zusammengetragen.

3. Die Konstanten. Wir wenden unser Augenmerk von der *Form* der Gesetzmäßigkeiten ab und richten es auf die Konstanten K_1 und K_2. Hier hat der Versuch die ursprünglich von Rogowski, Fucks und Wallraff angegebenen Werte nicht in gleich befriedigender Weise bestätigen können. Dies hängt eng zusammen mit der Unsicherheit unserer Vorstellungen über die Art und Weise, wie eine ursprünglich unselbständige Entladung in die selbständige übergeht. Die Vorstellungen hierüber und über die hierbei erforderliche Rückwirkung sind keineswegs abgeschlossen, sondern in Fluß. Da die Konstanten entscheidend von den Eigenschaften der Rückwirkung abhängen können (vgl. unten), so werden sie von dieser Unsicherheit naturgemäß in Mitleidenschaft gezogen. Zur Zeit der ersten Herleitung der Aussagen I bis IV war es üblich anzunehmen, daß im wesentlichen unter der Wirkung positiver Ionen die Entladung aus der unselbständigen Form in die selbständige übergeht. Treffen positive Ionen auf die Kathode, so sollen sie nach dieser Anschauung daselbst Elektronen auslösen. Als Maß für diese Art Rückwirkung dient die Zahl $1/\gamma$ derjenigen positiven Ionen, die durch Aufprall gerade ein Elektron befreien können (Rückwirkung durch positive Oberflächenionisierung). Stellt man sich auf diesen Standpunkt, so folgt

aus Durchschlagsmessungen, namentlich bei Molekülgasen ein im allgemeinen stark mit der Feldstärke ansteigender γ-Wert [1]).

Fließt nun Strom durch eine Funkenstrecke, wie dies bei wachsender Ausbildung des Durchschlags in immer stärkerem Maße der Fall sein muß, so wächst mit dem Strom die Raumladung und mit ihr die Feldverzerrung. Die Feldstärke an der Kathode wird größer. Es muß somit, wenn die Vorstellung von der positiven Rückwirkung zutrifft, mit der Stromstärke und der Kathodenfeldstärke die Rückwirkung wachsen. Die Entladung wird erleichtert. Die zugehörige Brennspannung sinkt [2]). Auf dieser Grundlage haben Rogowski und Fucks die Aussagen I bis IV hergeleitet und Werte für die Konstanten K_1 und K_2 angegeben [3]).

Die so gefundenen Konstanten müssen offensichtlich auf unerhebliche Beträge zurückgehen, wenn sich bei einem Gas in einem gewissen Feldstärkenbereich γ praktisch als konstant erweisen sollte. Das trifft bei Argon und höheren Feldstärken zu. Es war daher ein nützliches Unternehmen, als Schade an diesem Gas die Aussagen I bis IV einer Prüfung unterzog. In seiner ersten Arbeit [4]) kam zwar Schade noch zu dem Schluß, daß auch bei Argon die gemessene Absenkung von der Änderung der Rückwirkung positiver Ionen herrühre. In einer späteren Arbeit hat er indessen die Unvereinbarkeit der von ihm beobachteten erheblichen Werte der Absenkung mit der geringen γ-Änderung in Argon nachgewiesen [5]). Da durch den Versuch die Form der Rogowski-Fucks-Wallraffschen Gesetzmäßigkeiten nicht widerlegt werden konnte (vgl. Abschnitt 2), so blieb der Kritik nur noch übrig, sich gegen die Konstanten zu wenden und nach anderen Gründen als bisher für das Bestehen der Aussagen I bis IV zu suchen.

Schade [6]) machte hierfür — wir folgen hier zunächst seinem Gedankengang — *nicht die Rückwirkung*, sondern *das Gesetz für die Elektronenionisierung* verantwortlich. Als Grundlage erscheint bei Schade eine Abänderung des Townsendschen Ionisierungsgesetzes, das durch ein *quadratisches, von der Elektronendichte* abhängendes Glied erweitert wird [7]). Stufenprozesse sollen nach Schade diese Erweiterung rechtfertigen. Schade wies nach, daß man mit einem Ionisierungsgesetz, das ein quadratisches, von der Elektronendichte abhängiges Glied enthält (vgl. oben), ebenfalls

[1]) Wenn auch die Vorstellung positiver Oberflächenionisierung im Vordergrund stand, so hat man doch in γ immer eine Summenwirkung von positiver Volumen-, von positiver Oberflächenionisierung und von lichtelektrischer Rückwirkung gesehen. — [2]) Das gleiche gilt auch für die positive Volumionisierung. — [3]) Vgl. das Abschnitt 1 angeführte Schrifttum. — [4]) R. Schade, ZS. f. Phys. **105**, 595, 1937. — [5]) R. Schade, ebenda **108**, 369, 1938. — [6]) R. Schade, a. a. O. — [7]) Vgl. auch Abschnitt 4.

die Rogowski-Fucksschen Gesetze, nunmehr aber mit anderen Werten der Konstanten, begründen kann. Als Stufenprozesse kommen in Betracht: Zusammenstoß angeregter, besonders metastabiler Atome untereinander und hierdurch ausgelöste Ionisierungsprozesse, oder Zusammenstoß von Elektronen mit bereits angeregten Atomen und hierdurch Erleichterung der Elektronenionisierung.

Auch bei Schade muß natürlich gefragt werden, ob die gefundenen Konstanten mit der Größe der beobachteten Durchschlagsenkungen verträglich sind. Schade kommt zu dem Ergebnis, daß dies möglich sein kann bei Ionisierungsvorgängen, die durch Stoß metastabiler Atome unter sich zustande kommen. Stufenprozesse durch Stoß von Elektronen gegen angeregte Atome sollen dagegen an Bedeutung weit zurücktreten und für die gemessene Absenkung allein nicht in Betracht kommen[1]).

Das Augenmerk wurde somit vorzugsweise auf die metastabilen Atome gelenkt. Dies ging soweit, daß die Meinung aufkam, die Raumladung habe grundsätzlich überhaupt keinen Einfluß auf die Durchschlagsenkung und die physikalische Grundlage der Gesetze I bis IV sei wesentlich durch das Eingreifen metastabiler Zustände bedingt. Hier haben zur Klärung Versuche von Fucks, Schumacher und Kettel (l. c.) beigetragen. Diese Autoren wiesen an *Wasserstoff* recht beträchtliche Durchschlagsenkungen bei Bestrahlung nach. Wasserstoff hat aber keine metastabilen Zustände. Hieraus geht einwandfrei hervor, daß die Gesetzmäßigkeiten I bis IV auch ohne metastabile Zustände zu Recht bestehen und die Konstanten auch ohne metastabile Zustände beträchtliche Werte annehmen können.

Es war weiter nützlich, daß Rogowski[2]) nachweisen konnte, daß die Gesetzmäßigkeiten I bis IV, auch mit *lichtelektrischer* Rückwirkung, nunmehr wieder mit anderen Konstanten verträglich sind. Und zwar unter Berücksichtigung der sich mit dem Durchschlag ausbildenden Raumladung. Vorausgesetzt, daß die Vorstellungen, die wir uns bisher von der lichtelektrischen Rückwirkung machen, zutreffen.

Noch andere Ursachen für das Bestehen der Aussagen I bis IV konnten gefunden werden. So hat die Raumladung eine Verringerung der Rückdiffusion an der Kathode zur Folge[3]). Sie erhöht auch die integrale Elektronenionisierung[4]). All diese Ursachen führen zu den Aussagen I bis IV jedesmal mit geänderten Werten der Koeffizienten K_1 und K_2.

---

[1]) H. Büttner, a. a. O.; W. Rogowski, ZS. f. Phys. **115**, 281, 1940. — [2]) W. Rogowski, ebenda **114**, 1, 1939. — [3]) W. Rogowski, ebenda **115**, 261, 1940. — [4]) W. Rogowski u. A. Wallraff, ebenda **108**, 1, 1937.

Die Konstanten K_1 und K_2 hängen somit nicht von einer einzigen Ursache, sondern von mancherlei Einflüssen ab, von denen bisher die folgenden erkannt worden sind: Die Änderung der positiven Rückwirkung, gleichgültig ob es sich um Oberflächen- oder räumliche Rückwirkung handelt, die Änderung der lichtelektrischen oder metastabilen Rückwirkung, die Rückdiffusion der Elektronen an der Kathode, die Änderung der integralen Elektronenionisierung durch Raumladung, der Stufenprozeß durch Stoß angeregter (metastabiler) Atome unter sich oder durch Stoß angeregter Atome gegen Elektronen, die Dissoziation[1]). Jede der genannten Ursachen steuert nach unserer Ansicht zum Werte der Konstanten K_1 und K_2 bei. Aber das Gewicht, mit dem die einzelne Ursache zur Geltung kommt, wird naturgemäß von Fall zu Fall verschieden sein. Hierüber erschöpfende Klarheit zu verschaffen, wird Sache kommender Forschung sein.

Wir erleben bei unseren Gesetzmäßigkeiten dasselbe, wie bei der Townsendschen Beschreibung der dunklen Vorströme. Hergeleitet wurde letztere unter der Annahme positiver Volumenionisierung. Aber später hat sich gezeigt, daß dieselbe mathematische Form mit Umdeutung der Konstanten für positive Oberflächenionisierung, bei lichtelektrischer und bei metastabiler Rückwirkung gilt. Die Form der Beschreibung sagt somit noch nichts Bestimmtes über die ins Spiel kommende physikalische Ursache aus. Diese Unempfindlichkeit der Form gegenüber der physikalischen Ursache setzt sich noch bei unseren Gesetzmäßigkeiten fort. Um auf unsere Gesetzmäßigkeiten zu stoßen, war es somit nur notwendig, mit einer der vielen Ursachen einmal den Anfang zu machen. Es war dabei nicht einmal notwendig, die zahlenmäßig überwiegende Ursache zu treffen (vgl. auch Abschnitt 5).

4. Erweiterung der Theorie. a) Allgemeines. Die Townsendsche Theorie in ihrer ursprünglichen Fassung vermag die Aussagen I bis IV nicht zu begründen. Sie gibt wohl Rechenschaft von der Aufhebung der Funken-

---

[1]) Die Dissoziation muß namentlich bei H_2 von Bedeutung sein. So entsteht bekanntlich mit dem Spektrum des molekularen Wasserstoffs immer das Spektrum des atomaren Wasserstoffs. Die mit Dissoziation verbundene Strahlung wird sogar als ultraviolette Strahlungsquelle (H_2-Kontinuum) ausgenutzt (vgl. Finkelnburg, Kontinuierliche Spektren, 1938, S. 185 und 188; W. Weizel, H. Rohleder und H. Finken, ZS. f. techn. Phys. **21**, 101, 1940). Schließlich kann nach W. Schütze (Wiss. Veröffentl. d. Siemens-Konz. XVII, Heft 3, 1938, S. 154) unter gewissen Umständen in Kanalstrahlröhren die Zahl der H_1^+-Ionen etwa $^1/_3$ der Zahl der H_2^+-Ionen betragen. Alles dies deutet auf eine beträchtliche Gasänderung infolge Dissoziation bei Stromdurchgang hin. Die Dissoziationsprodukte reichern sich an, bis die schließlich einsetzende Molekelrückbildung ihrem Wachstum eine Grenze setzt.

verzögerung durch Bestrahlung, aber nicht von der zugehörigen Durchschlagsenkung. Die *Charakteristik der Townsendschen (Vor-)Ströme* ist *steigend*. Die Charakteristik geht dagegen in dem uns interessierenden Gebiet von dem anfänglich steigenden Verlauf in den *ausgesprochen fallenden* über (vgl. Fig. 1). Man kommt daher um eine Erweiterung der Theorie nicht herum. Sie wird naturgemäß bei den offensichtlichen Vernachlässigungen der Theorie ihren Ausgang nehmen müssen. Was man bei Townsend vermißt, ist die Berücksichtigung der bei Elektronendurchgang entstehenden *Feld-* und *Gasänderung*. Die Theorie hatte die Bildung positiver Ionen und ihre Rückwirkung von jeher in den Vordergrund geschoben. Sie war aber den Folgen der zugehörigen Umgestaltung des Feldes (Raumladung) nicht ausreichend nachgegangen. Die Theorie hatte in Anregungs- und Lichtquanten eine mögliche Ursache der Rückwirkung erkannt. Sie hatte aber die Ionisierungsprozesse, die sich aus dieser Gasänderung ergeben (Stufenprozesse), nicht genügend berücksichtigt. Wollte man erweitern, so war es zweckmäßig, die *Berücksichtigung der Lawinenprodukte* einen Schritt weiter zu treiben, als dies bisher geschehen war.

Durch den folgenden Gedankengang können *sämtliche* bisher bekanntgewordenen Begründungen der Gesetzmäßigkeiten I bis IV zusammengefaßt werden:

Ist keine Bestrahlung vorhanden, so gilt für die Entladung eine Gleichgewichtsbedingung von der Form:

$$\mu = \Gamma S = 1. \tag{4.1}$$

S mißt dabei die Größe der Erzeugung von Elektronen bzw. der Lawinenprodukte Γ ist ein Maß für die Rückwirkung. Bei Voraussetzung positiver Oberflächenionisierung ist

$$S = (e^{\alpha L} - 1); \tag{4.2}$$

$$\Gamma = \gamma \tag{4.3}$$

(α Ionisierungskoeffizient der Elektronen, L Elektrodenabstand). Bei Eingreifen lichtelektrischer Vorgänge oder Wirkung metastabiler Atome erhalten S und Γ andere Werte. Es genügt daran zu erinnern, daß auch dann eine Gleichung der Form (4.1) der Entladung auferlegt werden muß. Das Produkt

$$\Gamma \cdot S = \mu \tag{4.4}$$

gibt die Zahl der Elektronen an, die bei Verfolgung der ionisierenden Wirkung eines Ausgangselektrons über die Lawinenprodukte und deren Rückwirkung

durch die Entladung selbst erzeugt werden ($\mu =$ Ionisierungsanstieg). Bei Townsend sind die Größen α, Γ, μ lediglich Funktionen der Feldstärke bzw. der Spannung. Die charakteristische Erweiterung, die wir treffen, liegt darin, daß diese Größen auch noch als Funktionen der Stromdichte i aufgefaßt werden. Solange wir den Ionisierungsanstieg lediglich als Funktion der Spannung ansehen, ist mit der Forderung (4. 1) nur eine einzige Spannung verträglich, nämlich die Durchschlagspannung selbst (Townsend). Sobald wir die genannten Größen aber noch als eine Funktion der Stromdichte voraussetzen, wird durch die Forderung (4. 1) ein funktionaler Zusammenhang zwischen Spannungs- und Stromwerten festgelegt. Wir erhalten eine Charakteristik. Beschränkt man sich auf kleine Spannungsänderung in der Nähe des Durchschlagspunktes und auf kleine Stromdichten, die wir nicht mit Δi, sondern mit i bezeichnen wollen, so erhalten wir, wenn wir noch den Wert von μ für die Durchschlagspannung und Stromdichte Null mit μ_0 bezeichnen, durch Entwicklung

$$\mu = \mu_0 - \frac{\partial \mu}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial \mu}{\partial i} i = 1 \tag{4.5}$$

Das Vorzeichen bei ΔU ist gewählt, daß Spannung*senkungen positiv* gerechnet werden. Da wiederum $\mu_0 = 1$ ist, so folgt:

$$\Delta U = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial i} \cdot i}{\frac{\partial \mu}{\partial U}} = K_1' i. \tag{4.6}$$

Dies ist die Gesetzmäßigkeit III. Da unsere Gesetzmäßigkeiten I bis IV in verwandschaftlicher Beziehung zueinander stehen, so enthält dieser Gedankengang bereits das Wesentliche für ihre Gesamtbegründung. Im folgenden wollen wir noch genauer darlegen, wie die Abhängigkeit von μ mit der Stromdichte physikalisch zustande kommt. Auch wollen wir die formelmäßige Beschreibung noch ein Stück weiterführen.

b) Raumladung. Rückwirkung durch positive Ionen. Man übersieht die Zusammenhänge am einfachsten bei positiver Ionisierung und Raumladung. Wir knüpfen hieran an, um das Grundsätzliche zu zeigen, ohne damit zum Ausdruck bringen zu wollen, daß wir hiermit immer einen numerisch wichtigen Fall treffen. Die Raumladung wächst anfänglich proportional dem Strome i (lineare Feldverzerrung). Bedeutet E_k die Kathodenfeldstärke, so ist die Erhöhung derselben bei Stromdurchgang:

$$\Delta E_k = ri \quad (r = \text{const})^1). \tag{4.7}$$

[1]) Vgl. W. Rogowski u. A. Wallraff, a. a. O.

Halten wir die Spannung U konstant, verändern wir aber die Stromdichte, so wird der Rückwirkungskoeffizient γ infolge der Veränderung der Kathodenfeldstärke eine Funktion der Stromdichte i und es ist (da $i \sim \Delta i$):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial i} = \frac{\partial \gamma}{\partial \left(\frac{E_k}{r}\right)}. \tag{4.8}$$

Ist γ_0 ein Anfangswert, so ist in seiner Umgebung, wenn wir wieder Spannungssenkungen ΔU positiv rechnen, in seiner Umgebung zu schreiben:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{\partial \gamma}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial \gamma}{\partial i} i. \tag{4.9}$$

Auch bei dem Faktor

$$S = e^{\int_0^L \alpha \, \mathrm{d}x} - 1 \tag{4.10}$$

müssen wir bei allgemeiner Anschrift in der Nähe eines Ausgangswertes $S_0 = (e^{\alpha_0 L} - 1)$ ansetzen:

$$S = S_0 - \frac{\partial S}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial S}{\partial i} i. \tag{4.11}$$

Man kann (4.11) vereinfachen: Ordnen wir nämlich nicht nur im homogenen, sondern auch im inhomogenen Feld den α-Wert an einer Stelle der Feldstärke an derselben Stelle zu, so fällt, wie genauere Betrachtungen gezeigt haben[1]), das dritte Glied auf der rechten Seite von (4.11) bei nicht zu starken Verzerrungen weg,

$$\frac{\partial S}{\partial i} = 0, \tag{4.12}$$

und es schrumpft in diesem Falle (4.11) zusammen zu:

$$S = S_0 - \frac{\partial S}{\partial U} \Delta U. \tag{4.13}$$

Nun leitet man leicht her, wenn man die Steigungsverhältnisse einführt:

$$S_\alpha = \frac{E_0}{\alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}E}; \qquad S_\gamma = \frac{E_0}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial E}, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial i} = S_\gamma \cdot \frac{r}{E_0} \tag{4.15}$$

und mit Vernachlässigung von 1 gegen $e^{-\alpha L}$:

$$\frac{\partial \mu}{\partial U} = L \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{U_0} (L \alpha_0 S_\alpha + S_\gamma). \tag{4.16}$$

[1]) W. Rogowski, ZS. f. Phys. **100**, 1, 1936.

Somit folgt nach (4, 6)

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \left(\frac{S_\gamma \cdot \frac{r}{E_0}}{L\alpha_0 S_\alpha + S_\gamma}\right) i = K_1 i. \qquad (4.17)$$

Es sei nunmehr *Fremdbestrahlung* vorhanden. Je Sekunde mögen im Beharrungszustand N_k Elektronen die Kathode verlassen. Sie erzeugen $N_k (e^{\alpha L} - 1)$ positive Ionen und an der Kathode $\gamma N_k (e^{\alpha L} - 1)$ Elektronen. Es muß somit im Beharrungszustand die Gleichbewichtsbedingung bestehen:

$$N_0 + N_k \cdot \gamma (e^{\alpha L} - 1) = N_k. \qquad (4.18)$$

Es folgt

$$\left(\frac{i_0}{i} + \gamma\right) e^{\alpha L} = 1 + \gamma \qquad (4.19)$$

oder mit Vernachlässigung von γ (bzw. $e^{-\alpha L}$) gegen 1:

$$(i_0 + \gamma i)\, e^{\alpha L} = i. \qquad (4.20)$$

Bezeichnen wir wieder mit dem Index Null die Werte, die zum Durchschlag $i_0 \to 0$ gehören, so ist für merklichen Stromdurchgang i zu schreiben [vgl. (4. 2) und (4. 6)]

$$\left[i_0 + \gamma_0 i\left(1 + \frac{1}{\gamma_0}\frac{\partial \gamma}{\partial i} i - \frac{1}{\gamma_0}\frac{\partial \gamma}{\partial U}\Delta U\right)\right] e^{\alpha_0 L}\left[1 - \frac{1}{e^{\alpha_0 L}}\frac{\partial e^{\alpha L}}{\partial U}\Delta U\right] = i. \qquad (4.21)$$

Hieraus folgt mit einer geringfügigen Vernachlässigung, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma_0}\frac{\partial \gamma}{\partial i} = S_\gamma \frac{r}{E_0} = P_0; \quad U_0\left[\frac{1}{\gamma_0}\frac{\partial \gamma}{\partial U} + \frac{1}{e^{\alpha_0 L}} \cdot \frac{\partial e^{\alpha L}}{\partial U}\right] = L\alpha S_\alpha + S_\gamma = P_1; \\ &K_1 = \frac{P_0}{P_1}; \qquad K_2 = \frac{2}{P_1}\sqrt{P_0 e^{\alpha_0 L}}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

die Gleichung:

$$P_0 i^2 - i\frac{\Delta U}{U_0} \cdot P_1 = -i_0 e^{\alpha_0 L}. \qquad (4.23)$$

Diese quadratische Gleichung führt unmittelbar auf die hyperbolische Charaktesritik IV, aus der wiederum, worauf wir schon im ersten Abschnitt hinwiesen, die übrigen Gesetzmäßigkeiten folgen.

Gleichung (4. 23) ist eine vernünftige Erweiterung[1]) der bekannten Townsendschen Gleichung für die Stromdichte, die mit Vernachlässigung von $e^{-\alpha L}$ gegen 1 (vgl. oben) lautet:

$$i = \frac{i_0 e^{\alpha L}}{1 - \gamma e^{\alpha L}}. \qquad (4.24)$$

[1]) Vgl. W. Rogowski u. W. Fucks, a. a. O.

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung in der Nähe des Durchschlagspunktes ($\gamma_0 e^{\alpha_0 L} \doteq 1$), so erhält man nach (4. 24)

$$-i\frac{\Delta U}{U_0} P_1 = -i_0 e^{\alpha_0 L}. \tag{4.25}$$

Die Gleichung (4. 23) geht hieraus hervor durch Zufügen von $P_0 i^2$. Dieses quadratische Glied verdankt somit sein Vorhandensein der Änderung der Rückwirkung mit der Stromdichte. Ein Glied dieser Form tritt bei *allen* Einflüssen auf, die zu den Aussagen I bis IV führen.

Lichtelektrische Rückwirkung. Die physikalische Bedeutung der vorhin behandelten Rückwirkung durch positive Ionen ist freilich umstritten. Es ist daher nützlich, noch die in den Vordergrund getretene lichtelektrische Rückwirkung zu betrachten. Im homogenen Felde sei die Elektronenverteilung durch die Kurve *a* (Fig. 9) gegeben. Im schwach

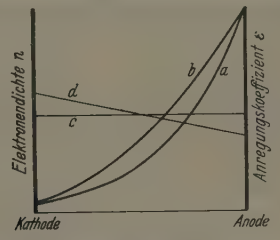


Fig. 9. Lichtquantenproduktion im homogenen und inhomogenen Feld. *a*) Elektronendichte im homogenen Feld, *b*) Elektronendichte im inhomogenen Feld, *c*) Anregungskoeffizient im inhomogenen Feld, *d*) Anregungskoeffizient im inhomogenen Feld. Die Lichtquantenerzeugung ist im homogenen Feld proportional den Kurven *a* und *c*, im inhomogenen Feld proportional dem Produkt der Kurven *b* und *d*.

verzerrten Feld liegt sie bei derselben Spannung ($\Delta U = 0$) durchweg höher (Kurve *b*). Erst bei der Anode erreicht der Elektronenstrom im verzerrten Feld denselben Wert, wie im homogenen [vgl. Ansatz (4. 12)]. Die Erzeugung der Lichtquanten wird daher, wenn man nur die Erhöhung der Elektronendichte in Betracht zieht, durch die Feldverzerrung verstärkt. Andererseits wird aber der Anregungskoeffizient, dessen Wert im homogenen Ausgangsfeld ε sein möge (Kurve *c*), im verzerrten Feld eine Funktion des Ortes. Er steigt an der Kathodenseite, fällt aber an der Anodenseite unter seinen ursprünglichen Wert ab (Kurve *d*). Die Gesamtzahl der Lichtquanten hängt vom Produkt der Kurven *b* und *d* ab. Ihr Unterschied gegenüber dem homogenen Feld (Produkt der Kurven *a* und *c*) nimmt daher offensichtlich positive und negative Beträge an (Differenzeffekt). Die genauere Rechnung[1]) zeigt jedoch, daß ein Überschuß für das inhomogene

[1]) W. Rogowski, ZS. f. Phys. **114**, 1, 1939.

Feld verbleibt, wenn nur das Verhältnis von ε/α mit sinkender Feldstärke steigt. Diese Bedingung ist nun aber nach allem, was man weiß, erfüllt. Die Zahl der Anregungen kann, Maxwellsche Verteilung vorausgesetzt, proportional $e^{-\frac{V_a}{V_m}}$, die Zahl der Ionisierungen proportional $e^{-\frac{V_i}{V_m}}$ gesetzt werden (V_a und V_i Anregungs- bzw. Ionisierungsspannung; V_m Spannung auf der mittleren freien Weglänge). Die Zahl der Ionisierungen nimmt also bei niedrigeren Spannungen (kleiner V_m-Wert: $V_i > V_a$) außerordentlich viel rascher ab, als die Zahl der Anregungen. Die Forderung, daß ε/α mit sinkender Spannung steigen soll, sollte daher bei mäßigen und niedrigen Feldstärken immer erfüllt sein.

Ist daher der Koeffizient der lichtelektrischen Rückwirkung für $i \to 0$ Γ_0, so ist er bei merklichem Stromdurchgang $\Gamma_0\,(1 + ki)$; (k = const). Der Rückwirkungskoeffizient wächst also proportional der Stromdichte, ganz wie wir dies bei der Rückwirkung durch positive Ionen gefunden hatten (vgl. oben). Hiermit müssen sich auch bei lichtelektrischer Rückwirkung der Form nach dieselben Gesetzmäßigkeiten wie bei Rückwirkung durch positive Ionen ergeben. Nur fallen die Konstanten anders aus[1].

Integrale Elektronenionisierung. In beiden vorigen Fällen begründen sich die Aussagen I bis IV durch Änderung der *Rückwirkung*. Hier sei des Grundsätzlichen wegen noch ein Beispiel angeführt, bei dem sie sich durch Änderung der *integralen Elektronenionisierung* ergeben. Es war früher gesagt worden, daß sich die integrale Elektronenionisierung nicht mit der Feldverzerrung ändere, wenn wir im verzerrten Feld der Feldstärke E denselben α-Wert zuordnen wie im homogenen Feld. In Wirklichkeit ist dies in aller Strenge nicht richtig. Denn wenn die Feldstärke an der Kathode steigt, so bringen die Elektronen an eine entfernte Stelle x eine höhere Geschwindigkeit mit, als es der Fall sein würde, wenn sie ein homogenes Feld durchlaufen hätten, dessen Größe mit der Feldstärke an der Stelle x übereinstimmt. Man muß, um den richtigen α-Wert bei der Stelle x zu erhalten, eine *höhere* Feldstärke einsetzen als E_x. Man muß die Feldstärke, auf die man den Ionisierungskoeffizienten bezieht, *rückdatieren*. Die Größe der Rückdatierung wächst offensichtlich mit der Feldverzerrung. Hieraus folgt, daß auch bei U = const die *integrale Elektronenionisierung streng genommen noch eine Funktion von i ist*. Der allgemeinere Ansatz (4. 11) bleibt somit in Kraft, wenn auch vorauszusehen ist, daß die mit i behaftete Änderung, die wir früher Null setzten, klein bleiben wird. Messungen

[1] Vgl. W. Rogowski, ZS. f. Phys. **114**, 1. 1939.

über die Größe dieser Korrektur liegen nicht vor. Unsere Betrachtungen treffen daher vielleicht nur einen unbedeutenden Einfluß. Trotzdem wollen wir ihn, des grundsätzlichen Charakters wegen, formelmäßig fassen. Man hat zu schreiben, wenn der Durchschlag überschritten wird und keine Bestrahlung erfolgt [vgl. (4, 11)]:

$$\gamma_0 e^{\alpha_0 L}\left(1 - \frac{\partial S}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial S}{\partial i} i\right) = 1. \tag{4.25}$$

Und hieraus ergibt sich in Durchschlagsnähe wieder die Aussage III mit

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \left(\frac{\frac{\partial S}{\partial i}}{e^{\alpha_0 L} S_\alpha L \alpha}\right) i = K_1'' i. \tag{4.26}$$

Daß nunmehr auch die übrigen Aussagen hergeleitet werden können, ist bei ihrer gegenseitigen Stützung der Aussagen I bis IV (vgl. Abschnitt 1) eine Selbstverständlichkeit.

c) Stufenprozesse. Die Schadesche Erweiterung der Townsendschen Theorie (vgl. Abschnitt 3) hat sich nicht halten können. Ihr eigentlicher Inhalt bestand in einem *quadratischen*, von der *Elektronendichte* n abhängigen Gliede, das die Ionisierungsgleichung ergänzen sollte (vgl. oben). An Stelle des alten Towsendschen Ansatzes:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \alpha n \tag{4.28}$$

(x Entfernung von der Kathode, α Ionisierungskoeffizient) sollte nach Schade gelten:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \alpha n + \sigma n^2. \tag{4.28}$$

Es herrscht Übereinstimmung darüber, daß dieser Ansatz — für kleine Ströme — zu den Rogowski-Fucks-Wallraffschen Gesetzmäßigkeiten führt. Bestritten wird indessen, daß er als richtige Beschreibung von Stufenprozessen zu gelten hat[1]). Bedeutet m die Dichte metastabiler Atome, so ist die Zahl der zugehörigen Ionisierungsprozesse metastabiler Atome untereinander naturgemäß proportional m^2. Man kommt daher bei diesem besonderen Stufenprozeß bei Beschreibung des Wachstums der Elektronenzahl je cm² und sec nicht auf den Ausdruck (4. 25) von Schade, sondern man hat zu schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} = \alpha n + \varkappa m^2 \qquad (\varkappa = \text{const}). \tag{4.29}$$

[1]) W. Rogowski, ZS. f. Phys. **115**, 157, 1940.

Diese Gleichung ist nicht ohne weiteres wie die Gleichung (4. 28) zu integrieren, da sie *zwei* unbekannte Größen enthält: n und m. Sie bedarf daher noch einer Ergänzung. Wir erhalten sie, wenn wir zum Ausdruck bringen, daß die metastabilen Atome ihrerseits durch Elektronenstoß entstehen und daß für ihre Dichte nicht nur die Zahl der Anregungsprozesse, sondern auch die Diffusion und die Lebensdauer von Wichtigkeit sind. Dies führt zu der folgenden Gleichung, die nun zu (4. 29) hinzutritt:

$$-D\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2} + km = \varepsilon n \tag{4.30}$$

(D Diffusionskoeffizient, $k = \frac{1}{T}$ reziproke Lebensdauer; Anregungskoeffizient).

Die ionisierende Wirkung von Stufenprozessen wird daher im allgemeinen nicht durch eine einzige Gleichung, sondern durch zwei (oder mehrere) miteinander gekoppelte Gleichungen beschrieben[1]).

Auch der Stoß zwischen Elektronen und angeregten Atomen führt auf zwei ähnliche Gleichungen wie (4. 29) und (4. 30). An Stelle von m^2 tritt in (4. 28) ein Glied mit $n \cdot m$ auf[2]).

Wie ordnen sich nunmehr die Stufenprozesse dem im Anfang dieses Abschnittes dargelegten Gedankengang ein?

Die einzelnen Ionisierungen durch Stoß metastabiler Atome untereinander sind *nicht der Elektronenionisierung* zuzuordnen. Diese Ionisierungen durch Stoß metastabiler Atome blitzen genau so auf wie die *Ionisierungen der räumlichen Rückwirkung* durch positive Ionen. Die so losgeschlagenen Anfangs- (Rückwirkungs-) Elektronen lösen neue Elektronenlawinen aus,

[1]) Eine analoge Auffassung ermöglicht auch eine Erklärung des Penning-Effektes durch erhöhte Rückwirkung (vgl. W. Rogowski, ZS. f. Phys. **115**, 257, 1940). Ich benutze die Gelegenheit, eine dort aufgeführte irrtümliche Zahlenrechnung richtigzustellen, auf die mich freundlichst Herr Penning aufmerksam machte. Hier war auf S. 286 angegeben, daß das Maximum des Ionisierungskoeffizienten der Gasmischung Neon-Argon bei $\sqrt{\sigma}$ liegen müsse (σ Bruchteil der Stöße, der ein metastabiles Atom vernichtet; Formel (9. 14), a. a. O.]. Es war weiter mitgeteilt worden, daß nach den Versuchen das Maximum beim Mischungsverhältnis von 0,01 liege. In Wirklichkeit liegt es aber bei 0,01%. Die dort mitgeteilte gute Übereinstimmung mit den Werten Meissners und Graffunders im Werte von σ besteht somit nicht. Der Grund für die Unstimmigkeit dürfte im Versagen der als Rechnungsgrundlage benutzten Mischungsregel (vgl. S. 288 a. a. O.) liegen. Die auf S. 289 angegebenen Werte für ε/α bleiben hiervon unberührt. — [2]) Ich verweise noch auf den Grenzfall verschwindender Diffusion $D = 0$, der ausführlich in der angeführten früheren Arbeit von mir dargelegt worden ist und auf die in diesem Falle bestehenden Beziehungen zwischen dem Schadeschen Ansatz und den obigen Ausführungen.

die nach dem *alten* Townsendschen Ionisierungsgesetz wachsen. Wir haben es bei der Ionisierung durch metastabile Atome wieder mit einer *Rückwirkung* zu tun, und zwar mit einer solchen, die anfänglich proportional mit der Stromdichte anwächst. Hiermit wird die Gesamtrückwirkung wieder von der Stromdichte abhängig und wir kommen so zu der bereits früher dargelegten Betrachtungsweise und zu unseren Gesetzmäßigkeiten wieder zurück. Allerdings mit neuen Werten der Konstanten. Auch das funktionale Verhalten der Konstanten hat sich gegen früher geändert. Die Herleitung der Konstanten erfordert in diesem Falle mehr Rechenarbeit wie früher. Wegen der Werte muß daher auf das angegebene Schrifttum verwiesen werden.

Bei denjenigen Stufenprozessen, die durch Stoß von Elektronen gegen angeregte Atome (Moleküle) entstehen, müssen wir folgendermaßen schließen: Die angeregten Atome nehmen im Beharrungszustand eine *bestimmte Verteilung* im Gas an. Das stromdurchflossene Gas wird somit zur *Gasmischung* von unangeregten und angeregten Teilchen. Der Ionisierungskoeffizient α wird dadurch eine Funktion des Ortes. Wir können ihn aber durch einen mittleren Ionisierungskoeffizienten ersetzen. Dieser *mittlere Ionisierungskoeffizient* erweist sich nunmehr wieder als *abhängig von der Stromdichte*, da mit der Stromdichte die angeregten Atome zahlreicher werden. So kommen wir wieder zu einer Abhängigkeit des Ionisierungsanstiegs mit der Stromdichte und zu ähnlichen Betrachtungen, wie wir sie bereits im vorigen Teilabschnitt [vgl. Formel (11), (25) und (26) dieses Abschnitts] dargelegt haben.

5. Rückblick. Im Schrifttum wird vielfach die Begünstigung einer Entladung durch Raumladung der Begünstigung der Entladung durch Stromdichte gegenübergestellt. Aber auch die Raumladung ist eine Folge der entstehenden Stromdichte. Auch bei ihr tritt bei der formelmäßigen Beschreibung ein von der Stromdichte abhängiges Glied auf. Man sollte daher nicht Raumladung und Stromdichte, sondern Raumladung und Stufenprozesse einander gegenüberstellen.

Die Townsendsche Theorie rückt im wesentlichen nur zwei Größen in den Vordergrund: die integrale Elektronenionisierung und den Rückwirkungskoeffizienten. Beide hängen bei Townsend lediglich von der Spannung ab. Indem wir beide noch als linear veränderlich mit der Stromdichte ansehen (vgl. oben), tun wir alles, was im Rahmen dieser Theorie möglich ist, um die Wirkung der Stromdichte in erster Näherung zu berücksichtigen. Eine andere Handhabe gibt diese Theorie nicht.

Es erscheint durch diese Erweiterung jedesmal die Gleichung (4. 23) und in ihr das charakteristische quadratische Glied $P_0 i^2$. Ob wir dieses Glied durch Raumladung oder Stufenprozesse begründen, ist für die Vorstellung und für die Größe der Koeffizienten und für ihr funktionales Verhalten von Wichtigkeit. Für die Form der Gesetzmäßigkeiten aber ohne Belang. Indem Rogowski-Fucks seinerzeit den Rückwirkungskoeffizienten der positiven Ionisierung über die Raumladung als abhängig von der Stromdichte ansetzten, mußten sie erstmalig auf die charakteristische Erweiterung der Theorie und auf die richtige Form der Gesetzmäßigkeiten stoßen. Damit haben jene Verfasser den entscheidenden Schritt vorwärts getan.

Es kann sein, daß die positive Ionisierung, die bis vor kurzem als Rückwirkung im Vordergrund gestanden hat, in einer Reihe von Fällen an Bedeutung zurücktritt. Aber selbst dann würden die genannten Verfasser, fußend auf den Anschauungen eines Zeitabschnittes unseres Wissens, den Versuch vor eine vernünftige Frage gestellt und ihm die Auffindung der den Durchschlag charakterisierenden Gesetze ermöglicht haben. Erst wenn der Versuch gegen den Versuch aufstehen und das im Abschnitt 2 zusammengetragene eindrucksvolle Beweismaterial widerlegen sollte, erst dann würden unsere Aussagen I bis IV ihre Rolle ausgespielt haben.

(Aus dem Inst. f. theoret. Physik der Deutschen Karls-Univ. und Techn. Hochsch. in Prag und dem Labor. f. Elektronenoptik Siemens & Halske A. G., Berlin-Siemensstadt.)

Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1+(z/a)^2}$.

Von **Walter Glaser** in Prag.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1940.)

Im folgenden sollen für ein Magnetfeld, welches den in der Praxis bei den hochauflösenden Elektronenmikroskopen verwendeten typischen Verlauf zeigt, die Abbildungsgleichung, die Vergrößerung, die Anzahl der Zwischenbilder, die Farbabweichung und der Öffnungsfehler ohne Vernachlässigungen als Funktion der Systemparameter explizit berechnet und diskutiert werden. Insbesondere sollen der hinsichtlich des Farb- und Öffnungsfehlers günstigste Dingort und Parameterwert bestimmt werden. Ferner soll der Einfluß einer Feldunsymmetrie auf die optischen Konstanten und insbesondere den Farb- und Öffnungsfehler untersucht werden.

I. Allgemeine Integration der Bahngleichung.

Die im Labor. f. Elektronenoptik der Siemens & Halske A. G. in den Objektiven des Übermikroskops empirisch ausgemessenen Magnetfelder [1]) haben längs der Achse meist einen typisch glockenförmigen Verlauf nach Fig. 1 und können daher bei symmetrischem Feldverlauf durch einen Ausdruck der Gestalt

$$H(z) = \frac{H_0}{[1+(z/a)^2]^{\mu}} \qquad (1)$$

wiedergegeben werden. Der Exponent μ ist dabei so zu bestimmen, daß sich die Kurve (1) dem empirischen Feldverlauf möglichst gut anschließt. Die maximale Feldstärke H_0 in der Feldmitte und die durch die Halbwertsbreite d gemäß

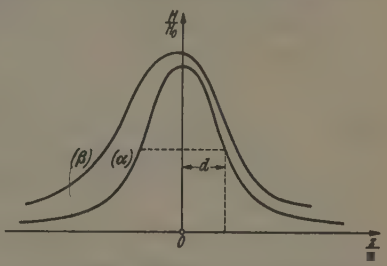


Fig. 1. Typischer Feldverlauf in den Objektiven des Übermikroskops (α) bei symmetrischer, (β) bei unsymmetrischer Polschuhanordnung.

$$d = a\sqrt{\sqrt[\mu]{2}-1} \qquad (2)$$

bestimmte „Länge" a ist so zu wählen, daß Feldmaximum H_0 und die Halbwertsbreite d von (1) mit den entsprechenden Größen des empirischen

[1]) Vgl. J. Dosse, ZS. f. Phys., erscheint demnächst.

Feldes übereinstimmen. (Für einen ungekapselten Kreisstrom ist z. B. der Exponent $\mu = {}^3/_2$ zu setzen.)

Die achsennahen Elektronenbahnen, welche allgemein der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{e}{8mU} H^2(z)\, r \tag{3}$$

genügen, sind in unserem Falle durch

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{e H_0^2}{8mU} \frac{r}{[1+(z/a)^2]^{2\mu}} \tag{4}$$

bestimmt.

Mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r}{a}, \quad x = \frac{z}{a}, \\ k^2 &= \frac{e H_0^2 a^2}{8mU} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

erhält sie folgende dimensionslose Gestalt:

$$y'' = -\frac{k^2 y}{(1+x^2)^{2\mu}}. \tag{6}$$

Um sie zu integrieren bzw. auf einen bekannten Typus von Differentialgleichungen zurückzuführen, setze man zunächst

$$x = \operatorname{ctg}\varphi, \quad \text{somit} \quad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^2\varphi} \quad \text{und} \quad 1 + x^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi};$$

damit erhält man

$$y''(\varphi) + 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot y'(\varphi) + k^2 \sin^{4(\mu-1)}\varphi \cdot y = 0.$$

Durch die weitere Substitution

$$y = e^{-\int \operatorname{ctg}\varphi\, \mathrm{d}\varphi} v(\varphi) = \frac{v(\varphi)}{\sin\varphi} = \sqrt{1+x^2}\, v(\varphi) \tag{6a}$$

ergibt sich

$$y'' + 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot y' = \left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi\right) e^{-\int \operatorname{ctg}\varphi\, \mathrm{d}\varphi} v(\varphi) + e^{-\int \operatorname{ctg}\varphi\, \mathrm{d}\varphi} v''(\varphi),$$

und wegen

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} - \operatorname{ctg}^2\varphi = 1$$

geht somit die Gleichung für $v(\varphi)$ über in

$$v''(\varphi) + (1 + k^2 \sin^{4(\mu-1)}\varphi)\, v(\varphi) = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung hat die Gestalt

$$v''(\varphi) + J(\varphi)\, v(\varphi) = 0, \tag{8}$$

wobei $J(\varphi) = 1 + k^2 \sin^{4(\mu-1)}\varphi$ eine periodische Funktion von φ mit der Periode π ist. Damit haben wir die Differentialgleichung der Elektronen-

bahnen auf eine Hillsche Differentialgleichung zurückgeführt, deren Theorie weitgehend entwickelt ist und die in der Astronomie bei der Mondbewegung, in der Elektronentheorie der Metalle und in vielen anderen Gebieten eine wichtige Rolle spielt[1]).

Im Falle des Kreisstromes ist $2\mu = 8$, und $J(\varphi)$ kann in der Gestalt

$$J(\varphi) = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 - \tfrac{1}{2} k^2 \cos 2\varphi$$

geschrieben werden. Mit den Abkürzungen

$$\lambda = 1 + \tfrac{1}{2} k^2, \quad \tfrac{1}{2} k^2 = h^2 \tag{9}$$

lautet somit die umgeformte Differentialgleichung (7) der Elektronenbahnen

$$v''(\varphi) + (\lambda - h^2 \cos 2\varphi)\, v(\varphi) = 0. \tag{10}$$

Es hat sich also eine Mathieusche Differentialgleichung ergeben, die auch in anderen Gebieten der Physik auftritt und insbesondere für die Theorie der Schwingungen einer elliptischen Membran grundlegende Bedeutung hat[2]).

Die allgemeine Anwendung der Theorie der Hillschen Differentialgleichung auf das hier vorliegende Problem wollen wir einer späteren Arbeit vorbehalten. Hier wollen wir uns nur mit einem Sonderfall befassen, welcher jedoch bereits alle typischen Eigenschaften der Abbildung zu erkennen und erstmalig streng zu berechnen gestattet.

II. Der Sonderfall $\mu = 1$.

1. Die Gaußsche Bahn. Besonders einfach wird nämlich die umgeformte Bahngleichung (7) für $\mu = 1$, also für den Feldtypus

$$H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}, \tag{11}$$

welcher in Fig. 2 und 7 dargestellt ist. In diesem Falle wird die Funktion $J(\varphi)$ überhaupt konstant und die Differentialgleichung (7) lautet:

$$v''(\varphi) = -(1 + k^2)\, v(\varphi). \tag{12}$$

Sie ist somit unmittelbar durch die beiden partikulären Integrale

$$v = \frac{\sin \sqrt{1 + k^2}\, \varphi}{\cos \sqrt{1 + k^2}\, \varphi} \tag{13}$$

[1]) Vgl. hierzu M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. (Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete.) Berlin 1932. — [2]) M. J. O. Strutt, a. a. O.

zu integrieren. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4) mit $\mu = 1$, also die Elektronenbahnen im Feld (11), lautet daher mit (5) und (6a)

$$y = \sqrt{1 + x^2}\,(C_1 \sin \sqrt{1 + k^2}\,\operatorname{arc\,ctg} x + C_2 \cos \sqrt{1 + k^2}\,\operatorname{arc\,ctg} x), \quad (14)$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Integrationskonstanten darstellen. Unsere weiteren Betrachtungen wollen wir jedoch an die Gestalt

$$y = \frac{1}{\sin \varphi}\,(C_1 \sin \sqrt{1 + k^2}\,\varphi + C_2 \cos \sqrt{1 + k^2}\,\varphi) \quad (15)$$

anschließen, indem wir uns stets durch die Gleichung

$$x = \operatorname{ctg} \varphi \quad (16)$$

die Koordinate x auf den Winkel φ umgerechnet denken. Das hat den Vorteil, daß wir für die Variable φ bloß die endlichen Werte zwischen 0

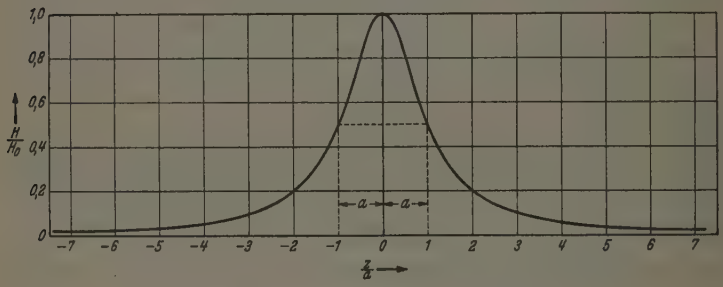


Fig. 2. Feldverlauf gemäß $H = \dfrac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^4}$.

und π brauchen, um den ganzen Wertbereich von x zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu erfassen.

Mit zwei anderen Integrationskonstanten C_1, C_2 und der Abkürzung

$$\omega^2 = k^2 + 1 = \frac{e\,H_0^2\,a^2}{8\,m\,U} + 1 \quad (17)$$

können wir das allgemeine Integral in folgender Gestalt schreiben:

$$y = C_1 \frac{\sin \omega\,(\varphi + C_2)}{\sin \varphi}. \quad (18)$$

Es soll insbesondere ein von rechts einfallender Parallelstrahl betrachtet werden. Dem Werte $x = \infty$ entspricht nach (16) $\varphi = +0$. Damit y für $x = \infty$ ($\varphi = 0$) endlich bleibt, muß daher die Integrationskonstante C_2 Null sein. Damit wird

$$y = C_1 \frac{\sin \omega \varphi}{\sin \varphi} \quad (19)$$

und ωC_1 ist der Wert von y für $x = \infty$ ($\varphi = 0$). Wir überzeugen uns noch, daß die Ableitung $y'(x)$ für $x \to \infty$ wirklich verschwindet, also die Elektronenbahn (19) im Unendlichen parallel der x-Achse ist. Man hat

$$y' = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = C_1(\sin\omega\varphi\cos\varphi - \omega\sin\varphi\cos\omega\varphi), \tag{20}$$

und für $\varphi = 0$, also $x \to \infty$ wird daher $y'(\infty) = 0$.

(19) stellt somit tatsächlich den in der Einfallshöhe ωC_1 von rechts einfallenden Parallelstrahl dar.

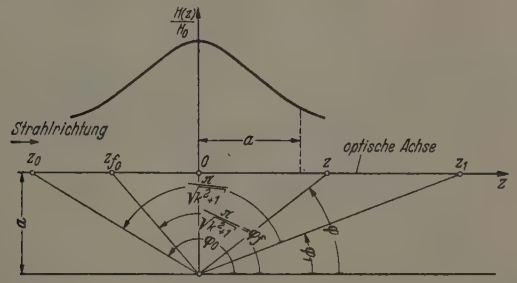


Fig. 3. Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Abszisse z und dem Hilfswinkel φ.

Die Darstellung der Bahn mittels der Variablen φ kann man sich an Hand der Fig. 3 veranschaulichen, wo der zu jedem z-Wert gehörige φ-Wert eingetragen ist, welche miteinander in Beziehung stehen:

$$z = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi. \tag{21}$$

Die Schnittpunkte des achsenparallelen Strahles (19) mit der optischen Achse nennen wir dingseitige Brennpunkte. Sie sind nach (19) durch

$$\sin\omega\varphi_f = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_f = n\frac{\pi}{\omega}\,(n = +1, +2, \ldots) \tag{22}$$

gegeben. Die Koordinaten der dingseitigen Brennpunkte lauten somit nach (21)

$$\boxed{z_{f_0}(n) = a\,\mathrm{ctg}\,n\frac{\pi}{\omega},\ (n = 1, 2, \ldots).} \tag{23}$$

Der erste Brennpunkt ist derjenige, welcher dem Unendlichen am nächsten liegt, also ausgedrückt durch φ dem Werte $+0$ am nächsten liegt (Fig. 3). Er ist daher durch $n = 1$ bestimmt:

$$\boxed{z_{f_0} = a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}.} \tag{24}$$

Für die Brennweite f findet man nach Fig. 4 und Gleichung (20) und (22)

$$C_1 \omega = f \operatorname{tg} \alpha = f \frac{dy}{dz}_{\varphi = \varphi_f} = -\frac{f}{a} C_1 \omega \sin n \frac{\pi}{\omega} \cos n \pi,$$

also

$$\boxed{\frac{a}{f} = (-1)^{n-1} \sin n \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}}.} \tag{25}$$

Die erste Brennweite ist daher durch

$$\boxed{\frac{a}{f} = \sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} \tag{26}$$

gegeben. Die Beziehung (26) zeigt, daß die kleinste Brennweite, die überhaupt erreicht werden kann, gleich der Halbwertsbreite a ist. Sie ergibt sich für den Parameterwert $k^2 = 8$, also für

$$\frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U} = 8. \tag{27}$$

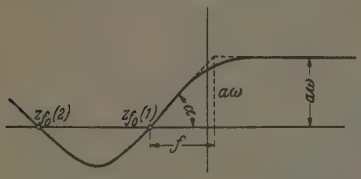


Fig. 4. Zur Bestimmung der Brennweite.

Die zugehörige Brennpunktslage ist nach (24) $z_{f_0} = 0$, d. h. die Feldmitte. Beschränkt man sich auf die Benutzung des ersten Brennpunktes ($n = 1$), so haben Brennweite f/a und Brennpunktslage z_f/a den in Fig. 5 dargestellten Verlauf, der durch die Darstellung der Bahnen in der gleichen Figur und in Fig. 7 noch veranschaulicht wird.

Im weiteren soll der allgemeine Zusammenhang zwischen Ding- und Bildort, also die „Abbildungsgleichung" hergeleitet werden. Dabei werden sich die obigen Ausdrücke für die Brennpunkte als Sonderfälle ergeben, nämlich als die dem unendlich fernen Bildpunkt entsprechenden Dingpunkte.

Im Anhang wird gezeigt, wie man zur allgemeinen Abbildungsgleichung für krummlinige Elektronenstrahlen gelangt. Sind nämlich $\varrho(z)$ und $\sigma(z)$ zwei beliebige unabhängige Lösungen der Differentialgleichung für die achsennahen Strahlen eines rotationssymmetrischen elektromagnetischen Feldes, so ist der Zusammenhang zwischen Dingort z_0 und Bildort z_1 gegeben durch die Gleichung

$$\varrho(z_0)\,\sigma(z_1) - \varrho(z_1)\,\sigma(z_0) = 0. \tag{28}$$

In unserem Falle ist

$$\varrho = C_1 \frac{\sin \omega \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad \sigma = C_2 \frac{\cos \omega \varphi}{\sin \varphi}. \tag{29}$$

(28) erhält daher die Gestalt

$$\sin \omega (\varphi_1 - \varphi_0) = 0,$$

d. h.

$$\varphi_0 - \varphi_1 = n \frac{\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{30}$$

φ_1 bestimmt das n-te Bild ($n - 1$ Zwischenbilder). In Fig. 8 kann man sich wieder den Zusammenhang zwischen φ_0 und φ_1 gut veranschaulichen.

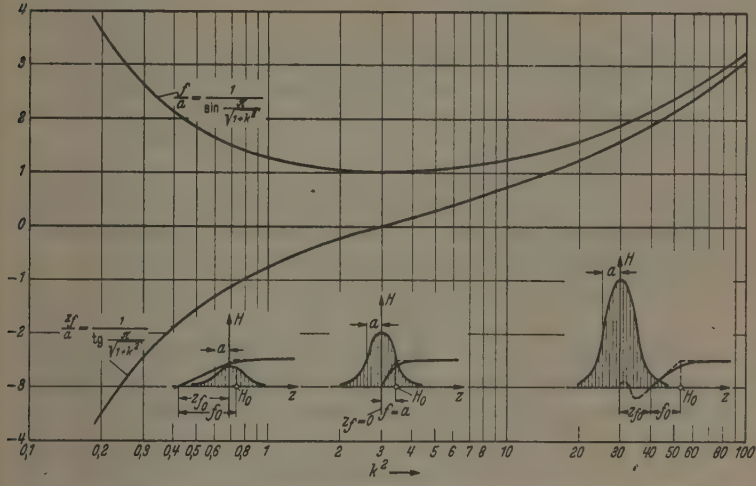


Fig. 5. Brennweite f und Brennpunktslage z_f als Funktion des Systemparameters

$$k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}.$$

Man hat einfach vom Bogen φ_0 den Bogen $\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$ n-mal abzutragen, um das n-te Bild zu erhalten. (In der Figur ist $n = 1$.) Führt man nach (21) z statt φ ein, so ergibt sich

$$z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0 = a \operatorname{ctg}\left(\varphi_1 + n \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{a \operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega} - a}{\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit a multipliziert, nach (21)

$$z_0 = \frac{z_1 a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega} - a^2}{z_1 + a \operatorname{ctg} n \frac{\pi}{\omega}}.$$

Dies kann man weiter umformen

$$z_0 - a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega} = -a^2 \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 n\frac{\pi}{\omega}}{z_1 + a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega}},$$

oder

$$\left(z_0 - a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega}\right)\left(z_1 + a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{a^2}{\sin^2 n\frac{\pi}{\omega}}.$$

Setzt man daher

$$\boxed{z_{f_0} = a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega},\quad z_{f_1} = -a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega},\quad f_0 = \frac{a}{\sin n\frac{\pi}{\omega}},\quad f_1 = -\frac{a}{\sin n\frac{\pi}{\omega}},} \tag{31}$$

und weiter

$$\boxed{Z_1 = z_1 - z_{f_1},\quad Z_0 = z_0 - z_{f_0},} \tag{32}$$

so gilt zwischen Z_0 und Z_1, d. h. den auf die entsprechenden Brennpunkte bezogenen Ding- und Bildkoordinaten die Beziehung:

$$\boxed{Z_0 Z_1 = f_0 f_1.} \tag{33}$$

2. Die Vergrößerung. Wir kommen nun zur Bestimmung der Vergrößerung V. Wie im Anhang gezeigt wird, ist diese durch zwei beliebige Elektronenbahnen $\varrho(z)$ und $\sigma(z)$ auf folgende Art gegeben:

$$V = \frac{\sigma(z_1)}{\sigma(z_0)}. \tag{34}$$

In unserem Falle ist daher die Vergrößerung im n-ten Bildpunkt nach (29) durch

$$V_n = \frac{\cos \omega \varphi_1}{\sin \varphi_1} \frac{\sin \varphi_0}{\cos \omega \varphi_0} \tag{34a}$$

bestimmt. Wenn man aus (30) einsetzt, erhält man

$$V_n = \frac{\cos(\omega \varphi_0 - n\pi)}{\sin\left(\varphi_0 - n\frac{\pi}{\omega}\right)} \frac{\sin \varphi_0}{\cos \omega \varphi_0} = (-1)^n \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos n\frac{\pi}{\omega} - \cos \varphi_0 \sin n\frac{\pi}{\omega}}.$$

Wenn man weiter im Nenner $\sin n\frac{\pi}{\omega}$ heraushebt und aus (21) einsetzt:

$$V_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{z_0 - a \operatorname{ctg} n\frac{\pi}{\omega}} \cdot \frac{a}{\sin n\frac{\pi}{\omega}}.$$

Auf Grund von (31) und (32) ergibt sich somit

$$\boxed{V_n = (-1)^{n-1} \frac{f_0}{Z_0} = (-1)^{n-1} \frac{Z_1}{f_1}.} \tag{35}$$

Die Vergrößerung im ersten Bild ($n = 1$) ist also

$$\boxed{V = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z_1}{f_1},} \tag{36}$$

wobei die Größen Z_0, Z_1, f_0 und f_1 durch die Gleichungen (31), (32) und (21) bestimmt sind. Auf Grund von (24) und (26) gilt für alle k^2-Werte $|f| > |z_f|$, d. h. die beiden Hauptebenen liegen überschlagen, wie übrigens in einer experimentellen Untersuchung von E. Ruska schon 1934 festgestellt worden ist[1]).

Es hat sich somit die überraschende Tatsache ergeben, daß auch in diesem allgemeinen Falle eines vollkommen krummlinigen Strahlenganges, wo also Ding- und Bildstrahl gar nicht voneinander unterschieden werden können und daher auch nicht so wie in der gewöhnlichen Optik eine Geradenzuordnung darstellen, trotzdem die Abbildungsgleichungen (33) und (36) der gewöhnlichen Optik gelten. Durch (36) sind auch die Hauptebenen als konjugierte Ebenen mit der Vergrößerung 1 bestimmt und es läßt sich damit auch die bekannte Listingsche Bildkonstruktion nach Fig. 6 A und B mittels der geradlinigen (fiktiven) Hauptstrahlen I und II übertragen, obwohl diese beiden geradlinigen Hauptstrahlen mit dem tatsächlichen krummlinigen Strahlengang (durch die gestrichelten Linien angedeutet) außer den Schnittpunkten gar nichts gemeinsam haben, und der gesamte Feldeinfluß kann so innerhalb des Bereiches der Gaußschen Dioptrik durch die beiden Hauptebenen und Brennpunkte ersetzt werden. Für die Koordinaten der Hauptpunkte ergibt sich aus (31), (32) und (36) ($V = 1$)

$$\boxed{z_{H_0} = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{k^2+1}}, \quad z_{H_1} = -a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\sqrt{k^2+1}}.} \tag{36a}$$

Die Werte z_{H_0}/a sind in Tabelle 1 angegeben und in Fig. 6 A in ihrer Abhängigkeit von k^2 kurvenmäßig dargestellt.

Hier erhebt sich sogleich folgende Frage: Ist das Feld (11) das einzige, für welches im ganzen Bereich die Linsengleichung und Vergrößerungsformel der gewöhnlichen Optik streng gilt, oder gibt es noch andere Felder mit dieser Eigenschaft? Mathematisch heißt dies: Für welche Felder $H(z)$ von (3) besteht zwischen den aufeinanderfolgenden Nullstellen der zugehörigen Bahnkurven ein projektiver Zusammenhang? Da eine derartige Abbildung durch drei Angaben, nämlich die Brennweite und die Lage der

[1]) E. Ruska, ZS. f. Phys. **89**, 90 ff., 1934.

beiden Brennpunkte bestimmt ist, hat die durch ein derartiges Feld bestimmte Abbildung die physikalische Eigenschaft, daß man die ganze Abbildung für alle beliebigen Punkte kennt, wenn man sie für *drei* Punkte bestimmt hat. Die Aufgabe ist nun die, daß man der Gestalt des Feldes $H(z)$

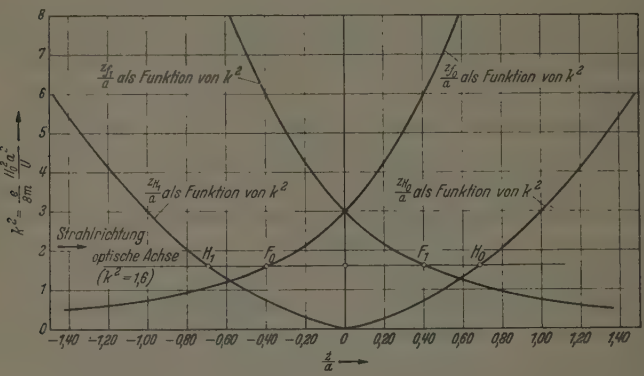


Fig. 6 A. Haupt- und Brennpunktslagen als Funktion des Systemparameters k^2.

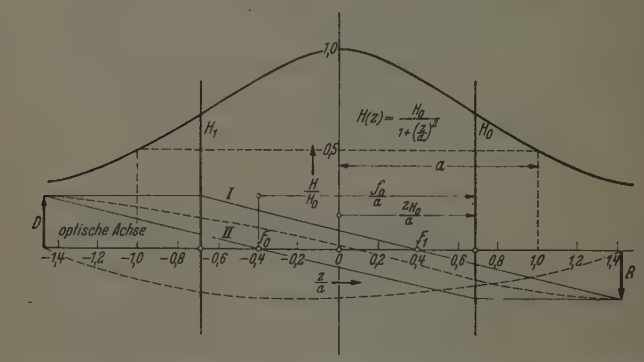


Fig. 6 B. Die Listingsche Bildkonstruktion mittels Brennpunkten und Hauptebenen für $k^2 = 1{,}6$.

unmittelbar ansehen kann, ob die durch sie vermittelte Abbildung diese Eigenschaft hat oder nicht. In einer demnächst erscheinenden Arbeit von Lammel und dem Verfasser sollen alle elektrischen und magnetischen Felder, für welche die gewöhnliche Abbildungs- und Vergrößerungsgleichung gilt, angegeben werden.

3. Die Zahl der Zwischenbilder. Wir wollen nun noch die Zahl der Zwischenbilder als Funktion des Parameters k^2 bestimmen. Wie aus dem obigen hervorgeht, kommt alles auf die Größe des Winkels

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}} = \pi\left(1 + \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 a^2}{U}\right)^{-1/2} \tag{37}$$

an. Nach Fig. 3 hat man den Winkel φ_0, der dem Dingpunkt entspricht, immer um π/ω zu verkleinern oder zu vergrößern, um das entsprechende Bild zu erhalten. Man erkennt daraus: Führt die Verkleinerung (Vergrößerung) von φ_0 um den Winkel π/ω zu Null (π), so liegt das Bild im Unendlichen und φ_0 wäre der Brennpunkt. In diesem Falle ist $\pi\,\omega$ in φ_0 ($\pi - \varphi_0$) einmal enthalten. Ist π/ω in φ_0 ($\pi - \varphi_0$) N-mal enthalten, oder genauer: ist $\frac{\varphi_0\,\omega}{\pi}\left(\frac{\pi-\varphi_0}{\pi}\,\omega\right)$ größer als die ganze Zahl N und kleiner als die ganze Zahl $N+1$, so erhält man N Bilder; ist $\frac{\varphi_0\,\omega}{\pi}\left(\frac{\pi-\varphi_0}{\pi}\,\omega\right)$ gerade gleich N, so ergeben sich $N-1$ Bilder im Endlichen (da das eine im Unendlichen liegt). Der unendlichferne Punkt ($\varphi_0 = 0$) hat somit N Bilder (Brennpunkte), wenn $N < \omega < N+1$, oder

$$\boxed{(N+1)(N-1) < \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 a^2}{U} < (N+2)N.} \tag{38}$$

Liegt daher $\omega = \sqrt{1+k^2}$ zwischen 1 und 2, so treten nur einfache Bilder auf. Es ist also

$$\boxed{0 < \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 a^2}{U} < 3} \tag{39}$$

die Bedingung dafür, daß nur einfache Bilder auftreten. Diese Bedingung (39) ist bis jetzt in der Praxis immer erfüllt.

4. Die Buschsche Näherungsformel für die Brennweite. Zur Veranschaulichung des Vorgetragenen sind in Fig. 7 einige Elektronenbahnen mit der Einfallshöhe 1 für die Parameterwerte $\omega = 1{,}1$; $\omega = 1.3$; $\omega = 1.6$; $\omega = 2$; $\omega = 2{,}5$; $\omega = 3$ und $\omega = 3{,}5$ nach der Formel

$$y = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\sin\omega\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{mit} \quad z = \operatorname{ctg}\varphi \tag{40}$$

von Dosse gezeichnet worden. Zusammenfassend können wir nochmals feststellen: Um die gefundenen Beziehungen der Gaußschen Dioptrik für ein empirisch ausgemessenes Feld zu benutzen, müssen wir den Feldmessungen die Halbwertsbreite a und die maximale Feldstärke bzw. Induktion H_0 in der Feldmitte entnehmen. Mit der bekannten Beschleunigungs-

spannung U können wir also den Parameterwert k^2 nach (5) berechnen, welchen wir in die Formeln (23), (24), (26) und (31) einzusetzen haben. Die auf diese Weise bestimmten k^2-Werte liegen derzeit bei den starken

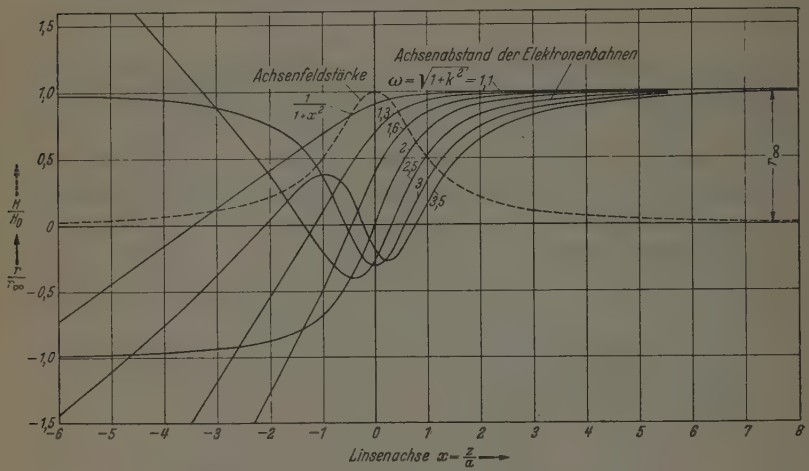


Fig. 7. In der Einfallshöhe 1 von rechts einfallende Elektronenbahnen für verschiedene Werte des Parameters $\omega = \sqrt{1+k^2}$ im Feld $H = \dfrac{H_0}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}$.

Linsen des Übermikroskops zwischen 1 und 2. Die strengen, nach Formel (26) berechneten Werte der Brechkraft a/f sind in Fig. 8, Kurve I, dargestellt. Ist $k^2 \ll 1$, so kann man (26) nach k entwickeln und erhält so

$$\frac{a}{f} = \frac{\pi}{2} k^2. \tag{41}$$

Dieser Ausdruck für a/f ergibt sich auch durch Anwendung der zuerst von Busch[1]) angegebenen Näherungsformel für die Brennweite

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8\,m\,U} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2 \,\mathrm{d}\,z, \tag{42}$$

wenn man hierin für H^2 aus (11) einsetzt. Die Buschsche Formel entspricht also einer Näherung für unendlich kleine Werte des Parameters k^2. In Fig. 8 haben wir neben der Darstellung der Brechkraft nach der strengen Formel (26) in Kurve I auch die auf Grund der Buschschen Formel (42)

[1]) H. Busch, Arch. f. Elektrotechn. **18**, 553, 1927.

folgenden Werte (41) in II kurvenmäßig dargestellt. Man erkennt, daß für den noch verhältnismäßig kleinen Parameterwert $k^2 = 0{,}2$, welcher also noch fünf bis zehnmal kleiner ist als die in Praxis verwendeten, der Fehler der Formel (42) bereits 16% beträgt. Für das Gebiet der Übermikroskopie ($k^2 = 1 \ldots 2$) führt sie zu ganz falschen Werten (Fehler bis 300%). Aus der Buschschen Formel (42) kann man daher keine Schlüsse

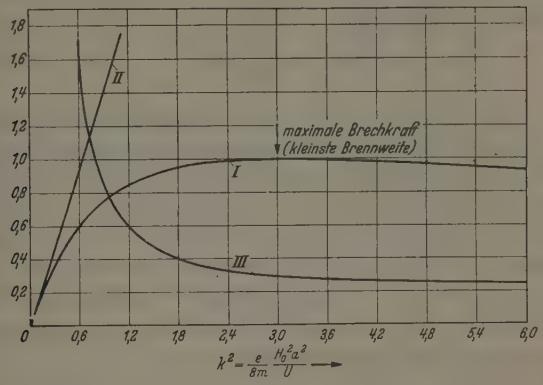


Fig. 8. I. Brechkraft a/f des Feldes $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$ streng berechnet. II. Brechkraft a/f des gleichen Feldes nach der Buschschen Näherungsformel berechnet. III. Die Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{O}}/a$ für hohe Vergrößerung als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}$.

für die Verhältnisse ziehen, wie sie beim Übermikroskop in der Regel vorliegen[1]). Dies gilt auch für die daraus hergeleiteten technischen Dimensionierungsformeln[2]), wie bereits von E. Ruska [3]) experimentell gezeigt worden ist.

5. Die Bilddrehung. Im magnetischen Feld ist bekanntlich das Gaußsche Bild um den Winkel

$$\psi = \sqrt{\frac{e}{8mU}} \int_{z_0}^{z} H \, dz \qquad (45)$$

[1]) Damit soll nicht behauptet werden, daß sie nicht für schwächere Linsen, wie sie z. B. bei Braunschen Röhren vielfach verwendet werden, gute Dienste leisten kann. — [2]) Z. B. E. Ruska u. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **12**, 394, 1931; die dort gegebene Formel ist neuerdings durch v. Ardenne (Elektronen-Übermikroskopie, Berlin 1940, S. 15) auch für Übermikroskoplinsen in etwas abgeänderter Form herangezogen worden, liefert aber in dieser Form bis zu 35% zu kleine Werte für die Brennweite. — [3]) E. Ruska, ZS. f. Phys. **89**, 90, 1934, insbes. 121, Fig. 14.

gegenüber dem Ding gedreht. Die Integration ist dabei von Dingort z_0 zum Bildort z_1 zu erstrecken. Wenn wir für $H(z)$ nach (11) in (45) einsetzen und wieder den Hilfswinkel φ einführen, ergibt sich

$$\psi = k(\varphi_0 - \varphi_1). \tag{46}$$

(Damit hat sich zugleich eine einfache physikalische Deutung unseres Hilfswinkels φ ergeben.) Auf Grund der Abbildungsgleichung (30) erhält man also für die Bilddrehung

$$\psi = n \frac{\pi k}{\sqrt{k^2+1}}. \tag{47}$$

Man könnte sich denken, daß die Messung des Bilddrehungswinkels (47) einmal eine direkte Methode zur Bestimmung von k ergibt, so daß man alle Formeln statt durch k durch den Bilddrehungswinkel ψ ausdrücken könnte.

6. Die Farbabweichung (der chromatische Fehler). Unter der Farbabweichung versteht man bekanntlich den Einfluß einer Geschwindigkeits-Inhomogenität der abbildenden Elektronenstrahlen auf das Bild. Ist $\Delta U/U$ der relative Spielraum der Voltgeschwindigkeit der Elektronen und ist α die Strahlapertur, so ist der durch die Vergrößerung V dividierte Radius des chromatischen Zerstreuungsscheibchens durch

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \int_{z_0}^{z_1} y'^2 \, \mathrm{d}z \tag{48}$$

gegeben[1]), wobei $y(z)$ ein Strahl ist, welcher im Dingpunkt z_0 die Achse schneidet und hier außer $y(z_0) = 0$ der Bedingung $y'(z_0) = 1$ genügt. Die Integration ist vom Dingort z_0 zum Bildort z_1 zu erstrecken. Statt über z wollen wir lieber über φ integrieren. Wir setzen

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \cdot C_F, \tag{49}$$

wobei also die Farbfehlerkonstante C_F durch

$$C_F = \int_{z_0}^{z_1} y'^2 \, \mathrm{d}z \tag{50}$$

definiert ist. Die Elektronenbahn, welche im Punkte $z_0 = a \operatorname{ctg} \varphi_0$ verschwindet, ist nach (18) durch

$$y = C_1 \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi$$

[1]) Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. **116**, 56, 1940, Gleichung (21).

gegeben. Aus $y'(z_0) = 1$ bestimmt sich nach (20) C_1, so daß die Bahn $y(z)$ die Gestalt hat

$$y(z) = \frac{a}{\omega \sin \varphi_0} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi. \tag{51}$$

Wenn man daher

$$y'(z) = \frac{1}{\sin \varphi_0} \left[\cos \omega (\varphi - \varphi_0) \sin \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi \right] \tag{52}$$

in (50) einführt, ergibt sich wegen $\mathrm{d}z = -\frac{a \, \mathrm{d}\varphi}{\sin^2 \varphi}$

$$C_F = \frac{a}{\sin^2 \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0) - \cos^2 \omega (\varphi - \varphi_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega} \frac{\sin 2\omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin^2 \varphi} \right] \mathrm{d}\varphi,$$

oder

$$C_F/a = \frac{1}{\sin^2 \varphi_0} (J + K), \tag{52a}$$

wobei gesetzt worden ist

$$J = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega (\varphi - \varphi_0) - \cos^2 \omega (\varphi - \varphi_0) \right] \mathrm{d}\varphi, \tag{53}$$

$$K = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\sin 2\omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sin^2 (\varphi - \varphi_0)}{\sin^2 \varphi} \right] \mathrm{d}\varphi. \tag{54}$$

Da wir später bei Behandlung des unsymmetrischen Feldes die entsprechenden Formeln brauchen, schreiben wir die Integrale J und K mit unbestimmter oberer Grenze an:

$$J(\varphi, \varphi_0) = \frac{k^2}{2(k^2+1)} (\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{4} \frac{k^2+2}{k^2+1} \sin 2\sqrt{k^2+1} (\varphi - \varphi_0), \tag{55}$$

und (partielle Integration)

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{\sin^2 \sqrt{k^2+1} (\varphi - \varphi_0)}{k^2+1} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \tag{56}$$

Setzt man hierin $\varphi = \varphi_1$, so erhält man auf Grund der Abbildungsgleichung $\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$ für die Farbfehlerkonstante C_F

$$\boxed{C_F/a = \frac{\pi k^2}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}.} \tag{57}$$

Statt $\sin^2 \varphi_0$ kann auf Grund von (21) noch der Dingort z_0 eingeführt werden. So ergibt sich

$$\boxed{\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{a^2 + z_0^2}{a}.} \tag{58}$$

Man sieht, daß für jeden k^2-Wert δ_F für den Dingort $z_0 = 0$ ein Minimum hat. Die Farbabweichung ist also am kleinsten, wenn sich der Gegenstand in der Feldmitte befindet. Bei gegebenem Dingort z_0 (z. B. dem günstigsten $z_0 = 0$) hängt δ_F noch vom Parameter k^2 ab. Es wird Null für $k \to 0$ und

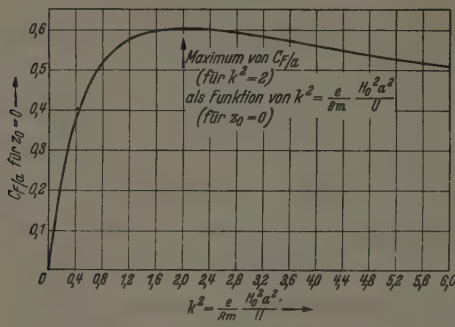


Fig. 9. Farbfehlerkonstante als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 a^2}{U}$ wenn sich das Ding in der Feldmitte befindet.

$k \to \infty$. Dazwischen erreicht δ_F für $k^2 = 2$ seinen größten Wert. Dieser Größtwert der Farbabweichung ist somit durch

$$\delta_{F\,max} = 0{,}604\, \alpha\, a \frac{\Delta U}{U} \left(1 + \left(\frac{z_0}{a}\right)^2\right). \tag{59}$$

gegeben. In Fig. 9 ist der Farbfehler C_F/a (für $z_0 = 0$) als Funktion von k^2 dargestellt.

Für sehr hohe Vergrößerungen, für welche man sich besonders beim Übermikroskop interessiert, kann man das Ding praktisch im Brennpunkt annehmen: $\varphi_0 = \varphi_f = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$. So ergibt sich aus (57) der Ausdruck

$$\boxed{C_F/a = \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}.} \tag{60}$$

In Tabelle 1 ist C_F/a als Funktion des Parameters k^2 und in Fig. 10 kurvenmäßig dargestellt. Man sieht, daß in diesem Falle von sehr hoher

Vergrößerung C_F/a in der Nähe des Parameterwertes $k^2 = 4$ ein Minimum besitzt. Der numerische Wert dieses Minimums ist $C_F/a = 0{,}577$.

Da wir die achsennahe Bahn unmittelbar als Funktion von U kennen, brauchten wir zur Berechnung der Farbabweichung (58) und (60) die

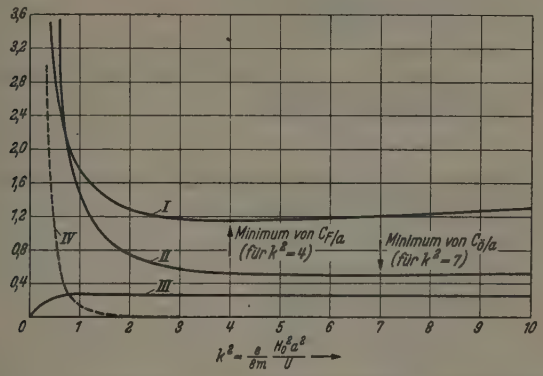


Fig. 10. I. Farbfehlerkonstante C_F/a für hohe Vergrößerung. *) II. Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{O}}/a$ für hohe Vergrößerung. *) III. Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{O}}/a$ bei günstigster Dinglage. IV. Die Öffnungsfehlerkonstante nach der Näherungsformel für „schwache Linsen" gerechnet, als Funktion von $k^2 = \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 a^2}{U}$ *).

Formel (48) überhaupt nicht verwenden. Ist nämlich $y(z)$ die Bahn (51), so gilt definitionsgemäß für den Radius Δy des Zerstreuungsscheibchens in der Bildebene

$$\Delta y = \alpha \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)_{z=z_1} \cdot \Delta U. \tag{61}$$

Dividiert man durch die Vergrößerung $V = \frac{1}{y'(z_1)}$, so erhält man also die Formel

$$\delta_F = \frac{\Delta y}{V} = \alpha\, y'(z_1) \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)_{z=z_1} \Delta U. \tag{62}$$

Nun ist $\frac{\partial y}{\partial U} = \frac{\partial y}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial U}$, und aus (51) folgt daher

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{a(\varphi - \varphi_0)}{\omega \sin \varphi_0} \frac{\cos \omega(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} - \frac{a}{\omega^2 \sin \varphi_0} \frac{\sin \omega(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}$$

Wegen (30) ist dies $\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{a\pi}{k^2+1} \frac{1}{\sin \varphi_0 \sin \varphi_1}$.

Ferner ist wegen (17) $\frac{\partial \omega}{\partial U} = -\frac{k^2}{2\sqrt{k^2+1}} \frac{\Delta U}{U}$,

*) Infolge eines Versehens sind die Ordinaten der Kurven I, II und IV um den Faktor 2 zu groß dargestellt.

Tabelle 1.

k^2	z_{f_0}/a	a/f	z_{H_0}/a	C_F/a	$C_{\ddot{O}}/a$	k^2	z_{f_0}/a	a/f	z_{H_0}/a	C_F/a	$C_{\ddot{O}}/a$
0,2	− 3,563	0,270	0,138	3,251	15,024	3,2	0,038	0,999	1,039	0,584	0,287
0,4	− 1,890	0,467	0,249	1,734	3,308	3,4	0,073	0,997	1,075	0,581	0,286
0,6	− 1,292	0,612	0,341	1,246	1,571	3,6	0,106	0,994	1,113	0,579	0,275
0,8	− 0,970	0,718	0,422	1,012	0,999	3,8	0,137	0,990	1,147	0,578	0,271
1,0	− 0,760	0,796	0,495	0,876	0,735	4,0	0,167	0,986	1,182	0,577	0,267
1,2	− 0,609	0,854	0,562	0,792	0,591	4,2	0,195	0,981	1,214	0,577	0,264
1,4	− 0,492	0,897	0,625	0,734	0,502	4,4	0,222	0,976	1,247	0,578	0,262
1,6	− 0,396	0,929	0,679	0,694	0,442	4,6	0,249	0,970	1,278	0,579	0,260
1,8	− 0,316	0,953	0,732	0,664	0,401	4,8	0,273	0,964	1,309	0,580	0,258
2,0	− 0,248	0,970	0,782	0,641	0,370	5,0	0,297	0,958	1,340	0,581	0,257
2,2	− 0,187	0,982	0,830	0,625	0,347	6	0,404	0,927	1,481	0,592	0,253
2,4	− 0,134	0,991	0,875	0,612	0,329	7	0,495	0,896	1,613	0,605	0,252
2,6	− 0,085	0,996	0,918	0,602	0,312	8	0,577	0,866	1,734	0,621	0,255
2,8	− 0,041	0,999	0,959	0,598	0,305	9	0,652	0,837	1,843	0,637	0,257
3,0	0,000	1,000	1,000	0,589	0,294	10	0,719	0,811	1,954	0,653	0,261

Es bedeutet:

$$\frac{z_{f_0}}{a} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$$ die Brennpunktslage,

$$\frac{z_{H_0}}{a} = a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\sqrt{k^2+1}}$$ die Hauptpunktslage,

$$\frac{a}{f} = \sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$$ f Brennweite,

$$\delta_F = \alpha a\,\frac{\Delta U}{U}\,\frac{\pi k^2}{2\,(k^2+1)^{3/2}}\,\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}, \qquad \delta_F = \alpha\,\frac{\Delta U}{U}\cdot C_F$$ die Farbabweichung,

$$\delta_{\ddot{O}} = \alpha^3 a\left[\frac{\pi k^2}{4\,(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8}\,\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\sin\frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right]\frac{1}{\sin^4\dfrac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}, \qquad \delta_{\ddot{O}} = \alpha^3 C_{\ddot{O}}$$ Öffnungsfehler

} bei hoher Vergrößerung.

und mit dem Ausdruck (34a) für die Vergrößerung

$$V = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} = \frac{1}{y'(z_1)}$$

erhält man so

$$\delta_F = \alpha\, a \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}.$$

Für den Brennpunkt ergibt sich die Farbabweichung δ_F unmittelbar aus (24) nach der Beziehung

$$\delta_F = \alpha\, \Delta z_f. \tag{63}$$

Die Farbabweichung hat auch noch Einfluß auf die Vergrößerung, indem Strahlen verschiedener Energie verschiedene Vergrößerungen ergeben. Dies bedingt eine radialgerichtete Verzeichnung. Aus (36) folgt nämlich für die Veränderung der Vergrößerung V

$$\Delta V = \frac{\Delta f_0}{Z_0} - \frac{f_0 \Delta Z_0}{Z_0^2}.$$

Wegen (26) erhält man für Δf_0

$$\Delta f_0 = -\frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}} \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}$$

$$= -\frac{1}{a} f_0 z_{f_0} \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \tag{64}$$

Aus Gleichungen (32) und (24) folgt für

$$\Delta Z_0 = -\frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{a} f_0^2 \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \tag{65}$$

So ergibt sich

$$\Delta V = -\frac{1}{a} \frac{f_0}{Z_0} \left(z_{f_0} + \frac{f_0^2}{Z_0}\right) \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \tag{66}$$

Die Änderung der Vergrößerung können wir durch die radiale Verlagerung des Bildpunktes Δy_1 ausdrücken. Wegen $V = \frac{y_1}{y_0}$ wird so $\Delta y_1 = y_0 \Delta V$. Durch Division mit der Vergrößerung $V = \frac{f_0}{Z_0}$ wollen wir diesen „Verwischungsstrich" wieder auf die Dingebene beziehen und mit

$$\delta_{F_y} = \frac{\Delta y_1}{V} = y_0 \frac{\Delta V}{V}$$

bezeichnen. So ergibt sich endgültig

$$\delta_{F_y} = -y_0 \frac{1}{a} (z_{f_0} + V f_0) \frac{\pi k^2}{2 (k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} \tag{67}$$

Für hohe Vergrößerungen $V f_0 \gg z_{f_0}$ kann man hierfür schreiben

$$\delta_{F_y} = -y_0 V \frac{\Delta U}{U} \frac{\pi k^2}{2(k^3+1)^{3/2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}, \tag{68}$$

wobei f/a durch (26) ausgedrückt worden ist. Man sieht, daß diese Art der chromatischen Verzeichnung der Vergrößerung proportional ist. Für $k^2 = 8$ erhält man so für die relative Länge der Verwischung

$$\frac{\delta_{F_y}}{y_0} = -0{,}59\, V \frac{\Delta U}{U}. \tag{69}$$

Bei einer Spannung U von 60 kV und einem Schwankungsbereich ΔU der Voltgeschwindigkeit von 10 Volt beträgt somit bei einer hundertfachen Vergrößerung die Größe der Objektverwischung ungefähr ein $^1/_{100}$.

Ein weiterer Verzeichnungsfehler[1]) infolge einer Geschwindigkeitsinhomogenität ist durch die Abhängigkeit der Bilddrehung von der Elektronenenergie nach (47) bedingt. So ergibt sich zunächst für den Spielraum des Drehwinkels $\Delta \psi$ als Funktion des Geschwindigkeitsspielraumes ΔU der Ausdruck

$$\Delta \psi = -\frac{\pi k}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U}. \tag{70}$$

Dies bedingt eine tangentialgerichtete Verwischung, also einen Zerdrehungsfehler, welcher — wieder auf die Dingebene bezogen — wegen $\Delta x_1 = y_1 \Delta \psi$ durch

$$\delta_{F_x} = -y_0 \frac{\pi k}{2(k^2+1)^{3/2}} \frac{\Delta U}{U} \tag{71}$$

gegeben ist. Für $k^2 = 8$ erhält man so $\delta_{F_x}/y_0 = 0{,}840\, \Delta U/U$.

7. Der Öffnungsfehler (sphärische Aberration). Eine stigmatische Abbildung ergibt sich bekanntlich nur bei sehr starker Abblendung, so daß sich an der Abbildung allein die flachen und achsennahen Elektronenbahnen beteiligen können. Bei einer größeren Strahlapertur entspricht dem punktförmigen Gegenstand als Bild ein Scheibchen vom Radius Δr, welcher der dritten Potenz der Strahlapertur α proportional ist. Diese Erscheinung nennt man den Öffnungsfehler. Wir wollen ihn durch die Größe $\delta_{\ddot{o}} = \frac{\Delta r}{V}$ kennzeichnen, wobei V die Vergrößerung bedeutet. Unsere Aufgabe ist nun, den Öffnungsfehler $\delta_{\ddot{o}}$ in seiner Abhängigkeit vom Parameter k^2 und

[1]) Vgl. hierzu auch G. Wendt, ZS. f. Phys. **116**, 436, 1940.

vom Dingort z_0 zu berechnen. Allgemein gilt für diesen auf die Dingebene bezogenen Radius des Zerstreuungsscheibchens die Formel[1])

$$\delta_{\ddot{o}} = \frac{\Delta r}{V} = \alpha^3 \frac{e}{96\, m\, U} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{2\, e}{m U} H^4 + 5\, H'^2 - H H'' \right) y^4 \, \mathrm{d}\, z. \tag{72}$$

Hier bedeutet $y\,(z)$ wieder jene Elektronenbahn, welche im Dingpunkt $z = z_0$ verschwindet und hier die Ableitung 1 ($y'\,(z_0) = 1$) hat. Sie ist also durch (51) gegeben. Analog zu C_F wollen wir auch hier die Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{o}}$ durch

$$\delta_{\ddot{o}} = \alpha^3 C_{\ddot{o}} \tag{73}$$

einführen. Auf Grund von (21) und (11) erhält man nun folgende Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} &H\,(z) = H_0 \sin^2 \varphi,\ H^4 = H_0^4 \sin^8 \varphi, \\ &H'\,(z) = -\frac{2\, H_0}{a} \sin^3 \varphi \cos \varphi,\ H''\,(z) = \frac{6\, H_0}{a^2} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{2\, H_0}{a^2} \sin^6 \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Für den Klammerausdruck im Integranden von (72) ergibt sich damit

$$\frac{2\, e}{m\, U} H^4 + 5\, H'^2 - H H'' = \frac{2\, H_0^2}{a^2} [2\,(4\, k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^6 \varphi.$$

So erhält man für $C_{\ddot{o}}$

$$C_{\ddot{o}} = \frac{e\, H_0^2\, a^3}{48\, m\, U\, \omega^4} \frac{1}{\sin^4 \varphi_0} \int_{z_0}^{z_1} [2\,(4\, k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^4 \omega\,(\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{d}\, \varphi,$$

oder

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \frac{k^3}{6\,(k^2+1)^3} \frac{1}{\sin^4 \varphi_0} K, \tag{75}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$K = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [2\,(4\, k^2 - 3) \sin^2 \varphi + 7] \sin^4 \omega\,(\varphi - \varphi_0)\, \mathrm{d}\, \varphi)\, \mathrm{d}\, \varphi. \tag{76}$$

Da wir das gleiche Integral später mit anderen Grenzen brauchen, wollen wir die obere Grenze zunächst willkürlich lassen und mit φ bezeichnen. Die Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} K\,(\varphi, \varphi_0) = {} & \frac{3}{2}\,(k^2+1)\,(\varphi - \varphi_0) - \sqrt{k^2+1} \sin 2\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) + \\ & + \frac{1}{8} \sqrt{k^2+1} \sin 4\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) - \frac{3\,(4\, k^2 - 3)}{16} \sin 2\,\varphi + \\ & + \frac{3}{4} \frac{(k^2+1)^2}{k^2} \frac{4\, k^2 - 3}{4\, k^2 + 3} \sin 2\,\varphi_0 + \frac{(4\, k^2 - 3)\sqrt{k^2+1}}{4\, k^2} \sin 2\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) \cos 2\,\varphi - \\ & - \frac{4\, k^2 - 3}{4\, k^2} \cos 2\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) \sin 2\,\varphi - \frac{1}{8} \frac{4\, k^2 - 3}{4\, k^2 + 3} \sqrt{k^2+1} \sin 2\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) \cos 2\,\varphi + \\ & + \frac{1}{16} \frac{4\, k^2 - 3}{4\, k^2 + 3} \cos 4\,\omega\,(\varphi - \varphi_0) \sin 2\,\varphi, \end{aligned} \tag{77}$$

[1]) Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. **116**. 19, 1940, Gleichung (1).

Setzt man hierin $\varphi = \varphi_1$ und berücksichtigt die Abbildungsgleichung (30) ($n = 1$), so sieht man, daß einige Glieder wegfallen und für $C_{\ddot{o}}/a$ ergibt sich

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8}\frac{4k^2-3}{4k^2+3}(\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_1)\right]\frac{1}{\sin^4\varphi_0}, \quad (78)$$

oder auf Grund von (30)

$$\boxed{\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{4}\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\cos\left(2\varphi_0 - \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right)\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right]\frac{1}{\sin^4\varphi_0},} \quad (79)$$

wobei φ_0 mit dem Dingort z_0 durch $z_0 = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0$ zusammenhängt. Wenn man gemäß

$$z_0 = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0 \quad \text{und} \quad z_f = a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$$

Ding- und Brennpunkt einführt, kann man hierfür auch schreiben:

$$\boxed{\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{5/2}}\frac{(a^2+z_0^2)^2}{a^4} - \frac{1}{4}\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\frac{a^2+z_0^2}{a^2+z_f^2}\frac{z_0^2 z_f + a^2(2z_0 - z_f)}{a^3}.} \quad (80)$$

Für sehr hohe Vergrößerungen kann das Ding praktisch im Brennpunkt angenommen werden. Es ist dann

$$\varphi_0 = \varphi_f = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \varphi_1 = 0, \quad z_0 = z_f \quad (81)$$

zu setzen und die Formeln (79) bzw. (80) erhalten die Gestalt

$$\boxed{\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8}\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\sin\frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right]\frac{1}{\sin^4\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}},} \quad (82)$$

$$\boxed{\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{5/2}}\frac{(a^2+z_f^2)^2}{a^4} - \frac{1}{4}\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\frac{(a^2+z_f^2)z_f}{a^3}.} \quad (83)$$

In Tabelle 1 ist die Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{o}}/a$ für hohe Vergrößerungen, wie sie Formel (82) entspricht, als Funktion von k^2 wiedergegeben und in Fig. 10 durch die Kurve II und Fig. 8 durch Kurve III bildmäßig dargestellt. Der Verlauf von $C_{\ddot{o}}/a$ in Abhängigkeit von k^2 zeigt dabei folgende wesentliche Merkmale: solange k^2 klein ist, sinkt $C_{\ddot{o}}/a$ sehr rasch mit wachsendem k^2. Aus (82) folgt für kleine k^2, d. h. $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}k^2$ die Näherungsformel

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \frac{2}{\pi^3 k^6}. \quad (84)$$

Für große k^2 steigt $C_{\ddot{o}}/a$ wieder an, jedoch nur langsam, und es wird für große k^2

$$C_{\ddot{o}}/a = 0{,}057\, k. \qquad (85)$$

In der Umgebung von $k^2 \approx 7$ durchläuft $C_{\ddot{o}}/a$ ein flaches Minimum. Hier ist $C_{\ddot{o}}/a = 0{,}252$. Für die kleinste Brennweite $f = a$ ($k^2 = 3$) ist $C_{\ddot{o}}/a = 0{,}294$ (Fig. 10). Der Ausdruck (84) ergibt sich gleichfalls, wenn man den Öffnungsfehler auf Grund der von verschiedenen Autoren benutzten Näherungsformeln für den Öffnungsfehler der „kurzen und schwachen" Linse berechnet. Wir sind nun in der Lage, mittels unserer strengen Berechnung die Berechtigung der im Begriff der „kurzen und schwachen" Linsen liegenden Näherungsannahmen zu prüfen. Wir haben dazu in Fig. 10 in Kurve IV den Verlauf des nach (84) für die kurze und schwache Linse berechneten Öffnungsfehler neben dem streng berechneten Verlauf nach (82) eingetragen. Man sieht, daß die so gefundenen Werte vollkommen daneben gehen und insbesondere für den noch kleinen Parameterwert von $k^2 = 0{,}4$ bereits einen Fehler von 69% ergeben. Für den praktisch verwendeten Wert von k^2 um 1,6 ist der Fehler sogar 96%. Man sieht also, daß alle die zahlreichen Arbeiten[1]), welche mit der Näherung einer „kurzen und schwachen" Linse rechnen, für die Praxis der hochauflösenden Elektronenmikroskope nicht ausreichend sind, wie übrigens für den Fall der sogenannten „sphärisch bestkorrigierten Linse" von Scherzer[2]) in einer späteren Arbeit selbst festgestellt wird.

Die Gleichung (80) kann benutzt werden, um jenen Dingort zu bestimmen, für welchen die Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{o}}/a$ ihren kleinsten Wert annimmt. Die Bedingung für $z_0 = a x_0$, welches einen Extremwert von (80) ergibt, lautet

$$\frac{2\pi k^2}{(k^2+1)^{5/2}} \cdot \frac{4k^2+3}{4k^2-3} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}} = \frac{1 + 3x_0^2 + 2x_0^3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}{x_0 (1 + x_0^2)}. \qquad (86)$$

Der durch diese Gleichung gegebene Zusammenhang zwischen der günstigsten Dinglage x_0 und dem Parameter k^2 ist, wie er sich aus einer von Dosse graphisch durchgeführten Auflösung dieser Gleichung (86) ergibt, in Fig. 11 wiedergegeben. Auf Grund der Formel (79) kann man dann für jeden Parameterwert k^2 für diesen günstigsten Dingort die Öffnungsfehlerkonstante

[1]) O. Scherzer, ZS. f. Phys. **101**, 23, 1936; O. Scherzer, Beiträge zur Elektronenoptik, herausgegeben von H. Busch u. E. Brüche, Leipzig 1936, S. 17; R. Rebsch u. W. Schneider, ZS. f. Phys. **107**, 138, 1937; H. Riedl, ebenda S. 210; J. Gratsiatos, ebenda S. 382; E. Brüche, TFT Bd. 29, H. 1, 1940; auch E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, Berlin 1934. — [2]) In Beiträge zur Elektronenoptik, a. a. O., S. 17.

$C_{\ddot{o}}/a$ bestimmen. Die diesbezüglichen Werte sind als Kurve III in Fig. 10 eingetragen. Man sieht, daß der Einfluß der Dinglage auf $C_{\ddot{o}}$ im praktisch wichtigen k^2-Bereich gering ist.

Aus (82) und (26) kann man das Verhältnis $C_{\ddot{o}}/f$ für hohe Vergrößerungen bestimmen. Es ergibt sich

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{f} = \left[\frac{\pi k^2}{4(k^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{8}\,\frac{4k^2-3}{4k^2+3}\sin\frac{2\pi}{\sqrt{k^2+1}}\right]\cdot\frac{1}{\sin^3\dfrac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}}. \qquad (87)$$

Von Rebsch[1]) und Scherzer[1]) ist nun behauptet worden, daß $C_{\ddot{o}}/f$ auch für die besten errechenbaren Linsen stets größer als 0,25 ist. Wir

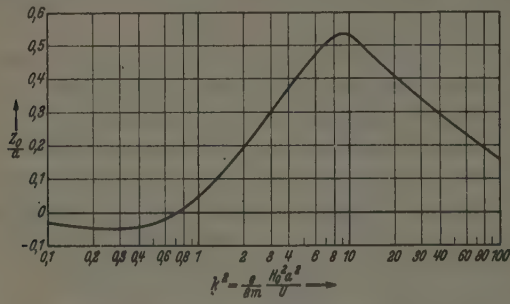


Fig. 11. Dingort mit kleinster Öffnungsfehlerkonstanten $C_{\ddot{o}}/a$ als Funktion von

$$k^2 = \frac{e}{8m}\,\frac{H_0^2 a^2}{U}.$$

wollen das Minimum des Ausdruckes (87) nicht erst berechnen, sondern bloß feststellen, daß $C_{\ddot{o}}/f$ für gewisse k^2-Werte merklich kleiner als 0,25 wird. Setzt man z. B. $k^2 = 85$, so erhält man

$$C_{\ddot{o}}/f = 0{,}18, \qquad (88)$$

womit gezeigt ist, daß die Behauptung von Rebsch und die daraus von Scherzer gezogenen Folgerungen nicht mehr als allgemeingültig anzusehen sind, wie hier in Ergänzung zu einer früheren Diskussion abschließend festgestellt werden möge[2]).

Für große k^2 ($\gg 1$) geht $C_{\ddot{o}}/a$ in $C_{\ddot{o}}/f = 0{,}057\,k$ über, während die Brennweite sich wie

$$f = a\,\frac{k}{\pi} \qquad (89)$$

verhält. Man sieht also, daß für große k^2 $C_{\ddot{o}} = 0{,}17\,f$ ist.

[1]) R. Rebsch, Ann. d. Phys. [5] **31**, 551, 1938; O. Scherzer, ZS. f. Phys. **114**, 427, 1939. — [2]) R. Rebsch, ZS. f. Phys. **116**, 729, 1940; W. Glaser, ebenda S. 734.

Dabei möge man bedenken, daß das vorliegende Feld gar nicht nach dem Gesichtspunkt eines möglichst kleinen Wertes von C_s/f ausgesucht worden ist, sondern lediglich in der Absicht, die tatsächlich in den Objektiven des Übermikroskops verwendeten Felder gut wiederzugeben.

III. Elektronenoptik eines unsymmetrischen Glockenfeldes.

1. Gaußsche Bahn und Abbildungsgleichung. In den hochauflösenden Objektiven[1]) sind vorderer und hinterer Polschuh etwas von einander verschieden, so daß das längs der Achse entstehende Feld unsymmetrisch ist.

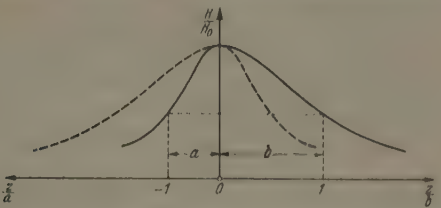


Fig. 12. Unsymmetrischer Feldverlauf, der sich aus zwei Glockenfeldern der Gestalt $H = \frac{H_0}{1+(z/a)^2}$ mit den beiden Halbwertsbreiten $d_1 = a$ und $d_2 = b$ zusammensetzt.

Um auch diesen Fall zu erfassen, können wir das Feld aus zwei Feldhälften der besprochenen Art zusammensetzen, wobei jedoch rechte und linke Feldhälfte verschiedene Halbwertsbreiten besitzen. Die linke Halbwertsbreite des Feldes werde mit a, die rechte mit b bezeichnet und das Feld nach Art der Fig 12 durch den ausgezogenen Kurvenzug dargestellt. Es hat also folgende Gleichung:

$$H(z) = \frac{H_0}{1+(z/a)^2} \quad \text{für} \quad z \leqq 0, \quad H(z) = \frac{H_0}{1+(z/b)^2} \quad \text{für} \quad z \geqq 0. \tag{90}$$

Die Elektronenbahn links von 0 $\left(\text{also } \varphi \geqq \frac{\pi}{2}\right)$ werde mit $y_1(z)$, diejenige rechts von 0 mit $y_2(z)$ bezeichnet. Wir setzen wieder

$$z = a \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{für} \quad z \leqq 0 \quad \text{und} \quad z = b \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{für} \quad z \geqq 0. \tag{91}$$

Weiter werde eingeführt

$$\omega_1 = \sqrt{k_1^2+1} = \left(1+\frac{e}{8m}\frac{H_0^2 a^2}{U}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2^2+1} = \left(1+\frac{e}{8m}\frac{H_0^2 b^2}{U}\right)^{1/2}. \tag{92}$$

Die Bahn für $z \leqq 0$, welche in $z = z_0\,(\varphi = \varphi_0)$ verschwindet, lautet

$$y_1(z) = C\frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = a \operatorname{ctg} \varphi. \tag{93}$$

[1]) B. v. Borries u. E. Ruska, DRP. 680284, angem. 17. 3. 1932.

Das rechte Bahnstück ($z \geqq 0$), welches durch den Bildpunkt $z_1\ (\varphi = \varphi_1)$ hindurchgehen soll, muß die Gleichung haben:

$$y_2(z) = C_1 \frac{\sin \omega_2 (\varphi - \varphi_1)}{\sin \varphi} \quad \text{mit} \quad z = b \operatorname{ctg} \varphi. \tag{94}$$

Die Bahn $y_1(z)$, welche in $z = z_0\ (\varphi = \varphi_0)$ der Bedingung $y_1'(z_0) = 1$ genügt, ergibt sich analog zu (51)

$$y_1(z) = -\frac{a}{\omega_1} \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\sin \omega_1 (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}. \tag{95}$$

$y_2(z)$ haben wir nun im Punkte $z = 0 \left(\text{d. h. } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ stetig und mit stetiger Tangente anzuschließen. Aus

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{96}$$

erhält man so die beiden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} C_1 \sin \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) &= \frac{a}{\omega_1} \frac{1}{\sin \varphi_0} \sin \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \\ C_1 \cos \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) &= -\frac{b}{\omega_2} \frac{1}{\sin \varphi_0} \cos \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right| \tag{97}$$

zur Bestimmung von C_1 und φ_1. Durch Quadrieren und Addieren erhält man C_1

$$C_1 = -\frac{1}{\sin \varphi_0} \left[\frac{a^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b^2}{\omega_2^2} \cos^2 \omega_1 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right]^{1/2}, \tag{98}$$

durch Dividieren die Größe

$$\operatorname{tg} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{a}{b} \frac{\omega_2}{\omega_1} \operatorname{tg} \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right). \tag{99}$$

Die Gleichung (99) stellt den Zusammenhang zwischen Ding- und Bildpunkt dar, ist also als die „Abbildungsgleichung" zu betrachten. Für $a = b$, also $\omega_1 = \omega_2$, geht sie in

$$\operatorname{tg} \omega \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \operatorname{tg} \omega \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right),$$

oder aufgelöst in unsere frühere Gleichung (80)

$$\omega (\varphi_0 - \varphi_1) = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

über. Aus (99) kann man zu jedem vorgegebenen φ_0 die zugehörige Größe φ_1 berechnen. Graphisch kann man so vorgehen, daß man nach Fig. 13 in dem Dreieck mit der Basis $a\omega_2$ bei A den gegebenen Winkel $\chi_0 = \omega_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$ abträgt, den Schenkel AC mit OH zum Schnitt bringt, diesen Schnittpunkt mit B $(AB = b\omega_1)$ verbindet und auf diese Weise den Winkel $\chi_1 = \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)$ bei B erhält. Hieraus bestimmt man φ_1 und nach (21) den Bildpunkt z_1.

2. Die Vergrößerung. Die Vergrößerung ist nach Anhang das Verhältnis der Werte, die ein beliebiges partikuläres Integral im Bild- und Ding-

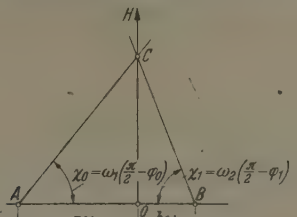


Fig. 13. Graphische Konstruktion des zu einem bestimmten Dingort gehörigen Bildortes im unsymmetrischen Feld.

punkt annimmt, vorausgesetzt natürlich, daß hier das Integral nicht verschwindet. Wir wählen auf der linken Seite das Integral

$$y_1 = \frac{\sin \omega_1 \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \varphi}, \tag{100}$$

welches also im Punkte $z = 0$ verschwindet. Die Fortsetzung $y_2(z)$ von (100) auf der rechten Seite ist dadurch bestimmt, daß sich hier die Lösung

$$y_2 = C_1 \frac{\sin \omega_2 (\varphi - C_2)}{\sin \varphi} \tag{101}$$

der Differentialgleichung stetig und mit stetiger Tangente anschließt. So ergibt sich

$$C_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{b}{a} = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k_2^2+1}}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2} \tag{102}$$

und $y_2(z)$ lautet

$$y_2(z) = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{b}{a}\frac{\sin \omega_2 \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \varphi}. \tag{103}$$

Die Vergrößerung V wird damit

$$V = \frac{y_2(\varphi_1)}{y_1(\varphi_0)} = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k_2^2+1}}\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_0}\frac{\sin \sqrt{k_2^2+1}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \sqrt{k_1^2+1}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{104}$$

wobei φ_1 mit φ_0 nach (99) zusammenhängt.

Die beiden Brennpunkte als die unendlich fernen Punkten zugeordneten Punkte ergeben sich aus (99) für $\varphi_1 = 0$ (d. h. $z_1 = \infty$) bzw. $\varphi_0 = \pi$ (d. h. $z_0 = -\infty$) zu

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2+1}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{f_1}\right) &= -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{\frac{k_2^2+1}{k_1^2+1}} \operatorname{tg} \sqrt{k_1^2+1}\,\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} \sqrt{k_1^2+1}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{f_0}\right) &= +\frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k_2^2+1}} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2+1}\,\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{105}$$

Der Begriff der Brennweite hat für diesen Fall keinen Sinn, es sei denn, daß man darunter die Entfernung des Hauptpunktes vom entsprechenden Brennpunkt versteht und die Hauptpunkte als konjugierte Punkte mit der Vergrößerung 1 definiert. [Also durch die simultanen Gleichungen (99) und (104) mit $V = 1$].

3. Einfluß einer Feldunsymmetrie auf die Farbabweichung. Der Farbfehler ist nach (48) durch

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \left\{ \int_{z_0}^{0} y'^2 \, \mathrm{d}z + \int_{0}^{z_1} y'^2 \, \mathrm{d}z \right\} \tag{106}$$

gegeben. Wir haben dabei den Beitrag jeder Feldhälfte getrennt angeschrieben. Im ersten Integral haben wir das Bahnstück (95), im zweiten Integral das Bahnstück (94) einzusetzen, wobei C_1 durch Gleichung (98) und φ_1 durch Gleichung (99) definiert sind. Indem man aus (95) und (94) einsetzt, ergibt sich

$$\delta_F = \alpha \frac{\Delta U}{U} \Big| \frac{a}{\sin^2 \varphi_0} \Big[J\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right) + K\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right) \Big] - \\ - \frac{C_1^2 \omega_2^2}{b} \Big[J\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1\right) + K\left(\frac{\pi}{2}, \varphi_1\right) \Big] \Big\}, \tag{107}$$

wobei die Integrale durch (55) und (56) definiert sind. Mit der Abkürzung

$$B(k, \varphi) = \frac{k^2}{k^2+1}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{k^2+2}{(k^2+1)^{3/2}} \sin 2\sqrt{k^2+1}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{108}$$

erhält man für die Farbabweichung des unsymmetrischen Feldes folgenden Ausdruck:

$$C_F/a = \frac{1}{2} \Big\{ B(k_1, \varphi_0) - \\ - \frac{k_2}{k_1} \Big[1 + \frac{1}{k_2^2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2+1} \sin^2 \sqrt{k_1^2+1}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \Big] B(k_2, \varphi_1) \Big\} \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}. \tag{109}$$

Für $k_1 = k_2$ ergibt sich natürlich daraus wieder (57). Der Winkel φ_1 ist dabei durch die Abbildungsgleichung (99) als Funktion von φ_0, k_1 und k_2 bestimmt. Auf Grund von Formel (109) kann man wieder den für die Farbabweichung günstigsten Dingort und das günstigste Verhältnis der Halbwertsbreiten $\frac{a}{b} = \frac{k_1}{k_2}$ der beiden Feldhälften, sowie den günstigsten Parameterwert k_1^2 bestimmen. Für hohe Vergrößerungen kann man in (109) $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \varphi_f$ nach Gleichung (105) setzen.

4. Der Öffnungsfehler des unsymmetrischen Feldes. Die Formel (72) für den Radius des Zerstreuungsscheibchens können wir wieder schreiben:

$$\delta_{\ddot{o}} = \frac{\Delta\,\mathfrak{r}}{V} = \alpha^3 \frac{e}{96\,m\,U}\left\{\int_{z_0}^{0}\left(\frac{2\,e}{m\,U}H^4 + 5\,H'^2 - H\,H''\right)y^4\,\mathrm{d}\,z + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{z_1}\left(\frac{2\,e}{m\,U}H^4 + 5\,H'^2 - H\,H''\right)y^4\,\mathrm{d}\,z\right\}. \quad (110)$$

Im ersten Integral ist dabei nach (95) der Bahnverlauf durch

$$y_1(z) = -\frac{a}{\omega_1}\frac{1}{\sin\varphi_0}\frac{\sin\omega_1(\varphi-\varphi_0)}{\sin\varphi} \quad \text{für} \quad z = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi, \quad (111)$$

im zweiten mit (98) und (99) durch

$$y_2(z) = C_1\frac{\sin\omega_2(\varphi-\varphi_1)}{\sin\varphi} \quad \text{für} \quad z = b\,\mathrm{ctg}\,\varphi \quad (112)$$

gegeben. Indem man aus (111), (112) und (74) einsetzt, erhält man

$$C_{\ddot{o}} = \frac{e\,H_0^2}{48\,m\,U}\left\{\frac{a^3}{\omega_1^4\sin^4\varphi_0}K\left(\frac{\pi}{2},\,\varphi_0\right) - \frac{C_1^4}{b}K\left(\frac{\pi}{2},\,\varphi_1\right)\right\}, \quad (113)$$

wobei $K(\pi/2, \varphi)$ durch (77) und C_1 durch (98) gegeben sind. Wenn man nun die folgende Abkürzung

$$A(k,\varphi) = \frac{1}{4}\frac{k^2}{k^2+1}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{8}\frac{4\,k^2-3}{4\,k^2+3}\sin 2\varphi -$$

$$- \frac{8\,k^2-3}{24\,(k^2+1)^{3/2}}\sin 2\sqrt{k^2+1}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{k^4}{6\,(4\,k^2+3)\,(k^2+1)^{3/2}}\sin 4\sqrt{k^2+1}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) \quad (114)$$

einführt, so kann man den Öffnungsfehler des unsymmetrischen Feldes in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{\blacksquare} = \left\{A(k_1,\varphi_0) - \frac{k_2}{k_1}\left[1 + \frac{1}{k_2^2}\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+1}\sin^2\sqrt{k_1^2+1}\left(\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 \times \right.$$

$$\left. \times\, A(k_2,\varphi_1)\right\}\frac{1}{\sin^4\varphi_0}. \quad (115)$$

Im Falle hoher Vergrößerung hat man $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_0 = \varphi_f$ zu setzen. Mit Hilfe der Abbildungsgleichung

$$\mathrm{tg}\sqrt{k_1^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_f\right) = \frac{k_2}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k_2^2+1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{k_2^2+1} \quad (116)$$

kann man aus dem mittleren Glied in der eckigen Klammer φ_f durch die gegebenen Größen ausdrücken und erhält so

$$\frac{C_{\ddot{o}}}{a} = \left\{A(k_1,\varphi_f) - \left[1 + \frac{1}{k_1^2}\frac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2+1}\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{k_2^2+1}\right]^{-2}A(k_2,0)\right\}\frac{1}{\sin^4\varphi_f}, \quad (117)$$

wobei die Größe φ_f aus (116) zu bestimmen ist. Damit hat man alle Formeln beisammen, um den günstigsten Dingort, das günstigste Verhältnis der Halbwertsbreiten und den günstigsten Parameterwert k_1^2 zu bestimmen. Die numerische und kurvenmäßige Auswertung der Formeln für das unsymmetrische Feld wird in der nachfolgenden Arbeit von J. Dosse gebracht (S. 316).

In der gleichen Weise wie hier der Farb- und Öffnungsfehler des obigen Glockenfeldes bestimmt und für den symmetrischen Fall diskutiert worden ist, können nun auch unsere anderen allgemeinen Formeln für die weiteren sieben Bildfehler ausgewertet werden und insbesondere der Einfluß der Blendenlage untersucht werden. Dies soll in einer weiteren Arbeit von Lammel und dem Verfasser geschehen.

Für wertvolle Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit danke ich den Herren B. v. Borries, J. Dosse, E. Lammel und E. Ruska. Ferner danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung einer vollautomatischen Rechenmaschine.

Anhang.

Herleitung der allgemeinen „Abbildungsgleichung" der Elektronenoptik.

Die Differentialgleichungen der achsennahen Elektronenbahnen

$$r'' + \frac{\Phi'}{2\Phi} r + \frac{1}{4\Phi}\left(\Phi'' + \frac{e}{2m} H^2\right) r = 0, \tag{1}$$

sind lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sie besitzen daher immer zwei unabhängige partikuläre Integrale, welche wir mit

$$\varrho\,(z) \text{ und } \sigma\,(z) \tag{2}$$

bezeichnen wollen. Das allgemeine Integral setzt sich daraus mit zwei beliebigen Integrationskonstanten c_1 und c_2 linear zusammen

$$r = c_1 \varrho\,(z) + c_2 \sigma\,(r). \tag{3}$$

Es sei (3) jene Bahnkurve, welche den Punkt P_0 mit $\overline{P_1}$ verbinde. Der Punkt P_0 habe die Koordinaten z_0 und y_0, der Punkt $\overline{P_1}$ die Koordinaten $\overline{z_1}, \overline{y_1}$. Es müssen daher die beiden Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= c_1 \varrho\,(z_0) + c_2 \sigma\,(z_0), \\ \overline{y_1} &= c_1 \varrho\,(\overline{z_1}) + c_2 \sigma\,(\overline{z_1}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Durch z_0, y_0 und $\overline{z_1}$, $\overline{y_1}$ sind hierbei im allgemeinen die beiden Konstanten c_1 und c_2 bestimmt. Wenn man (4) nach ihnen auflöst und in (3) einsetzt, erhält man somit den P_0 mit $\overline{P_1}$ verbindenden Strahl und man sieht,

daß es bei beliebigem Punkt $\overline{P_1}$ im allgemeinen nur *einen* derartigen Strahl gibt. Eliminiert man z. B. c_2 aus den beiden Gleichungen (4), so ergibt sich

$$\overline{y_1} = c_1 \left[\varrho\,(\overline{z_1}) - \frac{\sigma\,(\overline{z_1})}{\sigma\,(z_0)}\,\varrho\,(z_0) \right] + \frac{\sigma\,(\overline{z_1})}{\sigma\,(z_0)}\,y_0. \qquad (5)$$

Man sieht, daß jeder Wert von c_1 einen anderen Wert von $\overline{y_1}$ ergibt. Nur wenn der Koeffizient von c_1 verschwindet, gehen alle Strahlen von P_0 auch durch $\overline{P_1}$. Man hat dann eine ganze Schar von Bahnkurven, die P_0 mit $\overline{P_1}$ verbinden. In diesem Falle ist also $\overline{P_1}$ das *Bild* P_1 von P_0. Als Bedingung, daß $\overline{z_1} = z_1$ das Bild von z_0 ist, hat man daher

$$\varrho\,(\overline{z_1}) - \frac{\sigma\,(\overline{z_1})}{\sigma\,(z_0)}\,\varrho\,(z_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho\,(z_1)\,\sigma\,(z_0) - \varrho\,(z_0)\,\sigma\,(z_1) = 0 \qquad (6)$$

für das Verhältnis $\frac{\overline{y_1}}{y_0} \equiv \frac{y_1}{y_0}$, also die Vergrößerung $V = \frac{y_1}{y_0}$ ergibt sich dann aus (5)

$$V = \frac{y_1}{y_0} = \frac{\sigma\,(z_1)}{\sigma\,(z_0)}, \qquad (7)$$

womit auch diese Größe als das Verhältnis der Werte eines partikulären Integrals in Bild und Dingpunkt bestimmt ist. Man kann zeigen, daß die Gleichungen (6) und (7) ungeändert bleiben, wenn man zwei andere partikuläre Integrale statt ϱ und σ wählt.

(Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G.)

Strenge Berechnung magnetischer Linsen mit unsymmetrischer Feldform nach $H = \frac{H_0}{1+(z/a)^2}$.

Von J. Dosse.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Januar 1941.)

Als Ergänzung der vorstehenden Arbeit[1]) werden Brechkraft, Öffnungs- und Farbfehlerkonstante unsymmetrischer Linsenfelder zahlenmäßig angegeben.

1. Fragestellung.

In der vorstehenden Arbeit[1]) sind bereits die Formeln für die Vergrößerung bzw. für die Brechkraft [I, Gleichung (84a) und (104)], für die Farbfehlerkonstante [I, Gleichung (60) und (109)] und für die Öffnungsfehlerkonstante [I, Gleichung (82) und (117)] des symmetrischen und unsymmetrischen Glockenfeldes der Form $H = H_0 \frac{1}{1+x^2}$ mitgeteilt worden. Für das symmetrische Feld wurden Kurven (I, Fig. 8 und 10) wiedergegeben, die den Verlauf der drei genannten optischen Größen in Abhängigkeit von einem die Stärke und Länge des Feldes kennzeichnenden Parameter

$$k^2 = \frac{e}{8m} \cdot \frac{H_0^2 d^2}{U} \qquad (1)$$

(e/m spezifische Ladung, H_0 Höchstwert der Induktion, U Beschleunigungsspannung der Elektronen, d Halbwertsbreite, vgl. Fig. 1) zeigten. Es erhebt sich nun die Frage, welchen Einfluß ein bestimmter Grad der Umsymmetrie des Feldes auf die optischen Größen hat. Der etwas verwickelte Bau der Formeln läßt es nicht zweckmäßig erscheinen, streng analytisch vorzugehen, also etwa Minima der Fehlerkonstanten in Abhängigkeit vom Unsymmetriegrad zu berechnen. Man erhält einen ausreichenden Überblick, wenn man für einige verschiedene Grade der Unsymmetrie die Abhängigkeit der Brechkraft und der beiden Fehlerkonstanten vom Feldparameter k^2 berechnet und darstellt.

---

[1]) W. Glaser, Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1+(z/a)^2}$, ZS. f. Phys. **117**, 285, 1941. Im folgenden als I bezeichnet.

2. *Berechnungsgang.*

Wir beschränken uns auf den praktisch interessierenden Fall hoher Vergrößerung, d. h. der Dingort falle mit dem dingseitigen Brennpunkt

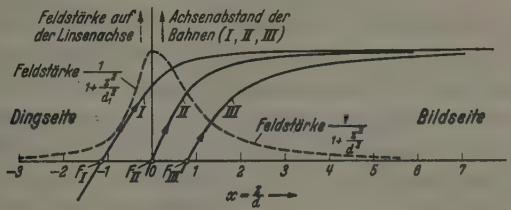


Fig. 1.

zusammen (Fig. 1, $F_{\mathrm{I}\ldots\mathrm{III}}$). Das Feld möge nach Fig. 1 aus zwei Teilen zusammengesetzt sein, die beide einen glockenförmigen Verlauf, jedoch

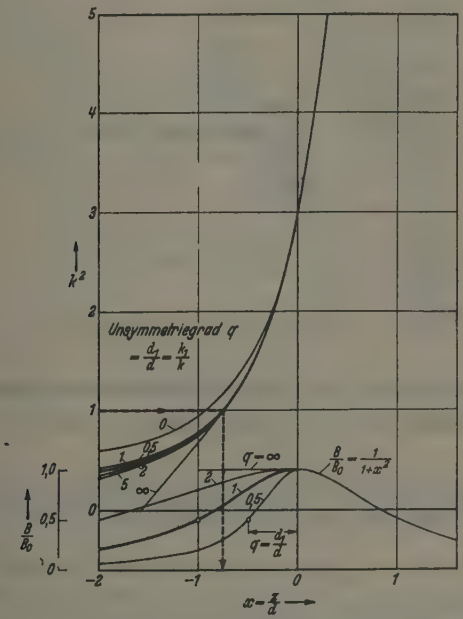


Fig. 2. Dinglage $x = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}$ im Linsenfeld $\left(\frac{H}{H_0}=\frac{1}{1+x^2}\right)$ in Abhängigkeit vom Feldparameter $\varkappa^2 = \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 d^2}{U}$ bei verschiedenen Unsymmetriegraden $q = \frac{d_1}{d}$.

verschiedene Halbwertsbreiten d_1 und d haben. Den Grad der Unsymmetrie kennzeichnen wir durch das Verhältnis

$$q = \frac{d_1}{d} = \frac{k_1}{k} \qquad (2)$$

und wollen die Veränderung von q allein durch Veränderung von d_1 vornehmen: Im Falle $q \to 0$ verschwindet also der linke (dingseitige) Feldteil ($d_1 \to 0$), im Falle $q \to \infty$ artet er in ein konstantes (homogenes) Feld aus.

Wenn wir bei irgendeinem Unsymmetriegrad q den Feldparameter k^2 von kleinen Werten an steigern, so rückt, wie in Fig. 1 angedeutet, der Brennpunkt bzw. Dingort ($F_{\mathrm{I}} \ldots F_{\mathrm{III}}$) von links her immer weiter in das Linsenfeld hinein; bei $k^2 = 3$ wird die Feldmitte erreicht (F_{II}) und bei noch größeren k^2 beginnt der abbildende Strahlengang vom Ding (F_{III}) bis zum

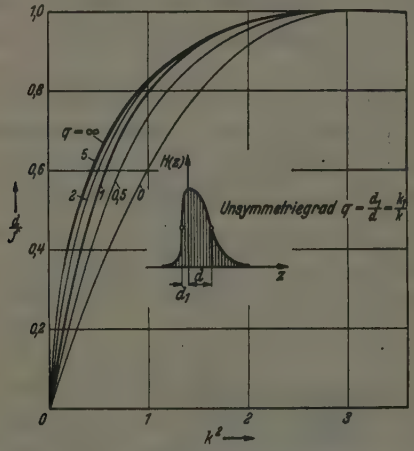


Fig. 3. Brechkraft $D = d/f$ des unsymmetrischen Glockenfeldes in Abhängigkeit vom Feldparameter $k^2 = \frac{e}{8m} \frac{H_0^2 d^2}{U}$ bei verschiedenem Unsymmetriegrad $q = \frac{d_1}{d} = \frac{k_1}{k}$.

$q = 0$ entspricht dem Fall, daß nur die rechte Feldhälfte vorhanden ist, $q = \infty$ entspricht dem Fall, daß sich statt der linken Feldhälfte ein konstantes (homogenes) Feld nach links anschließt.

Bild (in Fig. 1 weit rechts zu denken) überhaupt erst im rechten Teil des Linsenfeldes. Von $k^2 = 3_{(F_{\mathrm{II}})}$ ab kann also die Gestalt des linken Feldteiles auf die Eigenschaften der Abbildung (Brechkraft des Restfeldes, Farb- und Öffnungsfehler) keinen Einfluß mehr haben, d. h. es gelten für $k^2 > 3$ die schon in I mitgeteilten Kurven für das symmetrische Feld,

unabhängig von q, und wir brauchen hier nur noch den Bereich $0 < k^2 < 3$ zu untersuchen. Wie die Dinglage $x = z/d$ vom Parameter k^2 abhängt, ist in Fig. 2 dargestellt.

a) Vergrößerung und Brechkraft. Die Formel für die Vergrößerung

$$V = \frac{k}{k_1}\sqrt{\frac{k_1^2+1}{k^2+1}}\cdot\frac{\sin\sqrt{k^2+1}\,(\varphi_1-\pi/2)}{\sin\sqrt{k_1^2+1}\,(\varphi_0-\pi/2)}\cdot\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_1} \quad \text{[vgl. I, Gl. (104)]},$$

wobei φ_1 und φ_0 durch die Abbildungsgleichung

$$\operatorname{tg}\sqrt{k^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right) = \frac{k_1}{k}\sqrt{\frac{k^2+1}{k_1^2+1}}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{k_1^2+1}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right) \quad \text{[I. Gl. (99)]}$$

verknüpft sind, formen wir etwas um. Da wir Dingort und dingseitigen Brennpunkt praktisch zusammenfallen lassen, wird $\varphi_0 = \varphi_f$ und das Bild

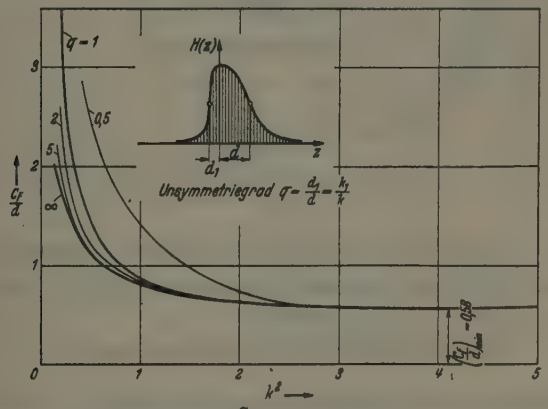


Fig. 4. Farbfehlerkonstante $\frac{C_F}{d}$ in Abhängigkeit vom Feldparameter k^2 für verschiedene Unsymmetrie $q = \frac{k_1}{k}$ des Linsenfeldes.

rückt auf der z- bzw. x-Achse sehr weit nach rechts, also $\varphi_1 \to 0$. Um bei diesem Grenzübergang den Faktor $1/\sin\varphi_1$ in I, (104) loszuwerden, betrachten wir statt V die Größe

$$D = V \cdot \sin\varphi_1, \qquad (3)$$

die die Brechkraft d/f des Feldes darstellt, wie man sich leicht überzeugen kann. Man erhält so

$$D = \frac{\cos\sqrt{k^2+1}\,\pi/2}{\cos\sqrt{k_1^2+1}\,(\pi/2-\varphi_f)}\sin\varphi_f, \qquad (4)$$

worin φ_f und $\pi/2 - \varphi_f$ aus der Gleichung [I. (99)] bestimmt werden müssen, die bei hoher Vergrößerung ($\varphi_0 = \varphi_f$; $\varphi_1 = 0$) lautet

$$\operatorname{tg} \sqrt{k^2+1}\,\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{1+1/k^2}{1+1/k_1^2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{k_1^2+1}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_f\right). \tag{5}$$

Berechnet man hiernach D in Abhängigkeit von k^2 für verschiedene Werte des Unsymmetriegrades $q = k_1/k$, so erhält man die in Fig. 3 dar-

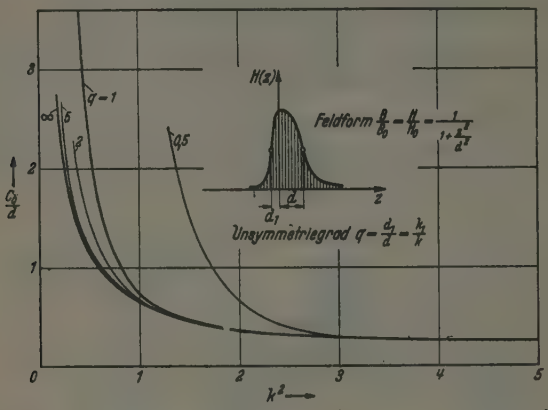


Fig. 5. Öffnungsfehlerkonstante $\frac{C_{\ddot{O}}}{d}$ in Abhängigkeit vom Feldparameter $k^2 = \frac{e}{8m}\frac{H_0^2 d^2}{U}$ für verschiedene Unsymmetriegrade $q = \frac{d_1}{d} = \frac{k_1}{k}$ des Linsenfeldes.

$q \to 0$: nur rechter Feldteil vorhanden,
$q \to \infty$: linker Feldteil artet in konstantes (homogenes) Feld aus.

gestellten Kurven. Dort sind auch die beiden Grenzfälle $q \to 0$ und $q \to \infty$ eingezeichnet, für die aus (4) und (5) folgt

$$D_{q\to 0} = \cos \sqrt{k^2+1}\,\pi/2 \tag{6}$$

und

$$D_{q\to\infty} = \cos \sqrt{k^2+1}\,\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{k^2}{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}^2 \sqrt{k^2+1}\,\frac{\pi}{2} + 1}. \tag{7}$$

Wesentlich ist an dem Ergebnis (Fig. 3), daß auch bei beliebig unsymmetrischem Feld die stärkste Brechkraft erreicht wird, wenn der Dingort im Maximum des Feldes liegt, also $k^2 = 3$ ist. Im übrigen hat auch bei schwächerem Feld ($k^2 < 3$) der Unsymmetriegrad nur geringen Einfluß auf die Brechkraft D.

b) Öffnungsfehler und Farbfehler. Die zahlenmäßige Durchrechnung der Fehlerkonstanten nach I, Gleichungen (108), (109) und (114), (115) führt zu den in Fig. 4 und Fig. 5 dargestellten Ergebnissen. Für $q \to 0$, d. h. wenn das Feld bei $x = 0$ plötzlich auf B_0 ansteigt, wachsen beide Fehlerkonstanten über alle Grenzen. Schließt sich dagegen von $x = 0$ ab nach links ein sehr langes, praktisch konstantes und homogenes Feld an ($q \to \infty$), so streben beide Fehlerkonstanten rasch Grenzwerten zu, die unterhalb der Werte bei symmetrischem Feld liegen. Man wird also bei der Dimensionierung der Objektivlinsen für Übermikroskope zweckmäßig den dingseitigen Feldteil wesentlich weniger rasch abfallen lassen als den bildseitigen. Arbeitet man bei der höchsten Vergrößerung (Dingort beim Feldhöchstwert), so ist der dingseitige Feldteil ohne Einfluß auf die Abbildung selbst. Wählt man kleinere Vergrößerungen, bleibt also mit dem Dingort noch im linken Feldteil, so erhält man kleinere Fehlerkonstanten als bei symmetrischer Fortsetzung des Feldes nach links; dabei braucht nach Fig. 4 und 5 der Unsymmetriegrad kaum über 2 gesteigert zu werden.

Über die Bindung des metallischen Calciums.

Von **Paul Gombás** in Kolozsvár (Ungarn).

(Eingegangen am 2. Dezember 1940.)

Es werden die wichtigsten Bindungskonstanten des metallischen Calciums auf Grund einer vom Verfasser in einigen früheren Arbeiten ausgearbeiteten Theorie der metallischen Bindung bestimmt und mit der Erfahrung verglichen. Empirische oder halbempirische Parameter werden nicht zu Hilfe genommen.

In einigen früheren Arbeiten[1]) wurde vom Verfasser eine Theorie der metallischen Bindung ausgearbeitet, auf Grund derer man ohne Zuhilfenahme empirischer oder halbempirischer Parameter die wichtigsten Konstanten der Alkali- und Erdalkalimetalle leicht berechnen kann. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist diese Theorie auf das metallische Ca anzuwenden, die wichtigsten Bindungskonstanten zu bestimmen und mit der Erfahrung zu vergleichen.

Die Theorie gründet sich auf ein vereinfachtes Metallmodell, in welchem die Verteilung der Valenzelektronen als konstant angenommen wird. Ähnlich wie bei den polaren Kristallen wird zunächst die Gitterenergie des Metalls als Funktion des Gitterabstandes der Atome bzw. als Funktion des Radius der Elementarkugel ermittelt, aus welcher dann alles weitere einfach folgt. Die Gitterenergie setzt sich einerseits aus der Energie des Metallelektronengases und andererseits aus jener Energie zusammen, welche aus der Wechselwirkung des Metallelektronengases mit den Ionen resultiert. Bezüglich der einzelnen Energieausdrücke verweisen wir auf die zitierten Arbeiten, insbesondere auf l. c. II.

Die Bindung des metallischen Calciums nebst den anderen Erdalkalimetallen wurde vom Verfasser schon in einer früheren Arbeit[2]) in erster Näherung behandelt, wobei in der Gitterenergie alle Glieder, welche von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt wurden. Dort wurde auch für die Gitterenergie und für die Kompressibilität der Erdalkalimetalle eine allgemeine Näherungsformel hergeleitet.

In einer weiteren Arbeit[3]) wurde dann die Bindung des metallischen Strontiums und Bariums in zweiter Näherung, also mit Berücksichtigung

---

[1]) P. Gombás, ZS. f. Phys. **94**, 473, 1935; **95**, 687, 1935; **99**, 729, 1936; **100**, 599, 1936; **104**, 81, 1936; **104**, 592, 1937, im folgenden als I zitiert; P. Gombás u. Gy. Péter, ZS. f. Phys. **107**, 656, 1937, im folgenden als II zitiert. — [2]) l. c. I. — [3]) l. c. II.

der Energien, welche von höherer Ordnung klein sind, behandelt und die wichtigsten Bindungskonstanten in sehr guter Übereinstimmung mit der Erfahrung bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wurde die Bindung des metallischen Calciums auf ganz dieselbe Weise wie die des metallischen Strontiums und Bariums in l. c. II berechnet, so daß wir hier bezüglich der Einzelheiten auf l. c. II verweisen. Für das Potential und die Elektronenverteilung des Ca^{++}-Ions, welche in die Rechnungen eingehen, wurden die von Hartree mit Berücksichtigung des Elektronenaustausches bestimmten tabellierten Funktionen[1]) benutzt. In der Tabelle 1 sind die Gitterenergie U und die einzelnen Energieanteile für verschiedene Werte des Radius, r_s, der Elementarkugel angegeben, deren Volumen dem Atomvolumen gleich ist. Die Bedeutung der einzelnen Energieanteile U_C, U_F, U_A, U_K, W_F und W_F', als deren Summe sich U zusammensetzt, ist dieselbe wie in l. c. II. In der Tabelle 1 sind r_s in a_H und die Energien in ε^2/a_H-Einheiten angegeben, wobei a_H den ersten H-Radius und ε die positive Elementarladung bezeichnet.

Tabelle 1. Die einzelnen Energieterme und deren Summe, die Gitterenergie, als Funktion von r_s.

r_s	3,6	3,8	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
U_C	− 1,00000	− 0,94737	− 0,90000	− 0,87805	− 0,85714	− 0,83721	− 0,81818
U_F	+ 0,27068	+ 0,24294	+ 0,21925	+ 0,20869	+ 0,19887	+ 0,18972	+ 0,18120
U_A	− 0,32070	− 0,30382	− 0,28863	− 0,28159	− 0,27488	− 0,26850	− 0,26239
U_K	− 0,07687	− 0,07196	− 0,07057	− 0,06991	− 0,06925	− 0,06860	− 0,06797
$W_F + W_F'$	+ 0,40962	+ 0,35494	+ 0,30936	+ 0,28941	+ 0,27113	+ 0,25441	+ 0,24012
U	− 0,71727	− 0,72527	− 0,73059	− 0,73145	− 0,73127	− 0,73018	− 0,72722

Eine graphische Interpolation ergibt, daß das Minimum von U bei $r_s = 4{,}14\ a_H$ liegt und $-\ 0{,}73155\ \varepsilon^2/a_H$ beträgt. Der Betrag des Minimums von U, den wir mit U_0 bezeichnen, gibt den Betrag der Gitterenergie in der Gleichgewichtslage. Den Radius der Elementarkugel in der Gleichgewichtslage bezeichnen wir mit R. Wenn man von U_0 die Summe der ersten und zweiten empirisch bestimmten Ionisierungsenergien J_1 bzw. J_2 des freien Ca-Atoms in Abzug bringt, erhält man die Sublimationsenergie, S, des metallischen Calciums. Die Resultate sind neben den empirischen Konstanten[2]) in der Tabelle 2 eingetragen. In der Tabelle 2 ist R in Å-Einheiten, die Energien sind in Kilogrammkalorien pro Mol angegeben.

[1]) D. R. Hartree u. W. Hartree, Proc. Roy. Soc. London (A) **104**, 167, 1938. — [2]) Die empirischen Konstanten sind den in l. c. I angegebenen Arbeiten entnommen.

Tabelle 2. Vergleich der theoretischen Resultate mit den experimentellen.

Theorie			Experiment				
R	U_0	S	R	U_0	S	J_1	J_2
2,19	456,2	43,0	2,17	452,4	39,2	140,5	272,7

Die Resultate stimmen sehr gut mit den empirischen überein. Besonders gut ist die Übereinstimmung bei R und U_0. Bei S, welche sich als Differenz zweier relativ großer Energien ergibt, ist der relative Fehler naturgemäß größer. Die hier erhaltenen Resultate wurden, wie schon erwähnt, in zweiter Näherung gewonnen. Wir geben hier zum Vergleich die in l. c. I erhaltenen Resultate der ersten Näherung an, welche die folgenden sind: $R = 2{,}80$ Å, $U_0 = 458{,}1$ kcal/Mol, $S = 44{,}9$ kcal/Mol. Die zweite Näherung führt also erwartungsgemäß zu einer Verbesserung der Resultate. Bezüglich der Genauigkeit der angewendeten Methode bzw. der erhaltenen Resultate gilt das am Schluß von l. c. II Gesagte.

Den Herren stud. phil. F. Berencz und J. Dombi danke ich für die Durchführung der numerischen Rechnungen.

Kolozsvár (Ungarn), Institut für theor. Phys. d. Univ., Nov. 1940.

(Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium II der Siemenswerke.)

Über den Einfluß der metastabilen Anregungszustände auf die normale Stromdichte und den normalen Kathodenfall der Glimmentladung in Edelgasen und Edelgasgemischen *).

Von **Joh. Meissner** in Berlin-Siemensstadt.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Januar 1941.)

Um den Einfluß der metastabilen Anregungszustände in Edelgasglimmentladungen zu untersuchen, wurde die Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze durch Messung der Druckabhängigkeit von Kathodenfall und normaler Stromdichte geprüft, denn nach Steenbeck muß die stufenweise Ionisation in reinen Gasen die Ähnlichkeitsgesetze stören. Zur Messung der normalen Stromdichte wurde dabei eine neuartige Methode entwickelt. Es zeigte sich, daß in den reinen Gasen die Ähnlichkeitsgesetze gelten, die Ionisationsprozesse im Gasraum durch metastabile Atome also vernachlässigt werden können. Bei Entladungen in Neon-Argon-Gemischen sinken normale Stromdichte und Kathodenfall stark ab, und es treten Abweichungen von den Ähnlichkeitsgesetzen auf. Bei einem Argonzusatz von etwa 0,5 % findet keine Kontraktion der Entladung mehr statt, was durch die Veränderung der Funktion $\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{\mathfrak{E}}{p}\right)$ bedingt ist. Für die auftretenden Abweichungen von den Ähnlichkeitsgesetzen muß wahrscheinlich ein Oberflächeneffekt an der Kathode verantwortlich gemacht werden. — Die große Differenz zwischen Zündspannungsminimum und Kathodenfall bei den Gasen, die metastabile Anregungszustände besitzen, wird auf die Elektronenauslösung an der Kathode durch metastabile Atome zurückgeführt.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schließt sich an die Untersuchungen von Schade[1]) über die stromdichtebegünstigte Entladung an, mit denen er nachweisen konnte, daß für die Neigung der Anfangscharakteristik in Edelgasentladungen diejenigen Ionisierungsprozesse verantwortlich zu machen sind, deren Anzahl mit dem Quadrat der Stromdichte ansteigt und daß es sich bei diesen Prozessen um Ionisationen beim Stoß metastabiler Atome gegeneinander handelt, wobei der eine Stoßpartner ionisiert wird, während der andere in den Grundzustand übergeht. Nachdem auch die Untersuchungen von Büttner[2]) die Bedeutung dieser Prozesse in der Townsendentladung nachgewiesen haben, liegt die Vermutung nahe, daß sie auch in

*) D 11.

[1]) R. Schade, Naturwissensch. **25**, 448, 1937; ZS. f. Phys. **108**, 353, 1938. — [2]) H. Büttner, ebenda **111**, 750, 1939. —

Glimmentladungen eine bedeutende Rolle spielen, denn hier werden Atome in metastabilen Anregungszuständen wegen der großen Stromdichten in viel stärkerem Maße erzeugt als in der Townsend-Entladung.

Unsere Kenntnisse über die Beeinflussung der Glimmentladung durch die metastabilen Anregungszustände beruhen zumeist auf Untersuchungen über Zündspannung und Spektrum von Entladungen in Gasgemischen, die dadurch charakterisiert sind, daß die Energie der metastabilen Atome des Hauptgases ausreicht, um das Zusatzgas durch Stoß zweiter Art zu ionisieren[1]). Diese zusätzliche Ionisation macht sich in einer Zündspannungserniedrigung bemerkbar, die als Penning-Effekt[2]) bezeichnet wird. Um den Einfluß der metastabilen Anregungszustände auf den Mechanismus der Glimmentladung zu erfassen, ist aber vor allem eine Untersuchung der kathodischen Entladungsteile erforderlich, weil diese den Charakter der Glimmentladung bestimmen. Hierüber liegen bisher nur wenige Arbeiten vor. de Groot[3]) hat festgestellt, daß die normale Stromdichte an stabförmigen Elektroden in Gemischen von Neon mit 1 bis 2% Argon kleiner ist als in reinen Gasen. Reichrudel und Spiwak[4]) finden als Ort größter Konzentration und damit als wesentlichsten Entstehungsort der metastabilen Atome das negative Glimmlicht. Ferner zeigen die genannten Verfasser, daß durch Bestrahlen der Entladung in Neon-Argon-Gemischen mit dem Licht einer Neonsäule der Kathodenfall steigt, was sie auf die Vernichtung von metastabilen Atomen durch Einstrahlung zurückführen.

Wie sich aus den Untersuchungen von Steenbeck[5]) ergibt, muß die in reinen Edelgasen auftretende stufenweise Ionisation durch Zusammenstoß von metastabilen Atomen mit Elektronen oder durch Zusammenstoß zweier metastabiler Atome die Holmschen Ähnlichkeitsgesetze[6]) stören, da die Anzahl derartiger Ionisationsprozesse mit dem Quadrat der Konzentration der metastabilen Atome, in erster Näherung also auch proportional dem Quadrat der Stromdichte ansteigt. Dagegen darf in Gasgemischen die den Penning-Effekt aufweisen, die Ionisierung des Zusatzgases durch die metastabilen Atome des Hauptgases die Ähnlichkeitsgesetze nicht stören.

---

[1]) Vgl. Literaturangaben im Handb. d. Phys. XXIII, 1, S. 775 ff., Berlin 1933. — [2]) F. M. Penning, Naturwissensch. **15**, 818, 1927; ZS. f. Phys. **46**. 335, 1927 und **72**, 338, 1931; Physica **10**, 47. 1930; Phil. Mag. **11**. 961, 1931; Physica **12**, 66. 1932 und **1**, 1028, 1934. — [3]) W. de Groot, Naturwissensch. **15**, 818, 1927. — [4]) E. Reichrudel u. G. Spiwak, Phys. ZS. d. USSR. **10**. 121, 1936. — [5]) M. Steenbeck, Wiss. Veröff. Siemens **11**. 36, 1932 und A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektr. Gasentladungen II, S. 97 ff., Berlin 1934. — [6]) R. Holm, Phys. ZS. **25**. 504. 1924.

Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde deshalb die Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze in den Edelgasen und Edelgasgemischen geprüft, indem die normale Stromdichte und der normale Kathodenfall in Abhängigkeit vom Gasdruck gemessen wurde.

Daneben wurde die Angabe von Schade[1]), daß die Differenz zwischen Kathodenfall und Zündspannungsminimum in denjenigen Gasen besonders groß ist, die metastabile Anregungszustände besitzen, experimentell untersucht. Da nach dem Extremalpostulat von Compton und Morse[2]) die sich in der Glimmentladung einstellende Feldstärke die energetisch günstigste ist, müßte der Kathodenfall mit dem Minimum der Zündspannung übereinstimmen, denn durch die Feldverzerrung allein können die Entladungsbedingungen nicht noch günstiger als im Zündspannungsminimum werden. Die trotzdem immer auftretende, bei den unedlen Gasen aber prozentual kleine Differenz läßt sich durch die Erhöhung der Ionisierung im Kathodenfallgebiet erklären, die dadurch zustande kommt, daß die Elektronen in Feldrichtung noch eine kleine Strecke mit der im größeren Felde aufgenommenen Energie laufen, ehe sie zum ionisierenden Stoß kommen[2]). Demgegenüber ist die große Differenz zwischen Kathodenfall und Zündspannungsminimum in den Edelgasen, auf die kürzlich auch Grigorivici[3]) hinwies, auffällig, und nach Schade[1]) läßt sich als deren Ursache eine Mitwirkung der metastabilen Anregungszustände vermuten.

Da sich nach Penning[4]) die Konzentration der metastabilen Atome in einer Edelgasentladung durch Einstrahlung des Lichtes einer positiven Säule des gleichen Gases verändern läßt, wurden auch Messungen der Stromdichte und des Kathodenfalles in Neon mit verschiedenen Argonzusätzen unter gleichzeitiger Bestrahlung vorgenommen. Nach Schade[1]) ist aber dabei eine Beeinflussung der Entladung nur in Gasgemischen zu erwarten[5]).

[1]) R. Schade, ZS. f. Phys. **108**, 353, 1938. — [2]) K. T. Compton und M. Morse, Phys. Rev. **30**, 305, 1927. — [3]) R. Grigorivici, ZS. f. Phys. **11**, 596, 1939. — [4]) F. M. Penning, ebenda **57**, 732, 1929. — [5]) Die bei der Einstrahlung wirksame Linie 6402 Å des Neons führt die metastabilen s_5-Zustände in den p_9-Zustand über. Nach Penning sollen sie von hier in den Grundzustand gelangen, was mit einer direkten Vernichtung der metastabilen Zustände gleichbedeutend wäre. Dagegen betont Schade, daß nach den Auswahlregeln vom p_9-Zustand nur wieder der Übergang in den s_5-Zustand möglich ist. Daraus erklärt Schade die Tatsache, daß die Neigung der Charakteristik in reinen Gasen durch die Einstrahlung nicht geändert wird. Dagegen wird in Neon-Argon-Gemischen bei der Einstrahlung die Zusatzgasionisation durch den hohen Energieüberschuß des p_9-Anregungszustandes gegenüber der Ionisierungsspannung des Argons vermindert. Damit ermöglicht die Einstrahlung das Erkennen kleinster Gasverunreinigungen und Verminderung der Einflüsse solcher Beimengungen auf die Entladung.

II. Meßmethode und Versuchsbedingungen.

1. Messung der normalen Stromdichte. Da die einfache Form der Ähnlichkeitsgesetze, wonach die Stromdichte proportional dem Quadrat des Gasdruckes ist, nur bei Entladungen an ebenen Elektroden gilt, waren die bekannten Methoden zur Messung der normalen Stromdichte, bei denen stabförmige Kathoden benutzt werden[1]), für die vorliegenden Untersuchungen ungeeignet. Bei den bisher bekannten Methoden zur Messung an ebenen Elektroden[2]) beeinflußt das Randgebiet der Entladung die Werte für die Stromdichte. Um diese Fehlerquelle auszuschließen, wurde ein Kathodensystem benutzt, das aus einer mittleren Scheibe und drei sie konzentrisch umgebenden Ringen bestand (Fig. 1a)[3]). An die mittlere Scheibe wird eine Überspannung in Höhe von etwa 10 Volt gelegt. Dadurch wird erreicht, daß die Entladung dort zündet und auch nach der Kontraktion dort weiter brennt. Erst wenn mit wachsender Stromstärke für die umgebenden Ringe die dem normalen Kathodenfall zugehörige Brennspannung erreicht ist, der Kathodenfall für die Scheibe S also schon etwas anormal ist, wird sich die Entladung von der mittleren Scheibe aus gleichmäßig über die Ringe ausbreiten, wobei die Brennspannung konstant bleibt, bis die Stromstärke so groß geworden ist, daß die Kathode vollständig bedeckt ist. Infolge des anormalen Kathodenfalles an der mittleren Scheibe herrscht aber dort eine erhöhte Ladungsträgerkonzentration, die eine Diffusion nach außen bedingt. Der Ring R_1 (Fig. 1a) dient nun dazu, das durch die abdiffundierenden Ladungsträger entstandene Übergangsgebiet von der Messung auszuschließen. Läßt man nun die Entladung

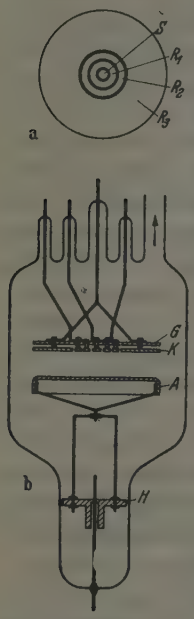


Fig. 1.
a) Kathodensystem,
b) Entladungsrohr.

[1]) N. Hehl, Phys. ZS. **3**, 547, 1902; H. S. Wilson, Phil. Mag. **4**, 608, 1902. J. Stark, Phys. ZS. **3**, 88, 1901; A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. **19**, 313, 1923; R. Seeliger u. M. Reger, Ann. d. Phys. **83**, 535, 1927. — [2]) C. A. Skinner, Phys. Rev. **5**, 483, 1915; W. L. Cheney, ebenda **7**, 241, 1916; W. Neuswanger, ebenda **7**, 253, 1916; A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. **20**, 1, 1923; A. v. Engel, R. Seeliger u. M. Steenbeck, Phys. ZS. **85**, 144, 1933; A. v. Muralt, Ann. d. Phys. **85**, 1117, 1928. — [3]) Eine Unterteilung wurde schon von R. Seeliger und M. Reger (Ann. d. Phys. **83**, 535, 1927) ohne Erfolg versucht, da es ihnen nicht gelang, homogene Kathodenoberflächen zu erhalten.

sich über den Ring R_2 und R_3 ausbreiten, so bleibt bei Gültigkeit des Hehlschen Gesetzes die Stärke des durch den Ring R_2 gehenden Stromes nach dessen vollständiger Bedeckung konstant, bis auch der Ring R_3 vollständig bedeckt ist. Aus der Größe dieser Stromstärke in dem konstanten Bereich bestimmt sich die normale Stromdichte durch Division durch den Flächeninhalt des Ringes R_2.

Das benutzte Entladungsgefäß (Fig. 1b) hatte einen Durchmesser von 10 cm. Die Kathodenteile K bestanden aus 0,5 mm starkem, im Vakuum geschmolzenen Nickelblech der Firma Heraeus. Die mittlere Scheibe S (s. Fig. 1a) hat einen Durchmesser von 8 mm, die äußeren Durchmesser der Ringe betragen 18,6, 27,2 und 80 mm. Die isolierenden Spalte zwischen den Ringen haben eine Breite von 0,3 mm. Auf der Rückseite der Kathodenringe sind kleine Schraubenmuttern aus Nickel aufgeschweißt, durch die eine Befestigung der Ringe auf einer Glimmerscheibe G ermöglicht wird, ohne daß das Blech direkt auf dem Glimmer aufliegt. Dies ist notwendig, weil sich sonst wegen der Kathodenzerstäubung bald eine leitende Schicht auf dem Glimmer zwischen den Ringen niederschlägt.

Als Anode A wurden bei Messungen in verschiedenen Rohren teils stabförmige, teils ebene Elektroden aus Nickelblech verwendet, deren Abstand von der Kathode verändert werden konnte. Dies konnte durch Drehen eines Eisenankers H mit einem Magneten von außen geschehen. Es bestätigte sich dabei die Angabe von Seeliger und Reger[1]), wonach die Stromdichte von der Stellung und der Form der Anode völlig unabhängig ist, solange die Entladung nicht behindert brennt. Die Elektroden wurden vor dem Einsetzen abgeschmirgelt und mit Xylol und Alkohol gewaschen. Vor dem Ansetzen des Rohres an die Pumpe wurde es nacheinander mit destilliertem Wasser und Methanol ausgewaschen. Dann wurde es an der Pumpe 5 bis 6 Stunden bei 500° ausgeheizt. Zwischen Pumpe und Rohr befand sich eine Kühlfalle mit flüssiger Luft, die Quecksilberdampf und andere kondensierbare Verunreinigungen fernhielt.

Zu den Messungen wurden die von der Firma Griesogen gelieferten spektralreinen Edelgase benutzt, die nach dem Durchströmen der Kühlfalle in das Entladungsrohr gelangten. Da aber die Untersuchungen zeigten, daß schon sehr kleine Verunreinigungen, besonders beim Neon, Stromdichte, Kathodenfall und Zündspannung merklich beeinflussen, wurde eine weitere Reinigung erforderlich. Dazu wurde das von Büttner[2]) benutzte Reinigungsverfahren angewandt, mit dem die unedlen Gase hinreichend entfernt

[1]) R. Seeliger u. M. Reger, Ann. d. Phys. **83**, 535, 1927. — [2]) H. Büttner, ZS. f. Phys. **111**, 750, 1939.

werden können: In einer mit dem Entladungsrohr verbundenen Kugel wird durch Verdampfen im Vakuum ein Bariumspiegel erzeugt. Um ein Beschlagen der Elektroden mit Bariumdampf besonders beim Ausheizen der Apparatur zu vermeiden, wurden Entladungsrohr und Bariumkugel durch eine zweite Kühlfalle mit flüssiger Luft getrennt. Es zeigte sich aber, daß auch dieses Verfahren nicht alle Beimengungen zu entfernen vermochte. Die Hauptverunreinigungen der angelieferten Edelgase sind vermutlich andere Edelgase, weil die vollständige Trennung der Edelgase technisch sehr schwierig ist. Es konnte deshalb eine Verunreinigung von schätzungsweise 10^{-4}% nicht beseitigt werden. Ihr Einfluß auf die gemessenen Größen der Entladung konnte aber durch Bestrahlen der Entladung mit dem Licht der positiven Säule desselben Edelgases zurückgedrängt werden[1]).

Von den benutzten unedlen Gasen wurde der Wasserstoff elektrolytisch gewonnen und durch Diffusion durch ein geheiztes Palladiumröhrchen gereinigt. Der Stickstoff wurde durch Erhitzen von Natriumazid dargestellt, der Sauerstoff aus Kaliumpermanganat entwickelt. Eine Veränderung der normalen Stromdichte durch die Temperaturerhöhung an der Kathode, die allgemein in der Literatur als bedeutende Fehlerquelle erwähnt wird[2]), war in den benutzten Edelgasen nur in sehr geringem Maße festzustellen. Offenbar ist die Stromdichte hier so klein, daß eine größere Erwärmung vermieden wird. In den unedlen Gasen, bei denen die Stromdichten über eine Größenordnung höher liegen, konnte nach dem Einschalten der Entladung ein Absinken der Stromdichte beobachtet werden. Es wurde deshalb die Ablesung immer gleich nach dem Einschalten der Entladung vorgenommen und zwischen zwei Versuchen immer Temperaturausgleich abgewartet. Die für die Stromdichtemessung benutzte Schaltung geht aus der Skizze (Fig. 2) hervor. Als Stromquelle dient ein 440 Volt-Generator und gelegentlich zusätzlich Akkumulatorenbatterien. Das Strombegrenzungsrohr R, das eine konstante Entladungsstromstärke sicherstellte, die durch Änderung des Heizstromes variiert werden konnte, war ein Siemens B. F.-Rohr. In der Fig. 3 sind einige Versuchsergebnisse dargestellt. Als Abszisse ist die Summe der Stromstärken durch die Ringe R_2 und R_3 (Fig. 1a), die mit I_G bezeichnet wird, aufgetragen, als Ordinate die Stromstärke I_K durch R_2. Mit steigender Gesamtstromstärke steigt der

[1]) Die dazu benutzte Versuchsanordnung entsprach der von Penning angegebenen (ZS. f. Phys. **57**, 732, 1929), wobei die positive Säule in einem spiralförmig gewundenen Rohr brannte, das die zu untersuchende Entladung umgab. — [2]) Vgl. z. B. R. Seeliger, Phys. d. Gasentladungen, 2. Aufl., S. 294, Leipzig 1934.

Strom durch die Meßelektrode I_E zunächst an, bis er bei ihrer vollständigen Bedeckung von der Gesamtstromstärke unabhängig wird. Nach vollständiger

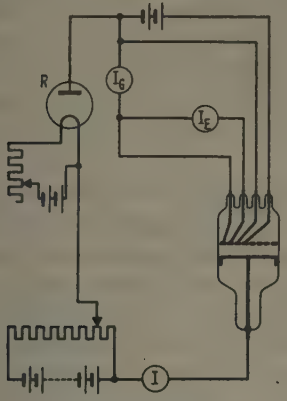


Fig. 2. Schaltung zur Messung der normalen Stromdichte.

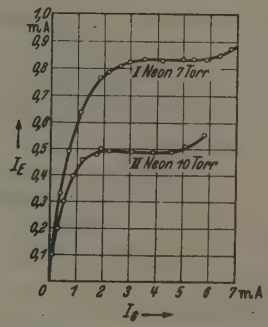


Fig. 3. Stromstärke I_E durch die Meßelektrode in Abhängigkeit vom Gesamtstrom I_G.

Bedeckung der ganzen Kathode steigt dann mit I_G auch I_E wieder an. Der konstante Wert von I_E liefert nach Division durch die Fläche des Ringes R_2 die normale Stromdichte.

2. Messung des normalen Kathodenfalles. Zur Messung des normalen Kathodenfalles wurde die von Güntherschulze[1]) und von Dällenbach[2]) angegebene Methode benutzt. Sie besteht darin, daß bei Veränderung des Elektrodenabstandes die Brennspannung gemessen wird. Bevor der Abstand so klein ist, daß eine Behinderung der Entladung auftritt, hat die Brennspannung in einem größeren Bereich einen konstanten Wert. Diese stellt nach Güntherschulze den normalen Kathodenfall dar. Wie Jung[3]) und Pike[4]) betonen, ist der Kathodenfall sehr empfindlich gegen Verunreinigungen der Kathode und des Füllgases. Die in den Handbüchern und Lehrbüchern über Gasentladungen angegebenen Zahlenwerte dürften deshalb, wie auch Seeliger[5]) betont, keinen Anspruch auf Genauigkeit haben, da sie zum Teil aus so alten Arbeiten[6]) stammen, daß bei den Mes-

[1]) A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. **28**, 129, 1924. — [2]) W. Dällenbach, Phys. ZS. **26**, 483, 1925. — [3]) C. Jung, Helv. Phys. Acta **4**, 189, 1931. — [4]) E. W. Pike, ZS. f. Phys. **90**, 319, 1934. — [5]) R. Seeliger, Physik d. Gasentladungen, 2. Aufl., S. 288, Leipzig 1934. — [6]) Vgl. Quellenangabe im Grätz, Handb. d. Elektr. u. d. Magn., Bd. XI, S. 854—855, Leipzig 1923.

sungen nicht einmal vakuumtechnisch die Möglichkeit bestand, die erforderliche Reinheit zu erreichen. Das zu den Messungen benutzte Entladungsrohr hatte zwei ebene Elektroden von 5 cm Durchmesser, deren Abstand verändert werden konnte. Die Vorbehandlung der Elektroden und des Rohres entsprach dem oben bei dem zur Stromdichtemessung verwendeten Rohre beschriebenen Verfahren, nur wurden hier die Elektroden vor der Messung noch mit Hochfrequenz im Vakuum ausgeglüht. Zur Gasreinigung diente wieder der Bariumspiegel.

Die Messung der Brennspannung wurde mit einem elektrostatischen Lichtzeigervoltmeter von Siemens & Halske durchgeführt, dessen Meßbereich durch eine Gegenspannung der zu messenden Spannung angepaßt wurde. Das Instrument erlaubt Ablesungen auf $^1/_{10}$ Volt Genauigkeit. In Fig. 4 ist ein typisches Versuchsergebnis dargestellt. Als Abszisse ist der Abstand Kathode—Anode und als Ordinate die Brennspannung aufgetragen. Bei sehr kleinen Abständen brennt die Entladung zunächst noch behindert. Mit größer werdendem Abstand fällt deshalb die Brennspannung ab, bis der Kathodenfall sich frei ausbilden kann. Bei weiterer Vergrößerung des Abstandes bleibt in einem breiten Gebiet die Brennspannung praktisch konstant, und ihr Wert gibt hier die Größe des Kathodenfalles an. Erst bei Ausbildung des Anodenfalles steigt sie dann plötzlich sehr steil an, geht aber wieder zu langsamem Anstieg über, wenn sich bei Vergrößerung des Elektrodenabstandes eine positive Säule ausbildet.

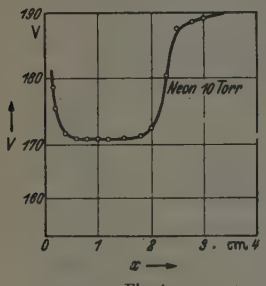


Fig. 4.
Abhängigkeit der Brennspannung vom Elektrodenabstand.

An dem gleichen Rohr wurde auch die Zündspannung bestimmt, indem die Brennspannung der Townsend-Entladung bei einer Entladungsstromstärke von 10^{-7} Amp. gemessen wurde. Als Strommesser diente hierbei ein Lichtzeigerinstrument von Siemens & Halske, das $6 \cdot 10^{-9}$ Amp. pro Skalenteil anzeigte. Durch Veränderung des Elektrodenabstandes konnte entsprechend das Minimum der Zündspannung bestimmt werden.

III. Ergebnisse der Messungen in reinen Gasen.

Nach den Ähnlichkeitsgesetzen ist zu erwarten, daß sich die Stromdichte proportional dem Quadrat des Druckes ändert. Der untersuchte Druckbereich liegt zwischen 4 und etwa 10 Torr. Diese Abgrenzung war nötig, da unterhalb 4 Torr das störende Randgebiet in einigen Gasen so

breit ist, daß dort für einwandfreie Messungen nicht garantiert werden kann. Oberhalb von 10 Torr Gasdruck sind bei der hohen Stromdichte Erwärmungen und damit Dichteänderungen des Gases an der Kathode nicht zu vermeiden, wodurch leicht eine unrichtige Druckabhängigkeit vorgetäuscht werden kann. Die in diesem Druckbereich durchgeführten Messungen zeigt Fig. 5, bei der der Logarithmus der Stromdichte gegen den Logarithmus des Druckes aufgetragen ist[1]). Die Versuchsergebnisse liefern in allen Fällen innerhalb der Meßgenauigkeit Geraden, denen eine Druckabhängigkeit der Stromdichte von der Form $j = j_0 \cdot p^b$ entspricht, wobei der Exponent b durch die Steigung der Geraden bestimmt ist. Bei den Entladungen in unedlen Gasen und in Argon sind die Exponenten gleich 2, die Ähnlichkeitsgesetze also erfüllt. In Neon und Helium dagegen treten merkliche Abweichungen vom Ähnlichkeitsgesetz auf. Es ergibt sich in beiden Fällen ein kleinerer Exponent als 2. Bei Bestrahlung der Entladung in diesen beiden Gasen mit dem Licht einer positiven Säule des gleichen Gases ergab sich bis zu einer bestimmten Stromstärke im Bestrahlungsrohr

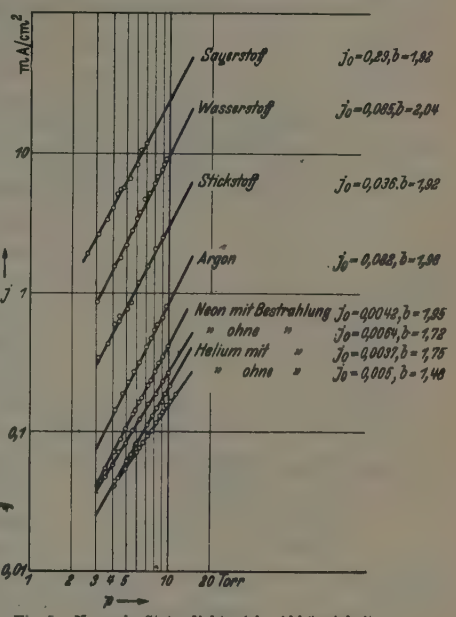


Fig. 5. Normale Stromdichte j in Abhängigkeit vom Gasdruck p.

[1]) Da bei den großen Stromdichten in unedlen Gasen die Entladungsstromstärke in dem oben beschriebenen Rohr größer wurde als die Strombegrenzungsrohre es zuließen, wurden für diese Messungen kleinere Kathoden benutzt, die aus einer kreisförmigen Meßelektrode und einem sie umgebenden Ring bestanden. Auf eine Fixierung des Glimmlichtes wurde hier also verzichtet. Die Ablesungen konnten deshalb erst dann vorgenommen werden, wenn das Glimmlicht die Kathode fast vollständig bedeckte. Dann erst war man sicher, daß die Meßelektrode völlig bedeckt war, was sich am Konstantbleiben des Meßelektronenstromes bis zur vollständigen Bedeckung der ganzen Kathode erkennen ließ.

eine Erhöhung der Stromdichte, und dabei wurde die Abweichung von den Ähnlichkeitsgesetzen geringer. So stieg im Helium der Exponent auf 1,75, und in Neon erreichte er sogar praktisch den Wert 2. Wie die Untersuchungen in Gasgemischen zeigen werden, sind die Abweichungen von diesen Exponenten in der unbestrahlten Entladung auf Verunreinigungen des Gases zurückzuführen, deren Einfluß durch die Bestrahlung zurückgedrängt wird. Sieht man also zunächst vom Helium ab, so kann nach den durchgeführten Messungen als bewiesen gelten, daß die Ähnlichkeitsgesetze in reinen Gasen Gültigkeit besitzen, daß also die in der Glimmentladung in reinen Edelgasen vorhandenen metastabilen Atome deren Gültigkeit nicht stören. Aber auch beim Helium ist es nicht erwiesen, daß die Abweichungen von den Ähnlichkeitsgesetzen auf Ionisationen bei Zusammenstößen metastabiler Atome untereinander zurückgeführt werden müssen. Es ist wahrscheinlicher, daß hier die Intensität der wirksamen Resonanzlinie der Einstrahlung nicht ausreichte, um den Exponenten 2 zu erreichen.

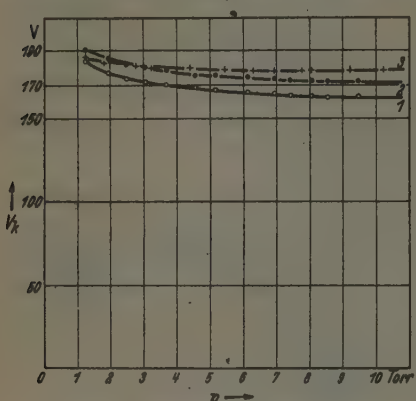


Fig. 6. Abhängigkeit des Kathodenfalles vom Druck.
1. Neon ohne Bestrahlung,
2. Neon mit Bestrahlung,
3. Argon.

Um eine zweite Bestätigung der Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze zu erhalten, wurde der Kathodenfall in Abhängigkeit vom Gasdruck untersucht. Dabei ergab sich nach Fig. 6 eine geringe, aber systematische Abnahme des Kathodenfalles mit steigendem Druck. In dem beobachteten Druckintervall von 4 bis 10 Torr fällt der Kathodenfall in Argon um 0,5%, in Neon um 4%. Da aber die Bestrahlung, wie Fig. 6 zeigt, keinen Einfluß auf diesen Abfall ausübt und die gleiche Abweichung vom Ähnlichkeitsgesetz von Güntherschulze[1]) auch bei den unedlen Gasen beobachtet wurde, ist ein Zusammenhang der Ursache hierfür mit den metastabilen Anregungszuständen unwahrscheinlich. Es liegt vielmehr nahe, diesen Effekt als einen Randeffekt zu deuten, da infolge der durch die Kathodenoberfläche vorgegebenen maximalen Gesamtausdehnung der normalen

[1]) A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. 49, 473, 1928.

Entladung das Randgebiet mit sinkendem Druck in bezug auf die ganze Entladung an Bedeutung gewinnt, wodurch der Kathodenfall ansteigen muß, um die Entladung aufrecht erhalten zu können. Danach können also, wenn man von diesen durch den Rand bedingten kleinen Abweichungen absieht, durch die Kathodenfallmessungen wie vorher durch die Stromdichtemessungen, die Ähnlichkeitsgesetze auch in den Gasen als gültig erwiesen gelten, die metastabile Anregungszustände besitzen.

IV. Ergebnisse der Messungen in Gasgemischen.

Brennt eine Entladung in einem Gemisch eines Hauptgases, das metastabile Anregungszustände besitzt, mit einem Zusatzgas, dessen Ionisierungs-

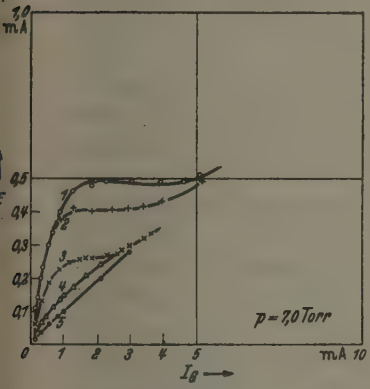


Fig. 7a.

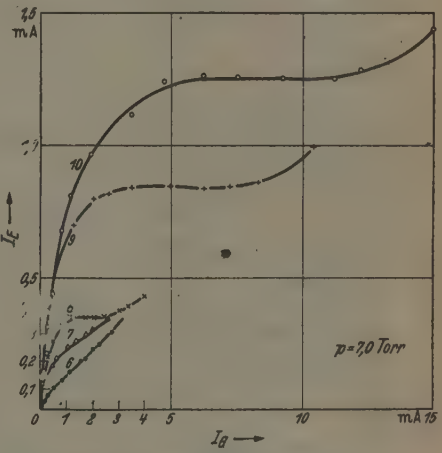


Fig. 7b.

Fig. 7a und b. Strom durch die Meßelektrode in Abhängigkeit vom Gesamtstrom in Neon-Argongemischen.

1. Reines Neon,	6. 1,1 % Argon,
2. $6 \cdot 10^{-4}$ % Argon,	7. 17,8 % Argon,
3. $4 \cdot 10^{-3}$ % Argon,	8. 32,2 % Argon,
4. $2 \cdot 10^{-2}$ % Argon,	9. 75,6 % Argon,
5. 10^{-1} % Argon,	10. Reines Argon.

spannung unter dem Anregungsniveau der metastabilen Zustände des Hauptgases liegt, so findet eine Ionisation des Zusatzgases durch die metastabilen Atome statt. Mit steigendem Prozentsatz des Zusatzgases gewinnt diese Ionisation solange an Bedeutung, bis alle metastabilen Atome des Hauptgases durch diesen Ionisierungsmechanismus vernichtet werden. Diese zusätzliche Erzeugung von Ladungsträgern macht eine Änderung der normalen Stromdichte und des normalen Kathodenfalles wahrscheinlich, wobei aber nach

Steenbeck[1]) die Ähnlichkeitsgesetze gültig bleiben müßten. Es wurde deshalb auch in verschiedenen Neon-Argon-Gemischen die Stromdichte und der Kathodenfall in Abhängigkeit vom Druck gemessen. Zum Vergleich wurde dabei auch das Minimum der Zündspannung bestimmt, wodurch entsprechende Messungen von Penning und Addink[2]) an Eisenelektroden auf Nickelelektroden ausgedehnt wurden.

Das Ergebnis der Stromdichtemessungen in verschiedenen Gemischen für den Druck $p = 7$ Torr ist in Fig. 7a und b zusammengestellt, die wieder

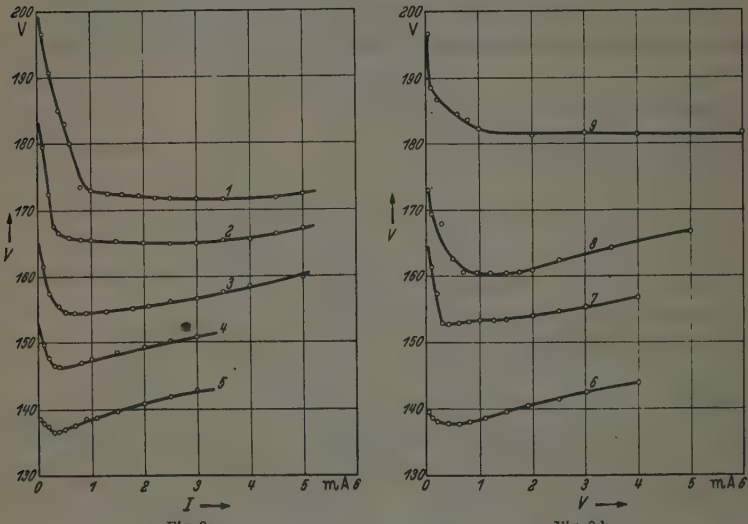


Fig. 8a. Fig. 8b.

Fig. 8a und b. Brennspannung in Abhängigkeit von der Entladungsstromstärke in Neon-Argon-Gemischen.

1. Reines Neon,
2. 10^{-3} % Argon,
3. $2 \cdot 10^{-3}$ % Argon,
4. 10^{-1} % Argon,
5. $5 \cdot 10^{-1}$ % Argon,
6. 1,1 % Argon,
7. 9,3 % Argon,
8. 17,6 % Argon,
9. Reines Argon.

die Abhängigkeit der Stromstärke durch die Meßelektrode von der Gesamtstromstärke der Entladung angibt. Die normale Stromdichte sinkt zunächst mit steigendem Argonprozentsatz ab (Fig. 7a). Oberhalb von $5 \cdot 10^{-3}$ % Argon kontrahiert die Entladung nur noch so wenig, daß mit der gegebenen

[1]) M. Steenbeck, Wiss. Veröff. Siemens **11**, 36, 1932 u. A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektr. Gasentladungen II, S. 97 ff., Berlin 1934. — [2]) F. M. Penning u. C. C. Addink, Physica **1**, 1007, 1934.

Elektrodenanordnung kein normales Gebiet mehr festzustellen ist. Die Entladung bedeckt dann schon bei kleinsten Stromstärken die ganze Kathode, wobei das Licht der Entladung im Vergleich zur Glimmentladung im reinen Gase weit von der Kathode entfernt ist und als diffuse Wolke mit geringer nach außen abfallender Intensität zwischen Anode und Kathode erscheint.

Entsprechende Ergebnisse liefern die Kathodenfallmessungen. Während in reinen Gasen der Kathodenfall unabhängig von der Gesamtstromstärke ist, solange die Kathode nicht vollständig bedeckt ist, läßt sich dieses normale Gebiet bei den Gasgemischen mit 10^{-1} bis 10^{-2}% Argongehalt nicht mehr erkennen (Fig. 8a und b)[1]). Bei diesen fällt mit steigender Stromstärke der Entladung die Brennspannung von der Zündspannung aus zunächst schwach ab, was noch einer geringen Kontraktion gleichkommt, steigt aber dann gleich wieder wie im anormalen Gebiet an. Bei größeren Argonzusätzen steigt dann Stromdichte und Kathodenfall wieder an (Fig. 7b und 8b). Bei etwa 20% Argon tritt wieder ein normales Gebiet auf, und die beiden gemessenen Größen nähern sich dann stetig den Werten für reines Argon.

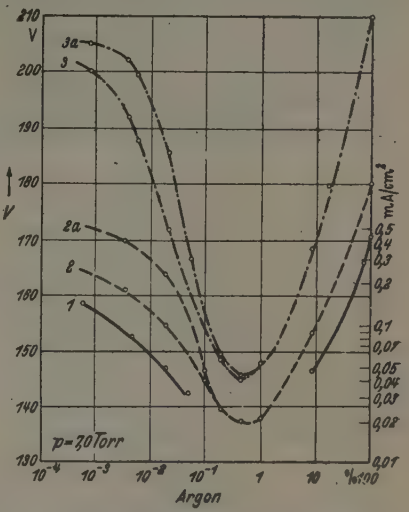


Fig. 9. Normale Stromdichte und Minimum der Brennspannung in Abhängigkeit vom Argonzusatz.
1. Normale Stromdichte,
2. Minimum der Brennspannung (Kathodenfall),
2a. Minimum der Brennspannung bei Bestrahlung,
3. Minimum der Zündspannung,
3a. Minimum der Zündspannung bei Bestrahlung.

In Fig. 9 sind die Versuchsergebnisse für die normale Stromdichte, den Kathodenfall als Minimum der Brennspannung und das Minimum der Paschenschen Zündspannungskurven in Abhängigkeit von den Argonbeimengungen zusammengestellt. Es folgt daraus, daß zwischen 10^{-3} und 10^{-1}% Argon die Stromdichte, der Kathodenfall und die kleinste Zündspannung ein Minimum durchlaufen. Der Vergleich dieser Beobachtungen

[1]) Der Elektrodenabstand war bei diesen Versuchen so gewählt, daß die Brennspannung gleich dem Kathodenfall ist.

mit der von Kruithof und Penning[1]) aufgenommenen Funktion $\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{\mathfrak{E}}{p}\right)$ in Gasgemischen zeigt, daß sich der starke Abfall von Stromdichte, Kathodenfall und Zündspannung auf eine Änderung dieser Funktion zurückführen läßt, und zwar verschiebt sich die Feldstärke, bei der die kleinste Energie zur Bildung eines Ionenpaares gebraucht wird, nach kleineren Werten.

Aus den Kurven 2a und 3a in Fig. 9 ergibt sich auch, daß im Gebiet der kleinsten Kontraktion ein Einfluß der Bestrahlung nicht mehr festgestellt werden kann, weil hier, wie schon die Penningschen und Schadeschen Untersuchungen ergeben haben, die Lebensdauer der metastabilen Atome infolge ihrer schnellen Vernichtung am zugesetzten Argon zu gering ist für eine Absorption des eingestrahlten Lichtes.

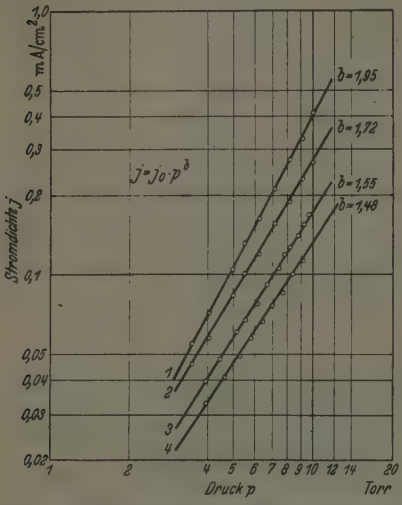


Fig. 10. Normale Stromdichte in Abhängigkeit vom Druck in Gasgemischen.
1. Neon mit Bestrahlung,
2. Neon,
3. Neon mit $2 \cdot 10^{-3}$% Argon,
4. Neon mit $4 \cdot 10^{-3}$% Argon.

Zur Prüfung der Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze konnten nur Neon-Argon-Gemische benutzt werden, deren Argongehalt unter $5 \cdot 10^{-3}$% lag, weil bei größeren Zusätzen ein normales Gebiet der Entladung nicht mehr festgestellt werden kann. Wie Fig. 10 zeigt, kann die Druckabhängigkeit der normalen Stromdichte innerhalb der Meßgenauigkeit in der Form $j = j_0 \cdot p^b$ angegeben werden. Der Exponent b fällt aber mit steigendem Prozentsatz des Zusatzgases ab. Die Ähnlichkeitsgesetze gelten in Gasgemischen also nicht.

Eine zweite Bestätigung dieses unerwarteten Ergebnisses liefern die entsprechenden Messungen im Argon-Quecksilbergemisch. Neben dem Entladungsgefäß wurde am Pumparm eine Glasröhre angesetzt, in die ein Tropfen Quecksilber gebracht war. Während des Ausheizens wurde das

[1]) A. A. Kruithof u. M. F. Penning, Physica 4, 430, 1937.

Quecksilber mit flüssiger Luft gekühlt. Das Entladungsgefäß wurde dann mit Argon gefüllt. Solange die flüssige Luft das Verdampfen des Quecksilbers verhinderte, erwiesen sich die Ähnlichkeitsgesetze als gültig. Ließ man aber das Quecksilber sich auf Zimmertemperatur erwärmen, so traten zunächst unreproduzierbare Schwankungen in der Größe der normalen Stromdichte auf, die vielleicht auf Oberflächenveränderungen der Kathode zurückgeführt werden können. Als aber, nachdem das Quecksilber einen Tag im Entladungsgefäß anwesend war, das Rohr mit Argon neu gefüllt wurde, ergab sich die Kurve 2 in Fig. 11, die dann auch noch nach Tagen

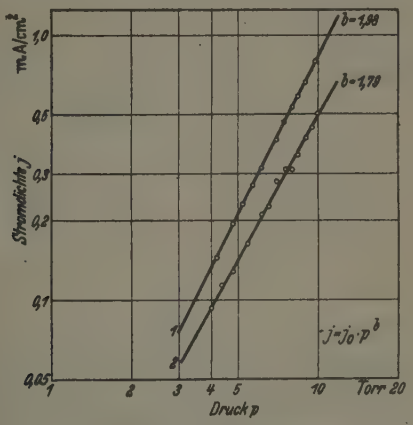


Fig. 11. Normale Stromdichte in Abhängigkeit vom Druck p.
1. Reines Argon,
2. Argon-Quecksilber-Gemisch.

reproduzierbar war. Wie die Fig. 11, die die Stromdichte in reinem Argon mit der im Argon-Quecksilber-Gemisch vergleicht, zeigt, tritt auch hier wie im Neon-Argon-Gemisch eine Abweichung vom p^2-Gesetz und damit von den Ähnlichkeitsgesetzen auf.

Durch diese Meßergebnisse ist es wahrscheinlich gemacht, daß auch die bei dem benutzten, als „spektralrein" bezeichneten Neon und Helium gefundenen Abweichungen vom Ähnlichkeitsgesetz, die durch Bestrahlung zurückgedrängt werden können, auf geringe Verunreinigungen zurückzuführen sind. Auch der Anstieg des Kathodenfalles in reinem Neon bei Bestrahlung, wie er schon von Reichrudel und Spiwak[1]) beobachtet wurde, läßt auf solche Verunreinigungen des Gases schließen.

[1]) E. Reichrudel u. G. Spiwak, Phys. ZS. d. USSR. **10**, 121, 1936.

V. Ergebnisse der Vergleichsmessungen von Kathodenfall und Zündspannungsminimum.

Die Ergebnisse der Kathodenfallmessungen in verschiedenen Gasen und die des Minimums der Zündspannung sind in Tabelle 1 gegenübergestellt. Wie erwartet, liegt bei allen Gasen der Kathodenfall unter dem Zündspannungsminimum. Die Differenz ist aber bei den unedlen Gasen prozentual kleiner, als bei den Edelgasen, obwohl bei diesen die Feldverzerrung wegen des kleineren Kathodenfalles und der größeren Dunkelraumdicke viel geringer ist. Es kann also bei den Edelgasen die Differenz nicht allein durch den Einfluß der Feldverzerrung erklärt werden.

Tabelle 1. Kathodenfall V_K und Minimum der Zündspannung V_Z min.

Gas	Kathodenfall	Zündspannungsminimum	Prozentuale Differenz
Helium	159	223	28,6
Neon	172	205	16,4
Argon	181	210	14,3
Stickstoff	242	277	12,6
Wasserstoff	271	285	4,9
Sauerstoff	370	430	13,9

Nimmt man aber die Messungen der beiden Größen im Neon-Argon-Gemisch bei dem Argonprozentsatz vor, bei dem beide ein Minimum haben, so ergibt sich eine Differenz zwischen ihnen von etwa 7%, während sie sich in reinem Neon um 16,4% und in reinem Argon um 14,8% unterscheidet. Da bei diesem Argonprozentsatz die Lebensdauer der metastabilen Atome des Neons infolge der Ionisation des Argons sehr klein ist, wird damit ein Zusammenhang der großen Differenz im reinen Gase mit der Anwesenheit von metastabilen Atomen wahrscheinlich.

VI. Diskussion der Versuchsergebnisse.

Die beschriebenen Messungen haben gezeigt, daß bei der Glimmentladung in reinen Edelgasen das Hehlsche Gesetz und die Ähnlichkeitsgesetze gelten. In Neon-Argon-Gemischen sind infolge der Ionisation des Zusatzgases die Werte für Stromdichte, Kathodenfall und Zündspannung kleiner als bei den reinen Gasen. Bei denjenigen Argonzusätzen, bei denen die Zündspannung ein Minimum hat, wird die Kontraktion der Entladung so gering, daß das Hehlsche Gesetz nicht mehr nachgewiesen werden konnte. Ferner zeigten sich bei den Gasgemischen Abweichungen vom

Ähnlichkeitsgesetz, die aber durch Bestrahlung der Entladung mit dem Licht einer positiven Säule des gleichen Gases vermindert werden können.

Schließlich wurde durch die Messungen bestätigt, daß in den reinen Edelgasen die Differenz zwischen dem Kathodenfall und dem Minimum der Zündspannung auffallend groß ist. In Neon-Argon-Gemischen ist diese Differenz viel kleiner als in den reinen Gasen. Aus diesen Meßergebnissen sollen nun Schlüsse über die Rolle der metastabilen Atome in der Glimmentladung gezogen werden.

1. Stufenweise Ionisation über metastabile Atome. Aus der Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze in reinem Neon und Argon folgt nach den Steenbeckschen Untersuchungen, daß die stufenweise Ionisation über metastabile Atome hier gegenüber der Elektronenionisierung von untergeordneter Bedeutung sein muß. Da aber in der Glimmentladung wegen der größeren Stromdichte die metastabilen Atome in größerer Zahl erzeugt werden als in der Townsend-Entladung, erscheint diese Tatsache im Hinblick auf die Schadeschen Arbeiten, in denen die Bedeutung der stufenweisen Ionisation über metastabile Atome in der Townsend-Entladung nachgewiesen wird, überraschend. Im Gegensatz zu dieser wird aber in der Glimmentladung nur ein kleiner Teil der gebildeten metastabilen Atome in demjenigen Gebiet des Entladungsraumes Ionisationsprozesse verursachen, in dem diese für Stromdichte und Kathodenfall von Bedeutung sind. Da nämlich die meisten metastabilen Atome in der Nähe des Glimmsaumes gebildet werden, diffundieren sie von hier aus in erster Linie zur Kathode hin, an der sie beim Aufprall vernichtet werden. Die Konzentration der metastabilen Atome ist also im Kathodenfallgebiet verhältnismäßig klein, und daher werden die meisten die Kathode auch erreichen, ohne im Gebiet des Kathodenfalles mit einem anderen metastabilen Atom zusammenzustoßen. Dies folgt auch aus den Messungen von Herrn A. Hoffmann[1]) in unserem Laboratorium, nach denen die Lebensdauer der metastabilen Zustände allein durch den Abstand der Wände und die Größe der Elektroden bestimmt ist und linear mit dem Druck wächst. In der Glimmentladung tritt der Einfluß der stufenweisen Ionisation in den reinen Edelgasen also zurück gegenüber den anderen Ionisierungsprozessen.

Die Ergebnisse der Stromdichte- und Kathodenfallmessungen in Neon-Argon-Gemischen lassen sich, wie schon gezeigt wurde, durch die Ionisation von Argonatomen beim Zusammenstoß mit den metastabilen Atomen des Neons erklären. Die gemessenen Abweichungen von der

[1]) Erscheint demnächst in ZS. f. Phys.

quadratischen Druckabhängigkeit der normalen Stromdichte (Fig. 10 und 11) können aber nicht auf diesen Prozeß zurückgeführt werden, denn nach Steenbeck[1]) kann dieser die Ähnlichkeitsgesetze nicht stören. Auch die von Büttner[2]) angegebene Bedingung, wonach bei ähnlichen Entladungen auch das Verhältnis des Elektrodenabstandes zum Elektrodendurchmesser konstant sein muß, mit der er das Absinken der Zündspannung bei steigendem Druck und konstantem $p \cdot d$ deutet, ist in der Glimmentladung von untergeordneter Bedeutung, solange ein normales Gebiet bei der gegebenen Elektrodenanordnung existiert, und nur das Innere des Gebietes zur Messung benutzt wird, wie es bei den vorliegenden Messungen der Fall war. Auch die Anreicherung der Argonatome im Gasraum vor der Kathode, wie sie durch die bevorzugte Ionisation des Argons verursacht wird, reicht bei den im untersuchten Druckgebiet gemessenen Stromdichten nicht aus, um die Größe der Abweichung zu erklären, wie eine einfache Abschätzung ergibt.

Es gewinnt deshalb ein Oberflächeneffekt auf der Kathode an Wahrscheinlichkeit, an dem aber, wie aus den Bestrahlungsversuchen folgt, sowohl metastabile Atome als auch Zusatzgasatome beteiligt sein müssen. Zur Deutung sei auf die mit der Stromdichte ansteigende Beladung der Kathode mit Argon hingewiesen, die durch die bevorzugte Ionisation des Argons verursacht wird. Sichere Angaben darüber können aber erst dann gemacht werden, wenn über die Veränderungen der Kathodenoberfläche durch die Entladung Näheres bekannt ist.

2. Elektronenauslösung an der Kathode durch metastabile Atome. Die Meßergebnisse der Tabelle 1 haben gezeigt, daß die Differenz zwischen Kathodenfall und dem Minimum der Zündspannung in denjenigen Gasen besonders groß ist, die metastabile Anregungszustände besitzen. Auch durch die Messungen in Neon-Argon-Gemischen, durch die gezeigt wurde, daß die Differenz der beiden Größen am kleinsten ist, wenn die anwesenden Argonprozentsätze gerade zur Vernichtung aller metastabilen Atome durch Argonionisation ausreichen (Fig. 9), hat sich deren Mitwirkung bestätigt. Da aber Ionisationen durch Stoß zweiter Art in reinen Gasen nicht von Bedeutung sind, liegt es nahe, die Differenz aus der Elektronenauslösung durch die metastabilen Atome an der Kathode zu erklären, wie sie von verschiedenen Autoren angenommen wird[3]). Da prozentual in der Glimm-

[1]) M. Steenbeck, Wiss. Veröff. Siemens **11**, 36, 1932 und v. Engel und M. Steenbeck, Elektr. Gasentladungen II, S. 97, Berlin 1934. — [2]) H. Büttner, ZS. f. Phys. **111**, 750, 1939. — [3]) F. M. Penning, ZS. f. Phys. **78**, 454, 1932; J. J. Glotow, Phys. ZS. d. USSR. **12**, 235, 1937; E. Reichrudel u. G. Spiwak, Ann. d. Phys. **17**, 65, 1933; Phys. ZS. d. USSR. **10**, 121, 1936.

entladung viel mehr metastabile Atome an der Kathode vernichtet werden, weil sie in größerer Kathodennähe erzeugt werden, können auch durch sie mehr Elektronen an der Kathode ausgelöst werden, als in der Townsend-Entladung, wo die metastabilen Atome hauptsächlich an der Anode vernichtet werden. Dies ist einer Vergrößerung der Ionisierungszahl γ gleichbedeutend, wodurch die Brennspannung der Entladung absinkt. Es macht sich also die Elektronenauslösung durch die metastabilen Atome an der Kathode durch die große Differenz zwischen dem Kathodenfall und dem Minimum der Zündspannung bemerkbar.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Forschungslaboratorium II der Siemens-Werke ausgeführt. Ich erlaube mir, auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. G. Hertz für sein stets förderndes Interesse und für viele wertvolle Diskussionen herzlichst zu danken. Auch Herrn Dr. Ing. habil. R. Schade bin ich für viele Anregungen und Ratschläge bei der Planung und Durchführung der Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Strahlungsausbeute, Farbe und Temperatur des Beck-Bogens.

Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. V.

Von **H. Schluge** und **W. Finkelnburg** in Darmstadt.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Januar 1941.)

Es wird eine kombinierte kalorimetrisch-thermoelektrische Methode zur Messung der Strahlungsausbeute beschrieben und für den Beck-Bogen eine Gesamtstrahlungsausbeute von $71 \pm 3\%$ unabhängig von der Anodenbelastung und vom Kohlendurchmesser ermittelt; eine Abweichung zeigt lediglich die 5 mm-Kohle. Bei Berücksichtigung der Verbrennungswärme vermindert sich die Strahlungsausbeute um höchstens 8%. Weiter wird eine Methode zur Messung der Farbe der Beck-Bogenstrahlung angegeben und gezeigt, daß der Zunahme des Farbindex nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz eine Zunahme der Anodenflammentemperatur mit der Belastung entsprechen muß. Eine Deutung der experimentellen Ergebnisse wird versucht.

1. Einleitung.

In einer Anzahl von Arbeiten[1]) über den Hochstromkohlebogen und insbesondere über seine als Beck-Bogen bekannte technische Anwendungsform wurde der Mechanismus der intensiv strahlenden Anodenflamme untersucht und ein Zusammenhang zwischen Anodenfall, Anodenverdampfung und Anodenflammen-Entwicklung aufgezeigt.

Für den weiteren Ausbau der Theorie war es wichtig, zu wissen, welcher Anteil der im Bogen umgesetzten elektrischen Leistung in Strahlung aller Wellenlängen umgesetzt wird. Diese Gesamtstrahlungsausbeute wurde bisher unseres Wissens niemals direkt gemessen. In der vorliegenden Arbeit wird eine einfache Meßmethode beschrieben und das Ergebnis dieser Messung für den Beck-Bogen mitgeteilt. Die Strahlungsausbeute ist sehr hoch, nämlich 71%, und ist, von einer Ausnahme abgesehen, vom Kohlendurchmesser und der Belastung unabhängig.

Im Zusammenhang mit der Deutung dieses Ergebnisses erhebt sich die Frage, ob die Zunahme der Beck-Bogen-Strahlung mit der Stromstärke auf einem Zuwachs der Schichtdicke des leuchtenden Dampfes beruht oder auf einem Anstieg der Temperatur. Es wird deshalb untersucht, wie die Leuchtdichte des Anodenflammen-Plasmas bei konstanter Schichtdicke von der Stromstärke abhängt; es wird weiter festgestellt, daß sich die Farbe

[1]) W. Finkelnburg, ZS. f. Phys. **112**, 305; **113**, 562; **114**, 734, 1939; **116**, 214, 1940; im folgenden stets mit „I", „II", „III" und „IV" zitiert.

der Anodenflammenstrahlung mit der Stromstärke gemäß dem Wienschen Verschiebungsgesetz ändert, die Anodenflammentemperatur also mit der Stromstärke zunehmen muß.

Alle Messungen wurden am frei brennenden Gleichstrombogen ausgeführt, und zwar an verkupferten Positivkohlen Marke RW Sola Effekt 134 der Ringsdorff-Werke von 5, 7, 9 und 11 mm Durchmesser mit entsprechend dünneren Negativkohlen RW Gamma D.

2. Die kalorimetrische Messung der Gesamtstrahlung in Richtung der Achse der Positivkohle.

Da bei der Messung der Strahlungsausbeute die Strahlung aller Wellenlängen erfaßt werden sollte, kamen nur Thermosäule und Strahlungskalorimeter als Meßgeräte in Frage. Zur Bestimmung der gesamten Abstrahlung des Bogens wurde deshalb eine kombinierte Messung mit beiden

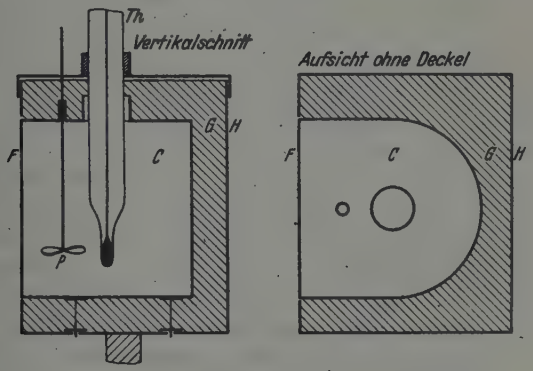


Fig. 1. Strahlungskalorimeter in Schnitt und Aufsicht.

Instrumenten ausgeführt, indem die Winkelverteilung der Strahlung mit der Thermosäule gemessen wurde, während zur Bestimmung des Absolutwertes der Strahlung in Richtung der Achse der Positivkohle ein Strahlungskalorimeter benutzt wurde, dessen Hauptvorteil ist, daß ohne Eichung die Strahlung direkt in Watt gemessen wird.

Das für die Messung konstruierte Strahlungskalorimeter bestand aus einem mit Wasser gefüllten Gefäß C aus dünnem Kupferblech, das Fig. 1 im Seitenschnitt und Aufriß zeigt. Die der Strahlung ausgesetzte Fläche F war mit Benzolruß geschwärzt. Das Kalorimetergefäß befand sich zum Schutz gegen Wärmeleitung in einem mit Glaswolle G ausgefüllten Gehäuse H.

Zur Ablesung der Temperatur diente ein Quecksilberthermometer *Th*, das die Zehntelgrade abzulesen und die Hundertstel zu schätzen erlaubte. Als Rührer wurde ein kleiner Propeller *P* verwendet.

Das Prinzip der Messung war das folgende: Gemessen wurde die Temperaturänderung im Kalorimeter in Abhängigkeit von der Zeit, und zwar in einem Temperaturintervall von wenigen Graden unterhalb bis zu wenigen Graden oberhalb der Zimmertemperatur (vgl. das Meßbeispiel Fig. 2!). Aus der Größe des Temperaturanstiegs im Punkt der Zimmertemperatur errechnet sich dann leicht die sekundlich eingestrahlte Energie:

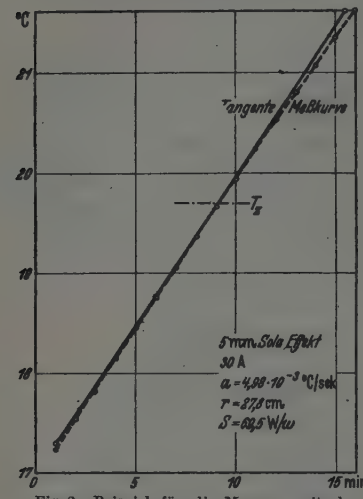


Fig. 2. Beispiel für die Messung mit dem Strahlungskalorimeter: Zunahme der Temperatur bei Bestrahlung mit der 30 Amp. 5 mm-Sola Effekt 134.

Wird nämlich das Kalorimeter der Strahlung ausgesetzt, so ist die Temperaturänderung mit der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a + b\,(T_Z - T). \quad (1)$$

Dabei ist a der allein durch die Einstrahlung bewirkte Temperaturanstieg in °C/sec. Der zweite Term in (1) ist die durch den Wärmeaustausch mit der Umgebung bewirkte Temperaturänderung, die der jeweiligen Differenz zwischen Zimmertemperatur und Kalorimetertemperatur proportional ist.

Durch Trennung der Veränderlichen kann man integrieren:

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}T}{a + b\,(T_Z - T)} = \int_0^t \mathrm{d}t. \quad (2)$$

$$-\frac{1}{b}\ln\left(a + (T_Z - T)\right) = t, \quad (3)$$

$$\ln\left(a + b\,(T_Z - T)\right) = -\,b \cdot t. \quad (4)$$

Durch Entlogarithmieren und Auflösen nach T erhält man daraus

$$a + b\,(T_Z - T) = e^{-bt}, \quad (5)$$

$$T = \frac{a + b\,T_Z - e^{-bt}}{b}. \quad (6)$$

Im wesentlichen stellt diese Gleichung eine Sättigungskurve dar, deren Verlauf nur in einem Punkt interessiert: Im Punkt $T = T_Z$ ist

$$b\,(T_Z - T) = 0$$

und das Steigungsmaß der Tangente ist

$$\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = a, \tag{7}$$

d. h. ein Maß des allein durch die Einstrahlung bewirkten Temperaturanstiegs des Kalorimeters in °C/sec.

Für die Auswertung benötigen wir die Einstrahlung in Watt in die Raumwinkeleinheit senkrecht zur Kraterstirnfläche. Wir rechnen dazu folgendermaßen um.

Der Wasserwert des Kalorimetergefäßes einschließlich Thermometer und Rührer wurde zu 14 cal/°C bestimmt. Die Füllung betrug 100 cm^3 Wasser, der Wasserwert insgesamt folglich 114 cal/°C. Für die sekundliche Einstrahlung in cal ergibt sich also

$$A = a \cdot 114\ \mathrm{cal/sec}$$

und wegen

$$1\ \mathrm{cal} = 4{,}186\ \mathrm{Wattsec}$$

$$A = a \cdot 114 \cdot 4{,}186\ \mathrm{Watt}. \tag{9}$$

Die der Einstrahlung ausgesetzte Fläche des Kalorimeters betrug 26 cm^2, so daß wir für die Einstrahlung pro cm^2 erhalten

$$B = a \cdot \frac{114 \cdot 4{,}186}{26}\ \mathrm{Watt/cm^2}. \tag{10}$$

Um die Einstrahlung in die Raumwinkeleinheit zu erhalten, muß noch mit dem Quadrat des Abstands zwischen Bogenkrater und Kalorimeter (r) multipliziert werden. Dieser wurde bei der Ausführung der Versuche so groß gewählt, daß der Bogen als punktförmig angesehen werden konnte und die der Strahlung ausgesetzte Fläche vollkommen gleichmäßig ausgeleuchtet war. Die Größe

$$S = a \cdot r^2 \cdot 18{,}35\ \mathrm{Watt}/\omega \tag{11}$$

gibt also jetzt die Strahlung des Lichtbogens in die Raumwinkeleinheit, d. h. auf 1 cm^2 in 1 cm Abstand vom Krater in Richtung der Achse der Positivkohle an. Fig. 2 zeigt die Berechnung von S an einem Beispiel. Die gesamten S-Werte sind aus der Zusammenstellung der Ergebnisse Tabelle 1 zu ersehen. Dabei ist die Reflexion der geschwärzten Kraterfläche F nicht berücksichtigt worden: alle S-Werte dürften daher um etwa 2% zu klein sein. Im übrigen ist der mittlere Fehler der S-Werte durch die Ungenauigkeit

der kalorimetrischen Messung gegeben; er wurde durch Vergleich mehrerer Messungen $\pm 1\%$ bestimmt.

3. Die Messung der Winkelverteilung der Strahlung.

Nachdem die Strahlung in Richtung der Anodenachse kalorimetrisch absolut bestimmt war, genügen für die Messung der Winkelverteilung relative Angaben. Letztere wurde deshalb mit Hilfe einer Thermosäule

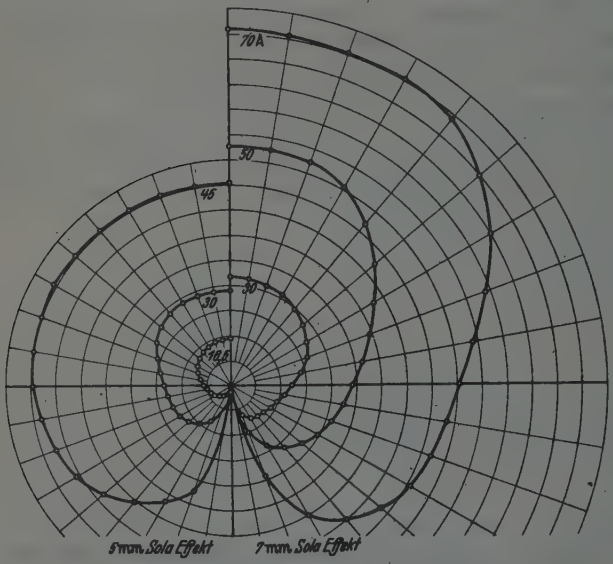


Fig. 3. Winkelverteilung der Strahlung der RW Sola Effekt 134 von 5 mm und 7 mm Durchmesser bei verschiedenen Stromstärken.

bestimmt, nachdem die lineare Abhängigkeit der Thermo-EMK. von der Strahlung mittels des quadratischen Abstandsgesetzes geprüft und innerhalb der Fehlergrenzen von $\pm 2\%$ bestätigt worden war.

Die Thermosäule von Kipp und Zonen war an einem rechtwinklig gebogenen Arm befestigt, der um einen senkrecht unter dem Lichtbogen befindlichen Punkt drehbar war. Die Thermosäule wurde nun in der Horizontalebene, die durch die Positivkohle geht, im Kreise um den Lichtbogen bewegt. Der Radius des Kreises war wieder so groß, daß der Krater als punktförmig angenommen werden konnte. Die Ablesung erfolgte von 10^0 zu 10^0 im Bereich von 0^0 bis 160^0, wenn die Richtung der Positivkohle als 0^0 bezeichnet wird. Der Winkelbereich von 160^0 bis 180^0 konnte nicht

gemessen werden, da die Thermosäule hier schon durch die Fassung der Kohle abgeschattet wurde. Die Strahlung in diesen Bereich ist aber schon so gering, daß eine Extrapolation keine wesentlichen Fehler mehr verursachen kann.

Zur Bestimmung der Winkelverteilung wurden 16 Punkte je viermal gemessen und durch graphische Ausgleichung die Kurven Fig. 3 und 4 gewonnen. Die Abweichungen der wegen der Bogenschwankungen über

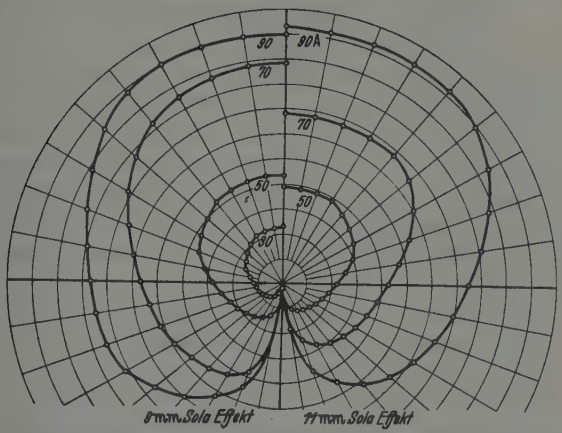


Fig. 4. Winkelverteilung der Strahlung der RW Sola Effekt 134 von 9 mm und 11 mm Durchmesser bei verschiedenen Stromstärken.

längere Zeit zu mittelnden Messungen von unserem Kurvenwert dürften $\pm 3\%$ nicht überschreiten. Bei Betrachtung der Fig. 3 und 4 fällt auf, daß ein beträchtlicher Anteil der Strahlung auch nach rückwärts abgestrahlt wird. Daraus geht hervor, daß der aus dem Krater hervorschießende Teil der Anodenflamme an der Gesamtstrahlung noch maßgeblich beteiligt ist.

Eine Kontrolle für die Übereinstimmung der Winkelverteilungsmessung mit der Kalorimetermessung ergibt sich aus dem Verhältnis der 0^0-Werte für die verschiedenen Stromstärken derselben Kohle, die jeweils mit derselben Spaltbreite vor der Thermosäule gemessen wurden, und die sich wie die Kalorimetermessungen verhalten müssen. Die Verhältnisse stimmen tatsächlich innerhalb $\pm 1\%$ überein.

Zur Ermittlung der räumlichen Winkelverteilung wurde nun die Annahme gemacht, daß die Verteilung in der Vertikalebene dieselbe ist wie die in der Horizontalebene. Infolge der magnetischen Eigenbeeinflussung und der konvektiven Wärmeabströmung ist jedoch die Beck-Flamme nach

oben gebogen, und dadurch wird nach oben mehr abgestrahlt als nach unten. Versuche ergaben jedoch, daß diese Abweichungen von der von der Auswertungsmethode (Abschn. 4) geforderten Rotationssymmetrie sich gerade aufheben.

4. Die Ermittlung der Gesamtstrahlung in Anlehnung an die Methode nach Rousseau und Liebenthal[1]).

Aus der kalorimetrisch gemessenen Abstrahlung in Richtung der Achse der Positivkohle und der Winkelverteilung muß nun die gesamte Abstrahlung des Bogens in Watt berechnet werden. Man stellt sich dazu die punktförmig gedachte Lichtquelle im Mittelpunkt einer Kugel von 1 cm Radius vor. Die Achse der Positivkohle sei die Achse des Koordinatensystems auf der Kugel. ϑ seien die Breitengrade, φ die Längengrade.

Im allgemeinsten Fall ist der spezifische Energiestrom (pro Flächeneinheit der Einheitskugel) eine Funktion von φ und ϑ, nämlich $I(\vartheta, \varphi) \cdot \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$. Den Gesamtstrom Φ erhält man dann, indem man φ von 0 bis 2π und ϑ von 0 bis π integriert:

$$\Phi = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} I(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi. \tag{12}$$

Auf Grund der Versuche kann nun angenommen werden, daß der spezifische Energiestrom längs eines Breitenkreises konstant ist, also für die Kugel nur eine Funktion von φ ist. Der spezifische Energiestrom längs eines Breitenkreises ist dann definiert durch

$$I(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} I(\vartheta, \varphi) \, \mathrm{d}\varphi. \tag{13}$$

Geht man mit dieser zulässigen Vereinfachung (13) in (12) ein, so erhält man

$$\Phi = 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} I(\vartheta) \cdot \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta. \tag{14}$$

Um zu einer graphischen Auswertungsmethode zu kommen, führt man in (14) statt der Variablen ϑ die Variable $c \cdot \cos\vartheta$ ein. Für die beiden Integrationsgrenzen erhält man dadurch $+c$ und $-c$. Ferner ist

$$\sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{d}(\cos\vartheta) = -\frac{1}{c} \mathrm{d}(c \cdot \cos\vartheta).$$

[1]) Vgl. E. Liebenthal, Praktische Photometrie, Braunschweig 1907. Die an sich viel benutzte Auswertungsmethode ist in ihrer einfachen Ableitung in der Literatur schwer zu finden und wird deshalb hier gebracht.

Der umgeformte Ausdruck (14) lautet daher

$$\Phi = \frac{2\pi}{c} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} I(\vartheta)\, \mathrm{d}\,(c \cdot \cos\vartheta). \qquad (15)$$

Trägt man nun $I(\vartheta)$ in Watt pro Raumwinkeleinheit als Funktion von $c \cdot \cos\vartheta$ auf, so ist das Integral (15) einfach die Fläche F zwischen der Kurve $I(\vartheta)$ und den Abszissenwerten $+c$ und $-c$ (Fig. 5). Mit der graphischen Auswertung erhält man also

$$\Phi = \frac{2\pi F}{c}, \qquad (16)$$

wobei c ein frei wählbares Maß für die horizontale Ausdehnung der Fläche F in Fig. 5 ist.

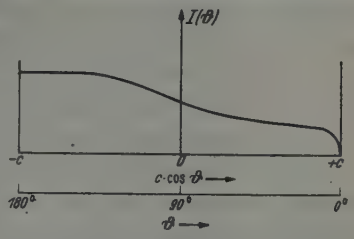


Fig. 5. Darstellung von $I(\vartheta)$ als Funktion von $c \cdot \cos(\vartheta)$ zur Ermittlung der Gesamtstrahlung aus der Winkelverteilung der Strahlung.

Da unsere Messung der Winkelverteilung in Abschn. 3 nur Relativwerte der Strahlung ergibt, setzen wir $I(\vartheta = 0) = 1$ und bezeichnen die unter dieser Annahme nach Fig. 5 ermittelte Fläche als F_1. Da die tatsächliche Strahlung in Richtung $\vartheta = 0$ in Abschn. 2 berechnet und S bezeichnet wurde, ist also

$$F = F_1 \cdot S \qquad (17)$$

und wir erhalten für die gesamte Abstrahlung des Bogens schließlich

$$\Phi = \frac{2\pi}{c} \cdot F_1 \cdot S \text{ Watt}. \qquad (18)$$

Die nach Gleichung (18) ermittelten Werte der gesamten Abstrahlung Φ sind für die verschiedenen Kohledurchmesser und Stromstärken in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1. RW Sola Effekt 134.

	5 mm Durchmesser			7 mm Durchmesser			9 mm Durchmesser				11 mm Durchmesser		
J Amp.....	16,5	30	45	30	50	70	30	50	70	90	50	70	90
V Volt.....	35	37	48,5	24	34	47	29,5	39	57,5	68	40	50	60
L Watt....	578	1110	2180	720	1700	3290	885	1950	4025	6120	2000	3500	5400
a °C/sec · 10^8	2,31	4,94	8,40	1,64	3,52	5,27	1,98	3,60	6,75	8,27	3,57	6,05	8,50
S Watt/ω..	32,5	70,8	120	87,5	187	283	96,0	175	328	402	173	293	413
F_1.....	18,1	20,4	25,5	13,3	14,6	19,4	15,1	18,3	19,1	21,9	17,3	18,9	20.6
Φ Watt....	250	650	1375	525	1225	2470	650	1440	2810	3950	1345	2485	3820
A %.....	43,3	58,6	63,0	73,0	72,0	75,0	73,5	73,7	69,8	64,5	67,3	71,0	70,8

5. *Die Gesamtstrahlungsausbeute.*

Als Gesamtstrahlungsausbeute bezeichnen wir das Verhältnis der gesamten Abstrahlung Φ zu der im Bogen umgesetzten elektrischen Leistung L, die aus den Mittelwerten der während der Messung dauernd kontrollierten Stromstärke- und Spannungswerte berechnet wurde. Dabei wurde wie in früheren Arbeiten (vgl. I und IV) nur die reine Bogenspannung, nach Abzug des Spannungsabfalls in den Elektroden, berücksichtigt. Die L-Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Der Fehler in der Bestimmung von L ist etwa $\pm$ 1%, so daß mit den Fehlern von S und F_1 sich für die Strahlungsausbeute A ein mittlerer Fehler von $\pm$ 5% ergibt.

Als Endergebnis zeigt Tabelle 1, daß die Strahlungsausbeute A für die drei größeren Kohledurchmesser 7, 9 und 11 mm von diesem sowie von der Stromstärke innerhalb der Fehlergrenzen unabhängig gleich 71 $\pm$ 3% ist. Lediglich bei der 5 mm-Anode, die auch sonst aus der Reihe fällt (vgl. II), ist die Ausbeute beträchtlich kleiner und nimmt mit der Stromstärke deutlich zu.

Auf die Deutung des Ergebnisses kommen wir in Abschn. 7 zurück. Zunächst muß noch erörtert werden, welchen Einfluß die Kondensation bzw. Verbrennung des an der Anodenstirnfläche verdampfenden Kohlenstoffs auf die Strahlungsbilanz besitzt. Beim Betrieb des Bogens in einem gegenüber Kohlenstoff inerten Gase muß die gesamte vom Anodenfall geleistete Verdampfungsarbeit an der äußeren Begrenzung der Anodenflamme in der Zone wieder frei werden, in der die Temperatur unter die Verdampfungstemperatur des Kohlenstoffs, d. h. unter etwa 4000° gesunken ist. In dieser Außenzone der Anodenflamme wird die Abkühlung unter 4000° abs. also durch die dort freiwerdende Kondensationswärme des Kohlenstoffs verzögert, und diese Zone muß zur Gesamtstrahlung beitragen. In der Bilanz ist diese Energie aber bereits enthalten, da sie vom Anodenfall geleistet wurde.

Beim Betrieb des Bogens in einem sauerstoffhaltigen Gase findet in einer äußeren Zone der Anodenflamme die Verbrennung des verdampften Kohlenstoffs statt, wodurch zusätzlich zur Kondensationswärme die Verbrennungswärme von rund 8 kcal/g frei wird. Welcher Anteil dieser Verbrennungswärme in Strahlung umgesetzt wird, und wie weit die Verbrennungswärme damit in unserem Φ in Erscheinung tritt, hängt von der Temperatur ab, bei der die stufenweise Verbrennung erfolgt. Die Verbrennungswärme ist in unserer Bilanz nicht enthalten; der allein auf die elektrische Leistung bezogene Wirkungsgrad des Bogens erscheint also

größer, als er ohne Verbrennung wäre. Für den Fall des 7 mm-Beck-Bogens sind alle zur Berechnung nötigen Daten bekannt. Rechnet man die Verbrennungswärme hier voll zur elektrischen Leistung hinzu, so erhöht sich diese für die drei Stromstärkewerte (Tabelle 1) um 84 bzw. 230 bzw. 570 Watt, wodurch die Strahlungsausbeute auf 65 bzw. 64% sinken würde.

Der Restbetrag von 30 bis 35% der dem Bogen zugeführten Leistung wird zu einem kleinen Teil durch die Elektroden abgeleitet, der größere Teil dagegen durch Konvektion an das umgebende Gas abgeführt.

6. Strahlung, Farbe und Temperatur der Beck-Bogen-Flamme.

Die in Abschn. 5 festgestellte Unabhängigkeit der Strahlungsausbeute von der Stromstärke könnte als Anzeichen der Unabhängigkeit der Anodenflammentemperatur von der Stromstärke aufgefaßt werden, zumal auch von anderer Seite[1]) kürzlich die Beck-Bogen-Temperatur als unabhängig von der Belastung gleich 5500° abs. angegeben wurde. Da diese Angabe mit unseren Vorstellungen vom Hochstrombogen nicht vereinbar war, ihre Prüfung also für das Verständnis der Leuchtvorgänge grundlegend wichtig erschien, haben wir die folgenden beiden Fragen zu klären versucht:

1. Ist die Leuchtdichte des Anodenflammenplasmas bei konstanter Schichtdicke von der Stromstärke unabhängig oder wächst sie mit ihr?

2. Hängt die Farbe der Anodenflammenstrahlung von der Stromstärke ab, und läßt sich aus einer Farbänderung gemäß dem Wienschen Verschiebungsgesetz ein Schluß auf die Zunahme der Dampftemperatur mit der Belastung ziehen?

Da eine exakt konstante Schichtdicke des Anodenflammenplasmas zur Untersuchung sich technisch nicht verwirklichen läßt, haben wir unsere Untersuchungen bei querstehendem Bogen ausgeführt, haben also den Anodenflammendurchmesser als Schichtdicke gewählt. Diese ist dicht vor dem positiven Krater ziemlich genau gleich dem Anodendurchmesser und von der Stromstärke weitgehend unabhängig.

Um auch bei kurzer Anodenflamme (geringe Stromstärke) die Abhängigkeit der Leuchtdichte der querstehenden Anodenflamme von der Belastung messen zu können, wurde mit einem sehr kleinen Selen-Photoelement gearbeitet, das nicht geeicht war, also nur Relativwerte der Strahlung zu messen gestattete. Wie üblich (vgl. II) wurde die Flamme in der Ebene der Zelle abgebildet, so daß die in Fig. 6 eingetragenen Werte der Leuchtdichte des Plasmas proportional sind (zu berücksichtigen wäre

[1]) F. Patzelt, Kinotechnik **22**, 91, 1940.

noch die spektrale Empfindlichkeit der Zelle!). Fig. 6 zeigt, daß für die verschiedensten Kohlen die Leuchtdichte des Plasmas auch bei konstanter Schichtdicke deutlich mit der Stromstärke ansteigt.

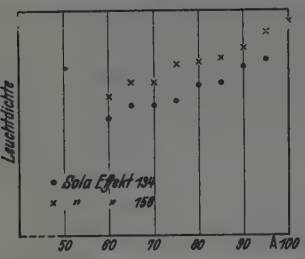


Fig. 6. Abhängigkeit der Leuchtdichte (in willkürlichem Maßstab) der Beck-Flamme konstanten Querschnitts von der Stromstärke, gemessen für zwei verschiedene Sorten Beck-Kohlen.

Aus diesem Ergebnis kann nun nicht direkt auf eine mit der Stromstärke zunehmende Temperatur des Plasmas geschlossen werden, denn es könnte ja infolge der zunehmenden Anodenverdampfung einfach der Partialdruck des Anodenmaterialdampfes und damit die Dichte der emittierenden Teilchen im Plasma mit der Stromstärke zunehmen. Den Beweis, daß tatsächlich die Anodenflammentemperatur mit der Stromstärke wächst, erbrachten wir durch die Farbmessung, die eine dem Wienschen Verschiebungsgesetz gemäße Änderung der Farbe mit der Stromstärke ergab.

Als einfaches, gut reproduzierbares Maß für die Färbung von Bogenlicht verwenden wir in Anlehnung an ein bekanntes Verfahren der Astrophysik den „Farbindex". Wir messen dazu mit einem der Augenempfindlichkeit angepaßten Filter-Photron-Element die Leuchtdichte der Lichtquelle, und zwar nach Filterung erst durch ein Blaufilter, dann durch ein Rotfilter. Das Verhältnis von Blauleuchtdichte zu Rotleuchtdichte, der Farbindex (F.I.) ist dann bei kontinuierlich strahlenden Lichtquellen direkt ein Maß für die Färbung und indirekt ein Maß für die Farbtemperatur, bei grauen Strahlern sogar ein Maß für die Temperatur der Lichtquelle selbst. Nun ist zwar der Beck-Bogen keine kontinuierlich strahlende Lichtquelle, ist dieser aber wegen seiner gewaltigen Liniendichte im gesamten Spektralbereich so ähnlich, daß der Farbindex auch beim Beck-Bogen ein gutes Maß für Farbe und Temperatur darstellt. Als Filter, die direkt vor dem Photoelement angebracht werden, benutzen wir die Schott-Filter BG 12 und RG 1.

Wurde der Beck-Bogen-Krater mit Flamme in der üblichen Weise frontal auf der Zelle abgebildet, so erhielten wir F.I.-Werte, die mit der Stromstärke von 0,15 bis 0,50 anstiegen gegenüber F.I.-Werten von 0,10 bis 0,18 beim Reinkohlekrater, also in Übereinstimmung mit der aus anderen Messungen (II) bekannten höheren Temperatur des Beck-Bogens auch größere F.I.-Werte. Den Anstieg des Farbindex mit der Stromstärke (Fig. 7) können wir direkt als Anzeichen der steigenden Anodenflammen-

temperatur ansehen, da die Größe der Absolutstrahlung ebenso wie der Wert des F.I. zeigen, daß der feste Kratergrund an der Beck-Strahlung nicht mehr maßgebend beteiligt ist.

Zur Bestätigung dieses Ergebnisses wurden noch F.I.-Messungen der Beck-Flammen-Strahlung allein, also bei quergestelltem Bogen ausgeführt.

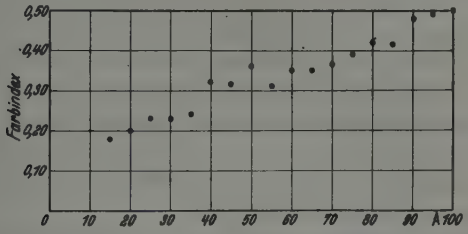


Fig. 7. Abhängigkeit des Farbindex der RW Sola Effekt 134 T von der Stromstärke, gemessen im Bild des Kraters.

Auch sie ergaben einen deutlichen Anstieg des F.I. von 0,28 auf 0,50 bei einer Stromstärkesteigerung von 60 auf 100 Amp. für die 7 mm-Sola Effekt 134 und einen ähnlichen Anstieg für die übrigen Beck-Kohlen.

Aus unseren Messungen folgt also, daß die Gastemperatur vor der Anode mit der Belastung zunimmt. Über die Größe der Temperaturzunahme läßt sich zunächst nichts sagen, da der quantitative Zusammenhang zwischen Farbindex und Temperatur noch unbekannt ist. In einer folgenden Arbeit soll auf Grund von Messungen der Energieverteilung der Strahlung näher auf die ganze Temperaturfrage eingegangen werden.

7. Die Deutung der Ergebnisse.

Die experimentellen Ergebnisse unserer Messungen können wir also zusammenfassen:

1. Die Strahlungsausbeute des Beck-Bogens ist (mit Ausnahme der 5 mm-Anode) vom Anodendurchmesser und der Stromstärke unabhängig gleich 71%.

2. Die Anodenflammentemperatur steigt mit der Stromstärke.

Bezüglich der auffälligen Konstanz der Strahlungsausbeute bemerken wir zunächst, daß aus Fig. 7 der Arbeit II hervorgeht, daß die Gesamtstrahlungsdichte (gemessen in Watt pro cm^2 Anodenoberfläche) linear von der elektrischen Bogenleistung abhängt, das Verhältnis der Gesamtstrahlungsdichte zur Leistung also von der Stromstärke unabhängig ist. Wäre nun auch die Winkelverteilung der Strahlung von der Stromstärke unabhängig, so würde die Konstanz der Strahlungsausbeute bereits aus

Fig. 7, Arbeit II folgen. Tatsächlich nimmt nun zwar die Seitenstrahlung und damit die Größe F_1 von Abschn. 4 und Tabelle 1 allgemein leicht mit der Stromstärke zu (bei der 5 mm-Kohle sogar beträchtlich!), doch wird diese Zunahme durch eine nicht ganz leistungsproportionale Zunahme der Strahlung in Richtung der Anodenachse (S) kompensiert, hervorgerufen anscheinend durch das bekannte seitliche Ausbrechen der Anodenflamme.

Eine Deutung für das abweichende Ergebnis bei der 5 mm-Kohle haben wir nicht. Es muß aber mit dem allgemein von den übrigen Kohlen abweichenden Verhalten (vgl. I und II) dieser Kohle zusammenhängen. Auch bei der 5 mm-Kohle ist die Gesamtstrahlungsdichte nach II, Fig. 7, der Leistung proportional; die Zunahme der Ausbeute wird daher durch die erwähnte beträchtliche Zunahme der Seitenstreuung (F_1-Werte der Tabelle 1) mit der Stromstärke bewirkt.

Im übrigen läßt sich leicht zeigen, daß die Konstanz der Strahlungsausbeute nach unseren Vorstellungen vom Hochstrombogen theoretisch zu erwarten ist, sofern die Plasmatemperatur nicht stark von der Stromstärke abhängt. Nach IV, S. 217, setzt sich die Brennspannung des Hochstrombogens zusammen aus dem von der Stromstärke unabhängigen Spannungsabfall vor der Kathode ($V_{SK} = c_1$) und einem gemäß IV, Fig. 7, in erster Näherung linear mit der Stromstärke zunehmenden Anodenfall $V_A = c_2 \cdot J$, so daß sich die im Bogen umgesetzte elektrische Leistung schreiben läßt:

$$L = J \cdot V = c_1 \cdot J + c_2 \cdot J^2. \tag{19}$$

Im eigentlichen Hochstromgebiet geht also die Leistung mit dem Quadrat der Stromstärke.

Die Gesamtstrahlung Φ des Hochstrombogens ist nach unseren Vorstellungen in erster Näherung proportional der pro sec verdampften Anodenmaterialmenge $A - A_0$, solange jedes Dampfteilchen im Mittel die gleiche Energie als Strahlung emittiert:

$$\Phi = c_3 (A - A_0). \tag{20}$$

Nach IV, S. 221 ist aber $A - A_0$ proportional der Anodenfallenergie W_A abzüglich der durch Wärmeleitung abgeführten Energie W_N:

$$A - A_0 = \frac{1}{Q} \cdot (W_A - W_N). \tag{21}$$

Im eigentlichen Hochstromgebiet aber ist $W_A \gg W_N$ und damit

$$\Phi = c_3 (A - A_0) = c_4 \cdot W_A = c_5 \cdot J^2. \tag{22}$$

In dieser gröbsten Näherung sind also sowohl L wie auch Φ proportional J^2, woraus die Unabhängigkeit der Strahlungsausbeute $A = \Phi/L$ von der Strom-

stärke folgt. Auf den Einfluß der Änderung der Plasmatemperatur gehen wir im Zusammenhang mit deren näheren Behandlung in einer folgenden Arbeit ein.

Auf die Frage der Konstanz der Ausbeute ist die Verbrennungswärme (vgl. Abschn. 5) ohne Einfluß, und das ist theoretisch verständlich, da sie proportional der im Anodenfall verdampften Kohlenstoffmenge $A - A_0$ ist und daher nach Gleichung (22) ebenfalls mit J^2 geht.

Die Unabhängigkeit der Strahlungsausbeute vom Anodendurchmesser folgt ebenso einfach aus der Tatsache, daß das von uns I bis III aufgestellte Ähnlichkeitsgesetz (Stromstärke-Proportionalität mit dem Durchmesser der Positivkohle bei ähnlichen Hochstromkohlebögen) für die im Bogen umgesetzte elektrische Leistung ebenso gilt wie für die Gesamtstrahlung des Bogens.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt ausgeführt. Herrn Prof. Rau danken wir für sein stetes Interesse, den Herren Schuh, Steigerwald und H. Müller für ihre Hilfe bei den Versuchen. Unser besonderer Dank gilt wieder den Ringsdorff-Werken für ihre Förderung der Arbeit, und den Herren Prof. Konen, Bad Godesberg, und Dr. Neukirchen, Mehlem, für zahlreiche Diskussionen und Anregungen.

Darmstadt, im Dezember 1940.

Zur Theorie der Kernisomerie.

Von **N. Koyenuma** in Tokyo, z. Zt. Berlin.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 19. November 1940.)

Die Erscheinung der Kernisomerie läßt sich bekanntlich durch die Drehimpulstheorie erklären. Die hierfür bisher in der Literatur angegebenen Formeln sind alle nur größenordnungsmäßige Abschätzungen. Dies liegt nur zum Teil an unserer Unkenntnis der Kernstruktur, z. T. aber auch daran, daß die zur Berechnung der Matrixelemente für die γ-Übergangswahrscheinlichkeit notwendigen Integrationen über die Kugelfunktionen, welche den einzelnen Drehimpulsen entsprechen, bisher nicht ausgeführt worden sind. Diese Integrationen werden in der vorliegenden Arbeit durchgeführt und ihre Ergebnisse für $l = 0$ bis $l = 6$ mitgeteilt. Ferner wird an Hand eines Einkörpermodells der Atomkerne die Übergangswahrscheinlichkeit selbst berechnet und einerseits mit den Experimenten, andererseits mit den bisher bestehenden Formeln verglichen.

1. Einleitung.

Bei einer größeren Anzahl von Atomkernen beobachtet man die Existenz eines metastabilen angeregten Zustandes, den man als „isomer" zum Grundzustande zu bezeichnen pflegt. Während normalerweise die Lebensdauer eines angeregten Kernzustandes bis zum γ-Übergang in den Grundzustand etwa von der Größenordnung 10^{-14} sec ist, beobachtet man hier die Abstrahlung der überschüssigen Energie noch nach Zeiträumen von mehreren Minuten oder Stunden. Es scheint sich dabei um Übergänge zu handeln, die in der Sprache der Quantenmechanik als „hoch verboten" bezeichnet werden und durch eine mit großer Schärfe erfüllte Auswahlregel erklärt werden müssen. Es ist nicht ganz leicht, wohl auch nicht sehr wahrscheinlich, die Ursache einer solchen Auswahlregel in Symmetrieeigenschaften zu finden, die in der Struktur des Kernes selbst begründet liegen, etwa im Sinne einer Positionsisomerie. Daher dürfte die zuerst von Weizsäcker[1]) vorgeschlagene Auffassung wahrscheinlich am ehesten den wahren Sachverhalt treffen, daß der angeregte metastabile Term sich sehr stark (um 4 bis 6 Einheiten) im Drehimpuls vom Grundterm unterscheidet. Beträgt dieser Unterschied nämlich $l\hbar$, so kann man größenordnungsmäßig erwarten, daß für die Übergangswahrscheinlichkeit folgende Formel besteht:

$$w = Z^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^{2l},$$

wobei R der Kernradius und λ die Wellenlänge der emittierten γ-Strahlung ist. Da λ auch für γ-Strahlen noch beträchtlich größer als R ist, wird nach

[1]) C. F. v. Weizsäcker, Naturwissensch. **24**, 813, 1936.

dieser Formel die Lebensdauer $1/w$ (bzw. Halbwertszeit $\ln 2/w$) des angeregten Terms schnell zunehmen mit steigendem l und sinkender Energiedifferenz

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Die größenordnungsmäßige Betrachtung von Weizsäckers hat Bethe[1]) durch eine mehr in Einzelheiten gehende Berechnung zu ersetzen versucht. Er geht aus von Bohrs Tröpfchenmodell des Atomkerns und beschreibt den angeregten Zustand durch eine Welle, die die Oberfläche des Tropfens deformiert ohne Volumendilatationen. Er erhält dann eine Formel, die sich von der Weizsäckerschen im wesentlichen durch veränderte Normierungsfaktoren unterscheidet, nämlich

$$w = \frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{\varkappa^2}{l!^2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^{2l}.$$

Dabei ist $\varkappa$ ein Faktor, der von der Größenordnung 1 sein soll und auch von Bethe nicht genauer bestimmt werden kann. Die beiden Formeln unterscheiden sich daher im wesentlichen um den Faktor $Z^2 \cdot l!^2$, der für $Z = 30$ und $l = 5$ immerhin die Größenordnung 10^7 erreicht. Die Betheschen Übergangswahrscheinlichkeiten sind also um diesen Faktor kleiner als die Weizsäckerschen, so daß er zur Erklärung der beobachteten Lebensdauern mit rund um eine Einheit kleineren Werten von l auskommt.

Der große Unterschied beider Formeln, die beide unkontrollierbare Näherungen enthalten, ließ es wünschenswert erscheinen, an Hand eines einfachen Modells eine möglichst strenge Rechnung durchzuführen. Das ist in der vorliegenden Arbeit versucht worden. Dabei war es natürlich nicht mehr möglich, die Ergebnisse in einer so einfachen Formel zusammenzufassen, wie dies in den obenerwähnten Formeln geschehen konnte. Daß dies nicht möglich ist, sieht man sofort daraus, daß für $l = 0$ die beiden Gleichungen ein völlig falsches Ergebnis zeigen, nämlich maximale Übergangswahrscheinlichkeit, obwohl diese nach allen physikalischen Kenntnissen für $l = 1$ eintreten muß. Der Hauptzweck der Arbeit war daher der, die vom Modell unabhängige Integration über die Kugelfunktionen, die den vorgegebenen Drehimpulsen entsprechen, streng durchzuführen und damit ein System von Formeln anzugeben, daß auch für jede späterhin an anderen Modellen durchzuführende Rechnung als Ausgangsbasis dienen kann.

[1]) H. Bethe, Rev. Modern Phys. **9**, 1937.

2. Ansatz.

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustande n zum Zustande m im Strahlungsfelde ist bekannterweise durch die Formel

$$w = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}|\vartheta_{mn}|^2 \tag{1}$$

gegeben, wobei

$$\vartheta_{mn} = \frac{\hbar}{\omega}\int \psi_n^* \sum_j e^{(i\mathfrak{R}r_j)}\frac{e_j}{M_j}\nabla_j \psi_m \,\mathrm{d}\tau.$$

Es bedeutet $\hbar\omega = E_n - E_m$ die Energiedifferenz der beiden Zustände mit den Eigenfunktionen ψ_n und ψ_m, r_j, e_j und M_j den Ortsvektor, die Ladung und die Masse des j-ten Teilchens, ∇_j den Gradienten der j-ten Koordinaten, $\int \mathrm{d}\tau$ das Integral über alle Koordinaten und $\mathfrak{R}$ die Wellenzahl. Für die im folgenden durchgeführten Rechnungen legen wir das *Einkörpermodell* zugrunde; wir nehmen also an, daß die verschiedenen betrachteten Zustände des Atomkerns sich etwa nur dadurch unterscheiden, daß ein einzelnes, lockerer gebundenes Proton sich mit verschiedenem Drehimpuls um einen Kernrumpf bewegen kann. Wir schreiben dann

$$\vartheta_{mn} = \frac{\hbar e}{\omega M}\int \psi_n^* e^{i\mathfrak{R}r}\nabla\psi_m \,\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

worin wir zweckmäßig die durch

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \tag{3}$$

definierten Kugelkoordinaten einführen. Die Ableitungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\vartheta\, e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \cos\vartheta\, e^{i\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\frac{e^{i\varphi}}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\vartheta\, e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \cos\vartheta\, e^{-i\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\frac{e^{-i\varphi}}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\vartheta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Für die Wellenfunktion ψ müssen wir bei unserem Modell ansetzen[1])

$$\left.\begin{aligned}
\psi_m &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}R_{nl}(r)\,\wp_{lm}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi},\\
\psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}R_{n'l'}(r)\,\wp_{l'm'}(\cos\vartheta)\,e^{im'\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Unter $\wp_{lm}$ verstehen wir die adjungierten Kugelfunktionen in der von Bethe (l. c.) benutzten Normierung [siehe Handb. d. Physik, 2. Aufl., **24** (1), 273, Berlin 1933].

Unter Berücksichtigung von (4) und (5) gehen die Komponenten von (2) über in

$$(\vartheta_{m\,n})_z = \vartheta_z = \frac{\hbar e}{2\pi\omega M}\left\{\int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\cdot R_{n'}\,R_n'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,e^{i(m-m')\varphi}\times\right.$$

$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\cdot\sin\vartheta\cdot\wp_{l'm'}\,e^{ikr\cos\vartheta}\cos\vartheta\,\wp_{lm} - \int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r\cdot\frac{R_{n'}R_n}{r}\times$$

$$\left.\times\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,e^{i(m-m')\varphi}\int_0^\pi\mathrm{d}\vartheta\sin\vartheta\,\wp_{l'm'}\,e^{ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\,\wp_{lm}'\right\}, \tag{6}$$

$$(\vartheta_{m\,n})_{x\pm iy} = \vartheta_{x\pm iy} = \frac{\hbar e}{2\pi\omega M}\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}r\cdot r^2\,R_{n'}\,R_n'\int_0^{2\pi}e^{i\varphi(m-m'\pm1)}\,\mathrm{d}\varphi\times\right.$$

$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\,\wp_{l'm'}\,e^{ikr\cos\vartheta}\,\wp_{lm}\sin\vartheta + \int_0^\infty \mathrm{d}r\cdot r^2\,R_{n'}\frac{R_n}{r}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}e^{i\varphi(m-m'\pm1)}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\cos\vartheta\cdot\cos\vartheta\,\wp_{l'm'}\,e^{ikr\cos\vartheta}\,\wp_{lm}'\mp m\times$$

$$\times\int_0^\infty \mathrm{d}r\cdot r^2\,R_{n'}\frac{R_n}{r}\int_0^{2\pi}e^{i\varphi(m-m'\pm1)}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\cos\vartheta\times$$

$$\left.\times\,\wp_{l'm'}\frac{\wp_{lm}}{\sin\vartheta}\,e^{ikr\cos\vartheta}\right\}. \tag{7}$$

Die Integration über φ kann sofort ausgeführt werden; sie ergibt die bekannten Auswahlregeln $m' = m$ für die z-Komponente und $m' = m \pm 1$ für die Komponenten $x \pm i\,y$. Wir entwickeln den Retardierungsfaktor $e^{ikr\cos\vartheta}$ in der üblichen Weise in die Potenzreihe

$$e^{ikr\cos\vartheta} = 1 + ikr\cos\vartheta + \frac{1}{2!}(ikr\cos\vartheta)^2 + \cdots;$$

die Ausdrücke (6) und (7) gehen dann in Summen über:

$$\vartheta_z = \sum_0^\infty \vartheta_z^{(q)}, \qquad \vartheta_{x\pm iy} = \sum_0^\infty \vartheta_{x\pm iy}^{(q)}, \tag{8}$$

worin die Summanden die Bedeutung haben

$$\vartheta_z^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M} \frac{(i k)^q}{q!} \left\{ R_{\mathrm{I}}^{(q)} \int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta \cos^{q+1}\vartheta \, \wp_{l'm} \wp_{lm} \right.$$

$$\left. - R_{\mathrm{II}}^{(q)} \int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta \cos^q\vartheta \, \wp_{l'm} \frac{\mathrm{d}\,\wp_{lm}}{\mathrm{d}\vartheta} \right\}, \tag{9}$$

$$\vartheta_{x\pm iy}^{(q)} = \vartheta_{\pm}^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M} \frac{(i k)^q}{q!} \left\{ R_{\mathrm{I}}^{(q)} \int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta \sin\vartheta \cos^q\vartheta \, \wp_{l'm\pm1} \wp_{lm} + \right.$$

$$+ R_{\mathrm{II}}^{(q)} \int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta \cos^{q+1}\vartheta \, \wp_{l'm\pm1} \frac{\mathrm{d}\,\wp_{lm}}{\mathrm{d}\vartheta} \mp$$

$$\left. \mp m R_{\mathrm{II}}^{(q)} \int \mathrm{d}\cos\vartheta \cdot \frac{\cos^q\vartheta}{\sin\vartheta} \, \wp_{l'm\pm1} \wp_{lm} \right\}. \tag{10}$$

Hierin sind die Abkürzungen

$$R_{\mathrm{I}}^{(q)} = \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^2 R_{n'} \frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}r} r^q, \tag{11}$$

$$R_{\mathrm{II}}^{(q)} = \int_0^\infty \mathrm{d}r \cdot r^2 \cdot R_{n'} \frac{R_n}{r} r^q \tag{12}$$

für die Integrationen über die radialen Anteile der Eigenfunktionen eingeführt. Unsere Aufgabe besteht zunächst und vor allem in der Ausführung der Integrationen über den Winkel ϑ, die sich in völliger Strenge durchführen läßt. Erst dann werden wir auch die Ausdrücke (11) und (12) mit geeignet ausgewählten, aber natürlich vom Modell abhängigen Eigenfunktionen ausrechnen.

3. Integration über den Winkel ϑ.

Wir gehen aus von den Gleichungen (9) und (10), aus denen wir zunächst die Ableitungen der Kugelfunktionen eliminieren mit Hilfe der bekannten Beziehung[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,\wp_{lm}}{\mathrm{d}\vartheta} &= -\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\wp_{lm+1} + m\cot\vartheta\,\wp_{lm}, \\ &= +\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\wp_{lm-1} - m\cot\vartheta\,\wp_{lm}. \end{aligned}\right\} \tag{13,1}$$

[1]) Vgl. H. Bethe, Handb. d. Physik, 2. Aufl., **24** (1), 273.

Um das Auftreten der Glieder mit dem cot ϑ bei der z-Komponente zu vermeiden, wurde dort für die Ableitung die halbe Summe dieser beiden Ausdrücke eingeführt

$$\frac{\mathrm{d}\,\wp_{lm}}{\mathrm{d}\,\vartheta} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(l-m+1)\,(l+m)}\,\wp_{l\,m-1} - \sqrt{(l+m+1)\,(l-m)}\,\wp_{l\,m+1}\right\}. \quad (13,2)$$

Bei den Komponenten $x \pm iy$ dagegen enthält die Gleichung (10) schon ein Glied mit dem sin ϑ im Nenner. Setzt man für die Ableitung die Gleichung (13, 1) ein, so hebt sich dies Glied gerade gegen das cot-Glied heraus. Wir erhalten so die Ausdrücke:

$$\vartheta_z^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\left\{R_{\mathrm{I}}^{(q)}\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^{q+1}\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{lm} - \tfrac{1}{2}\,R_{\mathrm{II}}^{(q)}\sqrt{(l+m)\,(l-m+1)}\times\right.$$

$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{l\,m-1} + \tfrac{1}{2}\,R_{\mathrm{II}}^{(q)}\sqrt{(l-m)\,(l+m+1)}\times$$

$$\left.\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{l\,m+1}\right\}, \quad (14)$$

$$\vartheta_+^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\left\{(R_{\mathrm{I}}^{(q)} - m\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\sin\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm+1}\wp_{lm} -\right.$$

$$\left.- R_{\mathrm{II}}^{(q)}\sqrt{(l+m+1)\,(l-m)}\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^{q+1}\vartheta\,\wp_{l'm+1}\wp_{l\,m+1}\right\}, \quad (15)$$

$$\vartheta_-^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\left\{(R_{\mathrm{I}}^{(q)} + m\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm-1}\wp_{lm} +\right.$$

$$\left.+ R_{\mathrm{II}}^{(q)}\sqrt{(l-m+1)\,(l+m)}\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^{q+1}\vartheta\,\wp_{l'm-1}\wp_{l\,m-1}\right\}. \quad (16)$$

Wir können nun alle hierin noch enthaltenen Integrale auf einen einheitlichen Typ reduzieren, wenn wir von den Hilfsformeln

$$\left.\begin{aligned}
\cos\vartheta\,\wp_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)\,(l-m+1)}{(2l+1)\,(2l+3)}}\,\wp_{l+1\,m} + \sqrt{\frac{(l+m)\,(l+m)}{(2l+1)\,(2l-1)}}\,\wp_{l-1\,m},\\
\sin\vartheta\,\wp_{lm} &= -\sqrt{\frac{(l-m+1)\,(l-m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}}\,\wp_{l+1\,m-1} + \sqrt{\frac{(l+m)\,(l+m-1)}{(2l+1)\,(2l-1)}}\,\wp_{l-1\,m-1},\\
\sin\vartheta\,\wp_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)\,(l+m+2)}{(2l+1)\,(2l+3)}}\,\wp_{l+1\,m+1} - \sqrt{\frac{(l-m)\,(l-m-1)}{(2l+1)\,(2l-1)}}\,\wp_{l-1\,m+1}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Gebrauch machen. Die Gleichungen (14) bis (16) sind dann zu ersetzen durch

$$\vartheta_z^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\Big\{\sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\times$$
$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{l+1\,m} +$$
$$+\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\times$$
$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{l-1\,m}\Big\}, \qquad (14,1)$$

$$\vartheta_+^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\Big\{\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\times$$
$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm+1}\wp_{l+1\,m+1} - \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\times$$
$$\times\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm+1}\wp_{l-1\,m+1}\Big\}, \qquad (15,1)$$

$$\vartheta_-^{(q)} = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(ik)^q}{q!}\Big\{-\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\times$$
$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm-1}\wp_{l+1\,m-1} +$$
$$+\sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\,(R_{\mathrm{I}}^{(q)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(q)})\times$$
$$\times\int_0^\pi \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm-1}\wp_{l-1\,m-1}\Big\}, \qquad (16,1)$$

in denen jetzt nur noch Integrale der Form

$$\int \mathrm{d}\cos\vartheta\cos^q\vartheta\,\wp_{l'm}\wp_{lm}$$

vorkommen.

Die Ausrechnung dieser Integrale geschieht durch Darstellung von $\cos^q\vartheta\,\wp_{lm}$ als eine Summe von Kugelfunktionen verschiedener Ordnung. Dabei machen wir Gebrauch von der ersten der Hilfsformeln (17)

$$\cos\vartheta\,\wp_{lm} = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\wp_{l+1\,m} + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\wp_{l-1\,m},$$

oder unter Einführung des Symbols

$$\Phi_m(l) = \Phi(l) = \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}},$$
$$\cos\vartheta\,\wp_{lm} = \Phi(l+1)\,\wp_{l+1\,m} + \Phi(l)\,\wp_{l-1\,m}. \qquad (18)$$

Durch Iteration erhalten wir daraus Formeln für die Ausdrücke vom Typ $\cos^q\vartheta\,\mathfrak{P}_{lm}$.

Es ergeben sich folgende Schlußformeln für die Matrixelemente:

$$D_z^{(0)} = A_0\,\eta(l+1)\,\delta_{l'l+1} + B_0\,\eta(l)\,\delta_{l'l-1}, \tag{19,0}$$

$$D_z^{(1)} = A_1\,\eta(l+1)\,\eta(l+2)\,\delta_{l'l+2} + \left[A_1\eta^2(l+1) + B_1\eta^2(l)\right]\delta_{l'l} + B_1\,\eta(l)\,\eta(l-1)\,\delta_{l'l-2}, \tag{19,1}$$

$$D_z^{(2)} = A_2\,\eta(l+1)\,\eta(l+2)\,\eta(l+3)\,\delta_{l'l+3} + \eta(l+1)\left[A_2\left(\eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + B_2\eta^2(l)\right]\delta_{l'l+1} + \eta(l)\left[A_2\eta^2(l+1) + B_2\left(\eta^2(l) + \eta^2(l-1)\right)\right]\delta_{l'l-1} + B_2\,\eta(l)\,\eta(l-1)\,\eta(l-2)\,\delta_{l'l-3}, \tag{19,2}$$

$$D_z^{(3)} = A_3\,\eta(l+1)\,\eta(l+2)\,\eta(l+3)\,\eta(l+4)\,\delta_{l'l+4} + \eta(l+1)\,\eta(l+2)\left[A_3\left(\eta^2(l+3) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + B_3\,\eta^2(l)\right]\delta_{l'l+2} + \left[A_3\eta^2(l+1)\left(\eta^2(l+2) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l)\right) + B_3\cdot\eta^2(l)\left(\eta^2(l+1) + \eta^2(l) + \eta^2(l-1)\right)\right]\delta_{l'l} + \eta(l)\,\eta(l-1)\left[A_3\cdot\eta^2(l+1) + B_3\cdot\left(\eta^2(l-2) + \eta^2(l-1) + \eta^2(l)\right)\right]\delta_{l'l-2} + B_3\cdot\eta(l)\,\eta(l-1)\,\eta(l-2)\,\eta(l-3)\,\delta_{l'l-4}, \tag{19,3}$$

$$D_z^{(4)} = A_4\,\eta(l+1)\,\eta(l+2)\,\eta(l+3)\,\eta(l+4)\,\eta(l+5)\,\delta_{l'l+5} + \eta(l+1)\,\eta(l+2)\,\eta(l+3)\left[A_4\cdot\left(\eta^2(l+4) + \eta^2(l+3) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + B_4\,\eta^2(l)\right]\delta_{l'l+3} + \eta(l+1)\left[A_4\left\{\eta^2(l+2)\left(\eta^2(l+3) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + \eta^2(l+1)\left(\eta^2(l+2) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l)\right)\right\} + B_4\cdot\eta^2(l)\left(\eta^2(l-1) + \eta^2(l) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l+2)\right)\right]\delta_{l'l+1} + \eta(l)\left[A_4\times\eta^2(l+1)\left(\eta^2(l+2) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l) + \eta^2(l-1)\right) + B_4\left\{\eta^2(l)\left(\eta^2(l-1) + \eta^2(l) + \eta^2(l+1)\right) + \eta^2(l-1)\left(\eta^2(l-2) + \eta^2(l-1) + \eta^2(l)\right)\right\}\right]\delta_{l'l-1} + \eta(l)\,\eta(l-1)\,\eta(l-2)\times\left[A_4\eta^2(l+1) + B_4\left(\eta^2(l-3) + \eta^2(l-2) + \eta^2(l-1) + \eta^2(l)\right)\right]\delta_{l'l-3} + B_4\eta(l)\,\eta(l-1)\,\eta(l-2)\,\eta(l-3)\,\eta(l-4)\,\delta_{l'l-5}; \tag{19,4}$$

$$D_z^{(5)} = A_5\,\eta(l+1)\times\cdots\times\eta(l+6)\,\delta_{l'l+6} + \eta(l+1)\times\cdots\times\eta(l+4)\times\left[A_5\left(\eta^2(l+5) + \eta^2(l+4) + \cdots + \eta^2(l+1)\right) + B_5\eta^2(l)\right]\delta_{l'l+4} + \eta(l+1)\,\eta(l+2)\left[A_5\left\{\eta^2(l+3)\left(\eta^2(l+4) + \eta^2(l+3) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + \eta^2(l+2)\left(\eta^2(l+3) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+1)\right) + \eta^2(l+1)\left(\eta^2(l+2) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l)\right)\right\} + B_5\cdot\eta^2(l)\left(\eta^2(l-1) + \eta^2(l) + \eta^2(l+1) + \eta^2(l+2) + \eta^2(l+3)\right)\right]\delta_{l'l+2} + \left[A_5\left\{\eta^2(l+1)\left(\eta^2(l+2)\left(\eta^2(l+3) + \right.\right.\right.\right.$$

$$+\eta^2(l+2)+\eta^2(l+1))+\eta^2(l+1)(\eta^2(l+2)+\eta^2(l+1)+$$
$$+\eta^2(l))+\eta^2(l)(\eta^2(l-1)+\eta^2(l)+\eta^2(l+1)+\eta^2(l+2))\}+$$
$$+B_5\{\eta^2(l)(\eta^2(l+1)\eta^2(l+2)+\eta^2(l+1)+\eta^2(l)+$$
$$+\eta^2(l-1))+\eta^2(l)(\eta^2(l-1)+\eta^2(l)+\eta^2(l+1))+$$
$$+\eta^2(l-1)(\eta^2(l-2)+\eta^2(l-1)+\eta^2(l))\}\big]\delta_{v'l}+$$
$$+\eta(l)\eta(l-1)\big[A_5\eta(l+1)(\eta^2(l+2)+\eta^2(l+1)+\cdots+$$
$$+\eta^2(l-2))+B_5\{\eta^2(l-2)(\eta^2(l-3)+\eta^2(l-2)+\cdots+$$
$$+\eta(l))+\eta^2(l-1)(\eta^2(l-2)+\eta^2(l-1)+\eta^2(l))+$$
$$+\eta^2(l)(\eta^2(l-1)+\eta^2(l)+\eta^2(l+1))\}\big]\delta_{v'l-2}+$$
$$+\eta(l)\eta(l-1)\eta(l-2)\eta(l-3)\big[A_5\eta^2(l+1)+B_5(\eta^2(l)+$$
$$+\eta^2(l-1)+\eta^2(l-2)+\eta^2(l-3)+\eta^2(l-4))\big]\delta_{v'l-4}+$$
$$+B_5\eta(l)\eta(l-1)\times\cdots\times\eta(l-5)\delta_{v'l-6}, \tag{19,5}$$

$$D_+^{(0)}=C_0\delta_{v'l+1}-D_0\delta_{v'l-1}; \tag{20,0}$$

$$D_+^{(1)}=C_1\zeta(l+1)\delta_{v'l+2}+\big[C_1\zeta(l)-D_1\zeta(l-1)\big]\delta_{v'l}-$$
$$-D_1\zeta(l-2)\delta_{v'l-2}, \tag{20,1}$$

$$D_+^{(2)}=C_2\zeta(l+1)\zeta(l+2)\delta_{v'l+3}+\big[C_2(\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l))-$$
$$-D_2\zeta(l-1)\zeta(l)\big]\delta_{v'l+1}+\big[C_2\zeta(l)\zeta(l-1)-D_2(\zeta^2(l-1)+$$
$$+\zeta^2(l-2))\big]\delta_{v'l-1}-D_2\zeta(l-2)\zeta(l-3)\delta_{v'l-3}, \tag{20,2}$$

$$D_+^{(3)}=C_3\zeta(l+1)\zeta(l+2)\zeta(l+3)\delta_{v'l+4}+\big[C_3\zeta(l+1)(\zeta^2(l+2)+$$
$$+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l))-D_3\zeta(l-1)\zeta(l)\zeta(l+1)\big]\delta_{v'l+2}+$$
$$+\big[C_3\zeta(l)(\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l-1))-D_3\zeta(l-1)(\zeta^2(l-2)+$$
$$+\zeta^2(l-1)+\zeta^2(l))\big]\delta_{v'l}+\big[C_3\zeta(l)\zeta(l-1)\zeta(l-2)-$$
$$-D_3\zeta(l-2)(\zeta^2(l-3)+\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)\big]\delta_{v'l-2}-$$
$$-D_3\zeta(l-2)\zeta(l-3)\zeta(l-4)\delta_{v'l-4}, \tag{20,3}$$

$$D_+^{(4)}=C_4\zeta(l+1)\zeta(l+2)\ldots\zeta(l+4)\delta_{v'l+5}+\big[C_4\zeta(l+1)\zeta(l+2)\times$$
$$\times(\zeta^2(l+3)+\zeta^2(l+2)+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l))-D_4\zeta(l-1)\times$$
$$\times\zeta(l)\zeta(l+1)\zeta(l+2)\big]\delta_{v'l+3}+\big[C_4\{\zeta^2(l+1)(\zeta^2(l+2)+$$
$$+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l))+\zeta^2(l)(\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l-1))\}-$$
$$-D_4\zeta(l-1)\zeta(l)(\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l-1)+$$
$$+\zeta^2(l-2))\big]\delta_{v'l+1}+\big[C_4\zeta(l)\zeta(l-1)(\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)+$$
$$+\zeta^2(l)+\zeta^2(l+1))-D_4\zeta^2(l-1)(\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)+$$
$$+\zeta^2(l))\big]\delta_{v'l-1}+\big[C_4\zeta(l)\zeta(l-1)\zeta(l-2)\zeta(l-3)-$$
$$-D_4\zeta(l-2)\zeta(l-3)(\zeta^2(l-4)+\cdots+\zeta^2(l-1))\big]\delta_{v'l-3}-$$
$$-D_4\zeta(l-2)\times\cdots\times\zeta(l-5)\delta_{v'l-5}, \tag{20,4}$$

$$D_{+}^{(5)} = C_5\,\zeta(l+1)\times\cdots\times\zeta(l+5)\,\delta_{v\,l+6} + \big[C_5\,\zeta(l+1)\,\zeta(l+2)\times \times\zeta(l+3)\big(\zeta^2(l+4)+\zeta^2(l+3)+\cdots+\zeta^2(l)\big) - - D_5\,\zeta(l-1)\,\zeta(l)\cdots\zeta(l+3)\big]\,\delta_{v\,l+4} + \big[C_5\,\zeta(l+1)\times \times\{\zeta^2(l+2)\big(\zeta^2(l+3)+\zeta^2(l+2)+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)\big)+ + \zeta^2(l+1)\big(\zeta^2(l+2)+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)\big)+\zeta^2(l)\big(\zeta^2(l+1)+ + \zeta^2(l)+\zeta^2(l-1)\big)\} - D_5\,\zeta(l-1)\,\zeta(l)\,\zeta(l+1)\big(\zeta^2(l+2)+ + \zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l-1)+\zeta^2(l-2)\big)\big]\,\delta_{v\,l+2} + + \big[C_5\,\zeta(l)\{\zeta^2(l+1)\big(\zeta^2(l+2)+\zeta^2(l+1)+\zeta^2(l)\big)+ + \zeta^2(l)\big(\zeta^2(l-1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l+1)\big)+\zeta^2(l-1)\big(\zeta^2(l-2)+ + \zeta^2(l-1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l+1)\big)\} - D_5\,\zeta(l-1)\{\zeta^2(l)\big(\zeta^2(l+1)+ + \zeta^2(l)+\zeta^2(l-1)+\zeta^2(l-2)\big)+\zeta^2(l-1)\big(\zeta^2(l-2)+ + \zeta^2(l-1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l-2)\big(\zeta^2(l-3)+\zeta^2(l-2)+ + \zeta^2(l-1)\big)\}\big]\,\delta_{v\,l} + \big[C_5\,\zeta(l)\,\zeta(l-1)\,\zeta(l-2)\big(\zeta^2(l-3)+ + \zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)+\zeta^2(l)+\zeta^2(l+1)\big) - D_5\,\zeta(l-2)\times \times\{\zeta^2(l-3)\big(\zeta^2(l-4)+\zeta^2(l-3)+\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)\big)+ + \zeta^2(l-2)\big(\zeta^2(l-3)+\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)\big)+ + \zeta^2(l-1)\big(\zeta^2(l-2)+\zeta^2(l-1)+\zeta(l)\big)\}\big]\,\delta_{v\,l-2} + + \big[C_5\,\zeta(l)\,\zeta(l-1)\ldots\zeta(l-4) - D_5\,\zeta(l-2)\,\zeta(l-3)\times \times\zeta(l-4)\big(\zeta^2(l-5)+\cdots+\xi^2(l-1)\big)\big]\,\delta_{v\,l-4} - - D_5\,\zeta(l-2)\,\zeta(l-3)\ldots\zeta(l-6)\,\delta_{v\,l-6}, \qquad (20,5)$$

$$D_{-}^{(0)} = -E_0\,\delta_{v\,l+1} + F_0\,\delta_{v\,l-1}, \qquad (21,0)$$

$$D_{-}^{(1)} = -E_1\,\xi(l+1)\,\delta_{v\,l+2} - \big[E_1\,\xi(l) - F_1\,\xi(l-1)\big]\,\delta_{v\,l} + + F_1\,\xi(l-2)\,\delta_{v\,l-2}, \qquad (21,1)$$

$$D_{-}^{(2)} = -E_2\,\xi(l+1)\,\xi(l+2)\,\delta_{v\,l+3} - \big[E_2\big(\xi^2(l+1)+\xi^2(l)\big) - - F_2\,\xi(l-1)\,\xi(l)\big]\,\delta_{v\,l+1} - \big[E_2\,\xi(l)\,\xi(l-1) - F_2\big(\xi^2(l-1)+ + \xi^2(l-2)\big)\big]\,\delta_{v\,l-1} + F_2\,\xi(l-2)\,\xi(l-3)\,\delta_{v\,l-3}, \qquad (21,2)$$

$$D_{-}^{(3)} = -E_3\,\xi(l+1)\,\xi(l+2)\,\xi(l+3)\cdot\delta_{v\,l+4} - \big[E_3\,\xi(l+1)\times \times\big(\xi^2(l)+\xi^2(l+1)+\xi^2(l+2)\big) - F_3\,\xi(l-1)\times \times\,\xi(l)\,\xi(l+1)\big]\,\delta_{v\,l+2} - \big[E_3\,\xi(l)\big(\xi^2(l-1)+\xi^2(l)+ + \xi^2(l+1)\big) - F_3\,\xi(l-1)\big(\xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)+\xi^2(l)\big)\big]\,\delta_{v\,l} - - \big[E_3\,\xi(l)\,\xi(l-1)\,\xi(l-2) - F_3\,\xi(l-2)\big(\xi^2(l-3)+ + \xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)\big)\big]\,\delta_{v\,l-2} + F_3\,\xi(l-2)\,\xi(l-3)\times \times\,\xi(l-4)\,\delta_{v\,l-4}, \qquad (21,3)$$

$$
\begin{aligned}
I^{(4)} = & - E_4 \xi(l+1)\xi(l+2)\dots\xi(l+4)\,\delta_{l'l-3} - \big[E_4\xi(l+1)\times \\
& \times \xi(l+2)\big(\xi^2(l+3)+\xi^2(l+2)+\xi^2(l+1)+\xi^2(l)\big) - \\
& - F_4\xi(l-1)\xi(l)\xi(l+1)\xi(l+2)\big]\,\delta_{l'l+3} - \big[E_4\{\xi^2(l+1)\times \\
& \times\big(\xi^2(l+2)+\xi^2(l+1)+\xi^2(l)\big)+\xi^2(l)\big(\xi^2(l+1)+ \\
& + \xi^2(l)+\xi^2(l-1)\big)\} - F_4\xi(l-1)\xi(l)\big(\xi^2(l+1)+\xi^2(l)+ \\
& + \xi^2(l-1)+\xi^2(l-2)\big)\big]\,\delta_{l'l+1} - \big[E_4\xi(l)\xi(l-1)\big(\xi^2(l+1)+ \\
& + \xi^2(l)+\xi^2(l-1)+\xi^2(l-2)\big) - F_4\{\xi^2(l-1)\big(\xi^2(l-2)+ \\
& + \xi^2(l-1)+\xi^2(l)\big)+\xi^2(l-2)\big(\xi^2(l-3)+\xi^2(l-2)+ \\
& + \xi^2(l-1)\big)\}\big]\,\delta_{l'l-1} - \big[E_4\xi(l)\xi(l-1)\xi(l-2)\xi(l-3) - \\
& - F_4\xi(l-2)\xi(l-3)\big(\xi^2(l-4)+\xi^2(l-3)+\dots+ \\
& + \xi^2(l-1)\big)\big]\,\delta_{l'l-3} + F_4\cdot\xi(l-2)\xi(l-3)\dots\xi(l-5)\,\delta_{l'l-5}, \qquad (21,4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^{(5)} = & - E_5(l+1)\xi(l+2)\dots\xi(l+5)\,\delta_{l'l+6} - \big[E_5\xi(l+1)\times \\
& \times\xi(l+2)\xi(l+3)\big(\xi^2(l+4)+\xi^2(l+3)+\dots+\xi^2(l)\big) - \\
& - F_5\xi(l-1)\xi(l)\dots\xi(l+3)\big]\,\delta_{l'l+4} - \big[E_5\xi(l+1)\times \\
& \times\{\xi^2(l+2)\big(\xi^2(l+3)+\xi^2(l+2)+\dots+\xi^2(l)\big)+ \\
& + \xi^2(l+1)\big(\xi^2(l+2)+\xi^2(l+1)+\xi^2(l)\big)+\xi^2(l)\times \\
& \times\big(\xi^2(l+1)+\xi^2(l)+\xi^2(l-1)\big)\} - F_5\xi(l-1)\xi(l)\times \\
& \times\xi(l+1)\big(\xi^2(l+2)+\xi^2(l+1)+\dots+\xi^2(l-2)\big)\big]\times \\
& \times\,\delta_{l'l+2} - \big[E_5\xi(l)\{\xi^2(l+1)\big(\xi^2(l+2)+\xi^2(l+1)+\xi^2(l)\big)+ \\
& + \xi^2(l)\big(\xi^2(l+1)+\xi^2(l)+\xi^2(l-1)\big)+\xi^2(l-1)\big(\xi^2(l-2)+ \\
& + \xi^2(l-1)+\xi^2(l)+\xi^2(l+1)\big)\}-F_5\cdot\xi(l-1)\{\xi^2(l)\big(\xi^2(l+1)+ \\
& + \xi^2(l)+\xi^2(l-1)+\xi^2(l-2)\big)+\xi^2(l-1)\big(\xi^2(l-2)+ \\
& + \xi^2(l-1)+\xi^2(l)\big)+\xi^2(l-2)\big(\xi^2(l-3)+\xi^2(l-2)+ \\
& + \xi^2(l-1)\big)\}\big]\,\delta_{l'l} - \big[E_5\xi(l)\xi(l-1)\xi(l-2)\big(\xi^2(l-3)+ \\
& + \xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)+\xi^2(l)+\xi^2(l+1)\big) - F_5\xi(l-2)\times \\
& \times\{\xi^2(l-3)\big(\xi^2(l-4)+\xi^2(l-3)+\xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)\big)+ \\
& + \xi^2(l-2)\big(\xi^2(l-3)+\xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)\big)+ \\
& + \xi^2(l-1)\big(\xi^2(l-2)+\xi^2(l-1)+\xi^2(l)\big)\}\big]\,\delta_{l'l-2} - \\
& - \big[E_5\xi(l)\xi(l-1)\dots\xi(l-4) - F_5\xi(l-2)\xi(l-3)\times \\
& \times\dots\times\xi(l-4)\big(\xi^2(l-5)+\xi^2(l-4)+\dots+\xi^2(l-1)\big)\big]\times \\
& \times\,\delta_{l'l-4} + F_5\xi(l-2)\xi(l-3)\times\dots\times\xi(l-6)\,\delta_{l'l-6}, \qquad (21,5)
\end{aligned}
$$

wobei bedeuten:

$$A_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(n)}), \qquad B_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(n)}),$$

$$\eta(l) = \sqrt{\frac{(l-m)\,(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}};\; C_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(n)})\,\sqrt{\frac{(l+m+1)\,(l+m+2)}{(2\,l+1)\,(2\,l+3)}},$$

$$D_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(n)})\,\sqrt{\frac{(l-m)\,(l-m-1)}{(2\,l-1)\,(2\,l+1)}},$$

$$\zeta(l) = \sqrt{\frac{(l-m)\,(l+m+2)}{(2\,l+1)\,(2l+3)}};\; E_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} - l\,R_{\mathrm{II}}^{(n)})\,\sqrt{\frac{(l-m+1)\,(l-m+2)}{(2\,l+1)\,(2\,l+3)}},$$

$$F_n = \frac{\hbar e}{\omega M}\,\frac{(i\,k)^n}{n!}\,(R_{\mathrm{I}}^{(n)} + (l+1)\,R_{\mathrm{II}}^{(n)})\,\sqrt{\frac{(l+m)\,(l+m+1)}{(2\,l-1)\,(2\,l+1)}},$$

$$\xi(l) = \sqrt{\frac{(l+m)\,(l+m+2)}{(2\,l+1)\,(2\,l+3)}} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir betrachten den *Sonderfall* $l' = 0$, $m' = 0$, der sich ergibt für ϑ^2_{mn} unter Berücksichtigung von $\vartheta^2_{mn} = (\Sigma\vartheta_z^{(q)})^2 + (\Sigma\vartheta_+^{(q)})^2 + (\Sigma\vartheta_-^{(q)})^2$,

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=0} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 \{1{,}35\cdot 10^{-6}\cdot (R_{\mathrm{I}}^{(5)})^2\cdot K^{10} + 7{,}7\cdot 10^{-5}\cdot R_{\mathrm{I}}^{(3)}\cdot R_{\mathrm{I}}^{(5)}\cdot K^8 + \\ + \left(1{,}11\cdot 10^{-3}\,(R_{\mathrm{I}}^{(3)})^2 + 7{,}64\cdot 10^{-4}\cdot R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)}\right) K^6 + 2{,}19\cdot 10^{-2}\times \\ \times R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)}\cdot K^4 + 0{,}109\,(R_{\mathrm{I}}^{(1)})^2\,K^2\}, \tag{22}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=1} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 \{(1{,}33\cdot 10^{-4}\,(R_{\mathrm{I}}^{(4)})^2 + 1{,}2\cdot 10^{-4} R_{\mathrm{I}}^{(4)} R_{\mathrm{II}}^{(4)} + 1{,}62\cdot 10^{-5}\times \\ \times (R_{\mathrm{II}}^{(4)})) K^8 + (4{,}84\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{I}}^{(2)}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} + 3{,}1\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{I}}^{(2)}\,R_{\mathrm{II}}^{(4)} + \\ + 3{,}92\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} + 8{,}73\cdot 10^{-3}\cdot R_{\mathrm{II}}^{(2)}\,R_{\mathrm{II}}^{(4)})\,K^6 + (0{,}088\times \\ \times (R_{\mathrm{I}}^{(2)})^2 + 0{,}0935\,R_{\mathrm{I}}^{(2)}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)} + 0{,}143\,(R_{\mathrm{II}}^{(2)})^2 + 0{,}0141\times \\ \times R_{\mathrm{I}}^{(0)}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} + 2{,}86\cdot 10^{-2}\,R_{\mathrm{I}}^{(0)}\,R_{\mathrm{II}}^{(4)} + 3{,}28\cdot 10^{-2}\,R_{\mathrm{II}}^{(0)}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} + \\ + 4{,}71\cdot 10^{-2}\cdot R_{\mathrm{II}}^{(0)}\,R_{\mathrm{II}}^{(4)})\,K^4 + (0{,}469\,R_{\mathrm{I}}^{(0)}\,R_{\mathrm{I}}^{(2)} + 0{,}945\times \\ \times R_{\mathrm{I}}^{(0)}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)} + 0{,}94\,R_{\mathrm{II}}^{(0)}\,R_{\mathrm{I}}^{(2)} + 1{,}894\,R_{\mathrm{II}}^{(0)}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)})\,K^2 + 0{,}995\times \\ \times (R_{\mathrm{I}}^{(0)})^2 + 3{,}99\cdot R_{\mathrm{I}}^{(0)}\,R_{\mathrm{II}}^{(0)} + 3{,}98\cdot (R_{\mathrm{II}}^{(0)})^2\}, \tag{23}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=2} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 \{(5{,}51\cdot 10^{-6}\,(R_{\mathrm{I}}^{(5)})^2 + 7{,}77\cdot 10^{-6}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)}\,R_{\mathrm{II}}^{(5)} + \\ + 2{,}75\cdot 10^{-5}\,(R_{\mathrm{II}}^{(5)})^2)\,K^{10} + (1{,}81\cdot 10^{-4}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} + \\ + 3{,}9\cdot 10^{-4}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)}\,R_{\mathrm{II}}^{(5)} + 4{,}02\cdot 10^{-4}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} + 1{,}5\cdot 10^{-3}\times \\ \times R_{\mathrm{II}}^{(3)}\,R_{\mathrm{II}}^{(5)})\,K^8 + (2{,}46\cdot 10^{-3}\,(R_{\mathrm{I}}^{(3)})^2 + 1{,}2\cdot 10^{-2}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)} + \\ + 2{,}06\cdot 10^{-2}\,(R_{\mathrm{II}}^{(3)})^2 + 1{,}515\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} + 4{,}61\cdot 10^{-3}\times \\ \times R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{II}}^{(5)} + 5{,}8\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{II}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} + 2{,}19\cdot 10^{-2}\,R_{\mathrm{II}}^{(1)}\,R_{\mathrm{II}}^{(5)})\,K^6 + \\ + (0{,}0441\,R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)} + 0{,}182\,R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)} + 0{,}173\,R_{\mathrm{II}}^{(1)}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)} + \\ + 0{,}606\,R_{\mathrm{II}}^{(1)}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)})\,K^4 + (0{,}218\,(R_{\mathrm{I}}^{(1)})^2 + 1{,}428\,R_{\mathrm{I}}^{(1)}\,R_{\mathrm{II}}^{(1)} + \\ + 1{,}98\cdot (R_{\mathrm{II}}^{(1)})^2)\,K^2\}, \tag{24}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=3} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 \{(7{,}12\cdot 10^{-5}\,(R_{\mathrm{I}}^{(4)})^2 + 5{,}1\cdot 10^{-4}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} R_{\mathrm{II}}^{(4)} + + 1{,}11\cdot 10^{-3}\,(R_{\mathrm{II}}^{(4)})^2)\,K^8 + (1{,}855\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{I}}^{(2)} R_{\mathrm{II}}^{(4)} + 7{,}55\cdot 10^{-3} \times \times R_{\mathrm{I}}^{(2)} R_{\mathrm{II}}^{(4)} + 7{,}59\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)} R_{\mathrm{I}}^{(4)} + 5{,}82\cdot 10^{-2}\,R_{\mathrm{II}}^{(2)} R_{\mathrm{II}}^{(4)})\,K^6 + + (0{,}0132\cdot (R_{\mathrm{I}}^{(2)})^2 + 0{,}1055\,R_{\mathrm{I}}^{(2)} R_{\mathrm{II}}^{(2)} + 0{,}211\,(R_{\mathrm{II}}^{(2)})^2)\,K^4\}, \tag{25}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=4} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 \{(1{,}166\cdot 10^{-6}\,(R_{\mathrm{I}}^{(5)})^2 + 1{,}07\cdot 10^{-5}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} R_{\mathrm{II}}^{(5)} + + 2{,}8\cdot 10^{-5}\,(R_{\mathrm{II}}^{(5)})^2)\,K^{10} + (5{,}63\cdot 10^{-5}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)} R_{\mathrm{I}}^{(5)} + 2{,}51\cdot 10^{-4} \times \times R_{\mathrm{I}}^{(3)} R_{\mathrm{II}}^{(5)} + 2{,}8\cdot 10^{-4}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)} R_{\mathrm{I}}^{(5)} + 1{,}25\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{II}}^{(3)} R_{\mathrm{II}}^{(5)})\,K^8 + + (6{,}81\cdot 10^{-4}\,(R_{\mathrm{I}}^{(3)})^2 + 6{,}81\cdot 10^{-3}\,R_{\mathrm{I}}^{(3)} R_{\mathrm{II}}^{(3)} + 1{,}7\cdot 10^{-2} \times \times (R_{\mathrm{II}}^{(3)})^2)\,K^6\}, \tag{26}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=5} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (5{,}6\cdot 10^{-6}\,(R_{\mathrm{I}}^{(4)})^2 + 6{,}7\cdot 10^{-5}\,R_{\mathrm{I}}^{(4)} R_{\mathrm{II}}^{(4)} + 2{,}0\cdot 10^{-4} \times \times (R_{\mathrm{II}}^{(4)})^2)\,K^8, \tag{27}$$

$$(\vartheta^2_{mn})_{l=6} = \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (5{,}54\cdot 10^{-8}\,(R_{\mathrm{I}}^{(5)})^2 + 7{,}7\cdot 10^{-7}\,R_{\mathrm{I}}^{(5)} R_{\mathrm{II}}^{(5)} + + 2{,}975\cdot 10^{-6}\,(R_{\mathrm{II}}^{(5)})^2)\,K^{10}. \tag{28}$$

4. Der radiale Anteil R_n.

Nachdem wir bisher die Integration über die Winkel durchgeführt haben, bleibt jetzt noch die Ausrechnung der Integrale über die radialen Anteile der Eigenfunktionen vorzunehmen; d. h. also, es sind die Ausdrücke zu berechnen

$$R_{\mathrm{I}}^{(q)} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\cdot r^2 R_{n'} \frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}r} r^q,$$

$$R_{\mathrm{II}}^{(q)} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 R_{n'} \frac{R_n}{r} r^q.$$

Wir haben jetzt die Form der radialen Eigenfunktionen festzulegen. Hierbei ist eine gewisse Willkür nicht zu vermeiden entsprechend unserer unvollkommenen Kenntnis der Bewegung der einzelnen Teilchen innerhalb des Atomkerns. Beschränken wir uns konsequent auf das in dieser Arbeit zugrunde gelegte Einkörpermodell, nehmen also an, daß der Drehimpuls des Kerns von einem einzelnen, lockerer gebundenen Teilchen herrührt,

das einen Rumpf umkreist, so scheint es am sinnvollsten, radiale Eigenfunktionen vom Typus

$$R_n(r) = C_l \left(\frac{r}{a_l}\right)^{l+1} \cdot e^{-\frac{r}{a_l}} \tag{29}$$

zu wählen. Denn sicher klingt die Eigenfunktion für große r exponentiell ab, während sie für kleine r ein durch den Wert des Drehimpulses vorgegebenes Potenzgesetz (r^l) erfüllen dürfte. Über die Konstante a müssen wir so verfügen, daß die Eigenfunktion ihr Maximum in der Gegend des empirischen Kernradius R erreicht, d. h. wir setzen

$$a_l = \frac{R}{l+1}. \tag{30}$$

Die Funktion R_n soll auf 1 normiert sein; dann ist

$$C_l^2 = \frac{2^{2l+5}}{a_l^3 (2l+4)!}. \tag{31}$$

Für $R_{n'}$ haben wir einfach $l' = 0$, also

$$R_{n'} = C_0 \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{a_0}} \quad \text{mit} \quad C_0^2 = \frac{4}{a_0^3 \cdot 3}. \tag{32}$$

Die Integrale werden dann:

$$R_l^{(q)} = \frac{(l+q+3)!}{\sqrt{(2l+4)!\,3}} \cdot 2^{l+\frac{7}{2}} \cdot \frac{(a_0)^{l+q+\frac{3}{2}} \cdot (a_l)^{q+\frac{3}{2}}}{(a_0+a_l)^{l+q+5}} \cdot \left(a_l(l+1) - a_0(q+3)\right), \tag{33}$$

$$R_{ll}^{(q)} = \frac{(l+q+3!)}{\sqrt{(2l+4)!\,3}} \cdot 2^{l+\frac{7}{2}} \cdot \frac{(a_0)^{l+q+\frac{3}{2}} (a_l)^{q+\frac{3}{2}}}{(a_0+a_l)^{l+q+4}}. \tag{34}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (22) bis (28) ein, so erhält man unter Benutzung von Gleichung (1) für die Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$(w)_{l=0} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} \cdot \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (1{,}88 \cdot 10^{-1} R^8 K^{10} + 5{,}31 \cdot 10^{-1} R^6 K^8 + \\ + 8{,}19 \cdot 10^{-1} R^4 K^6 + 6{,}13 \cdot 10^{-1} R^2 K^4 + 2{,}45 \cdot 10^{-1} K^2), \tag{35}$$

$$(w)_{l=1} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (5{,}17 \cdot 10^{-2} R^6 K^8 + 1{,}46 \cdot 10^{-1} R^4 K^6 + \\ + 9{,}08 \cdot 10^{-2} R^2 K^4 - 0{,}48 K^2 + 0{,}25 \cdot 10^{-1} R^{-2}), \tag{36}$$

$$(w)_{l=2} = \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} \left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (3{,}80 \cdot 10^{-2} R^8 K^{10} + 3{,}81 \cdot 10^{-2} R^6 K^8 + \\ + 1{,}31 R^4 K^6 + 1{,}02 \cdot 10^{-1} R^2 K^4 + 0{,}45 K^2), \tag{37}$$

$$(w)_{l=3} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (0{,}33 \cdot 10^{-3} R^6 R^8 + 2{,}52 \cdot 10^{-2} R^4 K^6 + + 0{,}85 \cdot 10^{-1} R^2 K^4), \tag{38}$$

$$(w)_{l=4} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (0{,}82 \cdot 10^{-4} R^8 K^{10} - 0{,}07 \cdot 10^{-4} R^6 K^8 + + 7{,}45 \cdot 10^{-5} R^4 K^6), \tag{39}$$

$$(w)_{l=5} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (0{,}05 \cdot 10^{-5} R^6 K^8), \tag{40}$$

$$(w)_{l=6} = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{\hbar c^3}\left(\frac{\hbar e}{\omega M}\right)^2 (0{,}21 \cdot 10^{-8} R^8 K^{10}). \tag{41}$$

5. *Diskussion.*

Wir setzen in den Gleichungen (35) bis (41) für den Kernradius

$$R = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3},$$

wobei A die Massenzahl des Kerns bedeutet.

Für den empirisch wichtigen Bereich ist die Abhängigkeit von A jedoch zu vernachlässigen, da es sich bei den beobachteten Isomerien stets um mittelschwere Kerne handelt. In diesem Intervall setzen wir daher einfach $R = 7 \cdot 10^{-13}$ cm. Diese Ergebnisse sind allerdings noch etwas zu modifizieren, da berücksichtigt werden muß, daß zu der von uns berechneten Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Lichtquants w_q noch die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Hüllelektrons aus der K-Schale w_e zu addieren ist. Dies erfordert aber keine neue Rechnung, da das Verhältnis

$$\frac{w_e}{w_e + w_q} = \alpha$$

der bekannte „Koeffizient der inneren Umwandlung" ist, der für unser Problem in den Arbeiten von Hebb und Uhlenbeck[1]) sowie von Dankoff und Morrison[2]) berechnet worden ist.

Diese Ergebnisse sind in Fig. 1 und 2 aufgezeichnet. Dabei wurde für den „radioaktiven γ-Zerfall", um den es sich hier ja handelt, die gleiche Darstellungsart benutzt, wie sie beim α-Zerfall (Geiger-Nuttall-Diagramm) und beim β-Zerfall (Sargent-Diagramm) üblich ist: Es wurden in logarithmischer Skala Zerfallsenergie E und Halbwertszeit τ aufgetragen und die theoretischen Kurven für verschiedene Werte des Drehimpulses eingezeichnet. Es sind bisher experimentell in acht Fällen gleichzeitig E und τ bekannt, nämlich:

---

[1]) M. H. Hebb u. G. E. Uhlenbeck, Physica **5**, 605, 1938. — [2]) S. M. Dankoff and P. Morrison, Phys. Rev. **55**, 122, 1939.

Tabelle 1.

Element	Z	A	E (MeV)	τ (Halbwertszeit/sec)
Zn [1])	30	69	0,47	$5 \cdot 10^4$
Se [2])	34	79	0,098	$3{,}6 \cdot 10^3$
Br [3])	35	80	0,045	$1{,}58 \cdot 10^4$
Kr [4])	36	83	0,049	$6{,}78 \cdot 10^3$
[5])	43	99	0,136	$2{,}38 \cdot 10^4$
Rh [6])	45	104	0,08	$2{,}52 \cdot 10^2$
In [7])	49	113	0,39	$6{,}3 \cdot 10^3$
In [8])	49	115	0,34	$1{,}47 \cdot 10^4$

Die acht Punkte sind in der Figur eingetragen. Man sieht, daß sie durchweg in den Streifen zwischen $l = 3$ und $l = 5$ fallen, jedoch durchaus

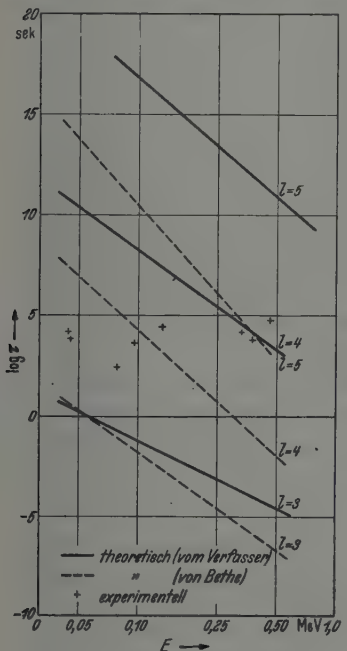


Fig. 1. Ohne innere Umwandlung.

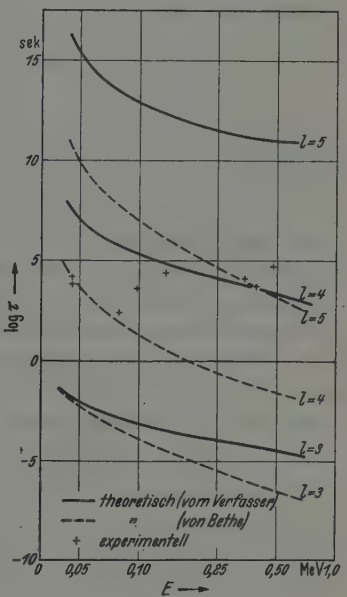


Fig. 2. Mit innerer Umwandlung.

[1]) J. W. Kennedy, G. T. Seaborg u. E. Segré, Phys. Rev. **56**, 1095, 1939. — [2]) A. Langsdorf jr. u. E. Segré, ebenda **57**, 105, 1940. — [3]) G. E. Valley u. R. L. Mc Creary, ebenda **55**, 666, 1939. — [4]) A. Langsdorf jr. u. E. Segré, l. c. — [5]) E. Segré u. G. T. Seaborg, ebenda **54**, 772, 1938. — [6]) B. Pontecorvo, ebenda **54**, 542, 1938. — [7]) S. W. Barnes, ebenda **56**, 414, 1939. — [8]) M. Goldhaber, R. D. Hill u. L. Szilard, ebenda **55**, 47, 1939.

nicht alle auf den theoretischen Kurven selbst liegen. Der Grund dafür ist wohl in der etwas willkürlichen Näherung des Einkörpermodells sowie in der etwas rohen Behandlung der Radialfunktion zu suchen. Man kann versuchen, die dadurch bedingten Fehler an Hand des Diagramms einfach so zu korrigieren, daß man dem Kernradius R einen etwas anderen Wert gibt derart, daß die eine oder die andere der beiden Nachbarkurven durch den experimentellen Punkt geht. Es ergeben sich folgende Resultate:

Tabelle 2.

Element	Z	A	l (Drehimpuls)	Kernradius (cm)
Zn	30	69	4	$3{,}84 \cdot 10^{-13}$
Se	34	79	3	$3{,}42 \cdot 10^{-16}$
Se	34	79	4	$2{,}13 \cdot 10^{-12}$
Br	35	80	3	$1{,}79 \cdot 10^{-15}$
Br	35	80	4	$4{,}65 \cdot 10^{-13}$
Kr	36	83	3	$2{,}26 \cdot 10^{-15}$
Kr	36	83	4	$4{,}94 \cdot 10^{-13}$
	43	99	4	$9{,}21 \cdot 10^{-13}$
Rh	45	104	3	$5{,}35 \cdot 10^{-15}$
Rh	45	104	4	$5{,}29 \cdot 10^{-13}$
In	49	113	4	$8{,}67 \cdot 10^{-13}$
In	49	115	4	$8{,}42 \cdot 10^{-13}$

Die so erhaltenen Kernradien stimmen nur zum Teil ungefähr mit dem empirischen Befund von rund $7 \cdot 10^{-13}$ cm überein; die Unvollkommenheit des Modells kommt hier teilweise sehr drastisch zum Ausdruck.

Wir vergleichen unsere Ergebnisse weiterhin mit der Formel von Bethe. Auch diesen Vergleich können wir am besten graphisch durchführen. In Fig. 1 und 2 sind neben den Kurven, die aus unserer Rechnung folgen (voll ausgezogen), zum Vergleich gestrichelt die Kurven eingezeichnet, die sich aus Bethes Formel ergeben. In beiden Fällen ist auch hier der gleiche Kernradius von $R = 7 \cdot 10^{-13}$ cm zugrunde gelegt.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Dr. S. Flügge (Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem) für seine Ratschläge und stetige Unterstützung dieser Arbeit sowie der Alexander von Humboldt-Stiftung für das Forschungsstipendium meinen herzlichen Dank aussprechen.

Berlin, November 1940.

Über den Aufbau von Gasentladungen. I [1]).

Von **H. Raether**, Jena.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Januar 1941.)

Startet eine Elektronenlawine an der Kathode einer Entladungsstrecke, so leitet sie eine Entladung ein, deren Entwicklung je nach der Größe des Produktes aus Druck p und Elektrodenabstand d in verschiedener Weise vor sich geht. Bei kleinen $p \cdot d$-Werten ($< \sim 1000$ Torr · cm) werden die Elektronen an der Anode abgegeben, während die Ionen oder Lichtquanten, die durch Elektronenstoß angeregt wurden, an der Kathode Nachlieferungselektronen ausschlagen. Mehrfache Wiederholung dieses „Ionisierungsspieles" führt zur Stromsteigerung und schließlich zum Kippen in eine andere Entladungsform, in einer Zeit, die kurz gegen die Dauer der Ionisierungsspiele ist. Dieser Entladungsaufbau wird *Townsend-Aufbau* genannt. Er steht im Gegensatz zu dem bei großem $p \cdot d$ ($> \sim 1000$ Torr · cm) vor sich gehenden *Kanalaufbau*, für den die Mitwirkung der „Eigenraumladung" der Lawine charakteristisch ist. Diese Eigenraumladung bewirkt, daß die Lawine von einer bestimmten „kritischen" Verstärkung an, bei der das Feld der Eigenraumladung vergleichbar mit dem angelegten Feld wird, nicht mehr mit $e^{\alpha x}$ (α = const) weiterwächst, und daß die Lawine ihre Geschwindigkeit beträchtlich erhöht (sogenannter „anodengerichteter" Kanal). Das Zurücklaufen zur Kathode wird den Ionen dadurch erspart, daß ihr starkes Raumladungsfeld die durch die gasionisierende Strahlung in der Umgebung gebildeten Photoelektronen hereinzieht und somit einen Entladungsschlauch zwischen Lawinenkopf und Kathode in Form des „kathodengerichteten" Kanals herstellt, in einer Zeit, die erheblich kleiner als die Dauer eines Ionisierungsspieles ist. — Mit Hilfe dieser beiden typischen Aufbauarten, deren Auftreten von dem jeweiligen $p \cdot d$-Wert abhängig ist, wird das vorliegende Versuchsmaterial geordnet und diskutiert: Es lassen sich die Versuche bei kleinen Drucken sowie die Versuche bei Atmosphärendruck und geringen Abständen ($\sim 0{,}1$ cm) bei Feldstärken gleich und nur wenig größer als die statische Durchschlagfeldstärke eindeutig dem Townsend-Aufbau zuordnen (Fall I). Die Experimente bei Atmosphärendruck und mehr sowie Abständen von 1 cm und mehr dagegen verlaufen bereits im Gebiet des Kanalaufbaues (Fall II). Eine ausführliche Betrachtung des Kanalaufbaues ergibt die Aufstellung einer Zündbedingung an Stelle der in diesem Gebiet ungültigen Townsendschen Zündbedingung, die die gemessenen statischen Durchschlagfeldstärken annähernd wiedergibt. Gleichzeitig ergibt sich im Bilde der Kanalentwicklungen eine Erklärung für die gegenüber dem Townsend-Aufbau erheblich kürzeren Aufbauzeiten bei hohen Drucken ($\sim 10^{-7}$ sec gegen 10^{-4} sec), da nur *eine* Elektronenlawine den Elektrodenraum zu durchlaufen hat, um die äußerst schnell verlaufende Kanalentladung einzuleiten. Bei Verwendung von Überspannungen erreicht die Elektronenlawine schon vor der Ankunft an der Anode ihre „kritische" Verstärkung, d. h. sie schlägt in kürzerer Zeit in die Kanalentwicklung um, so daß die Aufbauzeit mit zunehmender Überspannung abnimmt, wie die kathodenoszillographischen Untersuchungen ergeben hatten.

[1]) Ausführlicher Bericht des für die Physikertagung in Marienbad (September 1939) angemeldeten Vortrages.

Einleitung.

Unter dem „Aufbau" einer Gasentladung versteht man die räumliche und zeitliche Entwicklung einer Entladung, angefangen vom Start des Elektrons an der Kathode bis zum Erreichen einer bestimmten Stromstärke, wobei eine Feldstärke größer oder gleich der statischen Durchschlagfeldstärke angelegt wird. Dabei ist es üblich, bei hohen Drucken die Stromstärke bis zum Absinken der angelegten Spannung steigen zu lassen.

Wie vom Verfasser gezeigt wurde[1]), besteht ein prinzipieller Unterschied in dem Aufbau einer Entladung, d. h. in der Entwicklung der startenden Elektronenlawine, je nachdem wir bei geringen $p \cdot d$-Werten (meist: Elektrodenabstand $d \sim 1$ cm, Druck $p < \sim 10$ Torr) oder großen $p \cdot d$-Werten ($d > 1$ cm, $p \geqq 760$ Torr) arbeiten: Man kann zeigen, daß im Falle kleiner $p \cdot d$ ($< \sim 1000$ Torr · cm) der Aufbau im Sinne Townsends erfolgt, d. h. der Stromanstieg geht in der bekannten Weise in Ionisierungsspielen vor sich, wobei die Zahl der Elektronen, die die Kathode verlassen, ständig wächst (im folgenden „Townsend-Aufbau" genannt)[2]). Im Falle großer $p \cdot d$-Werte jedoch erreicht eine Elektronenlawine bei ihrem Lauf auf die Anode an ihrem Kopf eine so hohe (negative wie positive) Raumladung, daß das Kopffeld der Lawine vergleichbar mit dem Ursprungsfeld wird. Die Lawinenentwicklung, deren Trägeranstieg bisher mit $e^{\alpha x}$ ging (α Ionisierungskoeffizient der Elektronen, x Abstand von der Kathode), schlägt dann in eine sehr rasch wachsende Kanalentladung um, sowohl in Richtung Anode wie Kathode, wie die Nebelkammerbeobachtungen des Verfassers ergeben haben[3]). Die Vorstellung des Ionisierungsspieles verliert damit ihren Sinn, da nunmehr für die gesamte Entwicklung der Ablauf einer Elektronenlawine nötig ist. Im folgenden nennen wir diesen Aufbauvorgang „Kanalaufbau".

Nach dem Versuchsmaterial unterscheiden wir im wesentlichen zwei Fälle, die wir eingehender diskutieren werden:

Fall I:

$pd < 1000$ Torr · cm

a) Druck $p \sim 10$ Torr und weniger, Abstand $d \sim 1$ cm;
b) Druck $p \sim 760$ Torr, Abstand $d \sim 0{,}1$ cm und kleiner.

[1]) Naturwissensch. **28**, 749, 1940. — [2]) J. S. Townsend, Handb. d. Radiologie **1**, 228 ff., 1920. — [3]) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 92, 1938; ZS. f. Phys. **112**, 464, 1939.

Fall II:

$$pd > 1000 \text{ Torr} \cdot \text{cm} \begin{cases} \text{Druck } p \sim 760 \text{ Torr}, \\ \text{Abstand } d > 1 \text{ cm}. \end{cases}$$

Fall I. Kleine $p \cdot d$-Werte. „Townsend-Aufbau"

$$\text{a) } pd < \sim 10 \text{ Torr} \cdot \text{cm} \begin{cases} p < \sim 10 \text{ Torr}, \\ d \sim 1 \text{ cm}. \end{cases}$$

Bei niederen Drucken wird, wie bekannt, der zeitliche und räumliche Aufbau einer Entladung mit den Townsendschen Vorstellungen richtig beschrieben. Charakteristisch ist hierfür, daß die von den Elektronenlawinen, deren Verstärkung $e^{\alpha d}$ bis zu $\sim 10^4$ geht, zurückgelassenen Ionen auf die Kathode wandern und dort neue Elektronen auslösen („Ionisierungsspiel"). Da meist Feldstärken größer als gerade die statische angelegt werden, ist die Zahl μ der durch die Ionen ausgelösten Elektronen („Nachlieferungselektronen") [$\mu = \gamma\,(e^{\alpha d} - 1)$, ($\mu$ Elektronenausbeute der Ionen pro Lawine)] etwas höher als ein Elektron. Mithin wächst der Entladungsstrom allmählich an. Nach n Ionisierungsspielen, d. h. nach der Zeit $T = n \cdot t_I$, t_I Dauer eines Ionisierungsspieles, ist daher der Strom von $J(0) = J_0\, e^{\alpha d}$, J_0 Fremdstrom, auf $J(T) = J(0)\,\{1 + \mu + \mu^2 + \cdots + \mu^n\}$ angewachsen. Mithin, wenn $\mu \neq 1$,

$$\frac{J(T)}{J(0)} = \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1}$$

oder ($\mu \sim 1$)

$$T = \frac{t_I}{\mu - 1} \ln\left\{1 + (\mu - 1)\frac{J(T)}{J(0)}\right\}. \tag{1}$$

Die Versuche zeigten für die verschiedenen Gase den Einfluß der Beweglichkeit der positiven Ionen auf die Aufbauzeit T[1]), da $t_I = d/u_+$, wo u_+ die Geschwindigkeit der positiven Ionen ist, sowie die berechnete Abhängigkeit der Aufbauzeit von der Überspannung (bis zu 60%) wie von der Bestrahlung[2]). Im Falle der Überspannung wird eine bestimmte Stromstärke eher erreicht, da $\mu = \gamma\,(e^{\alpha d} - 1)$ mit zunehmender Feldstärke rasch anwächst, im Falle größerer Bestrahlung deshalb, weil die Zahl der Anfangselektronen größer ist.

---

[1]) M. Steenbeck, Wiss. Veröff. d. Siemens-Werke **9**, 42, 1930. — [2]) R. Schade, ZS. f. Phys. **104**, 487, 1937. Obige Formel für die Aufbauzeit wurde von dem gleichen Verfasser bereits auf eine etwas andere Art abgeleitet.

Die Tatsache, daß nur ein Teil der Nachlieferungselektronen durch Ionenaufprall, der andere durch Photoeffekt erzeugt wird[1]), ändert die obige Formel für die Aufbauzeit in

$$T = \frac{\mu^+ t^+ + \mu^L t^-}{\mu^+ + \mu^L - 1} \ln \left\{ 1 + (\mu^+ + \mu^L - 1) \frac{J(T)}{J(0)} \right\} \qquad (2)$$

um, wo $\mu^+ = \gamma\,(e^{\alpha d} - 1)$, d. h. der durch Ionen nachgelieferte Elektronen anteil, μ^L der durch Photoeffekt erzeugte und t^- die Laufzeit der Elektronen durch den Elektrodenraum ist[2]). Da $t^- < t^+$, so bestimmt, auch noch bei kleinem μ^+/μ^L, der Anteil des langsamsten Prozesses (hier die Elektronennachlieferung durch Ionen) wesentlich die Aufbauzeit. Im Falle von H_2, wo $t^+ \simeq 10^{-6}$ sec ($d = 1$ cm, $p = 10$ Torr, $E/p \sim 60$), berechnet man für $T = \frac{1}{2} t^+ \sim 5 \cdot 10^{-7}$ sec, wobei nach Costa (a. a. O.) $\mu^L = \frac{1}{2}\mu$ gesetzt wurde. Beobachtet (Schade, a. a. O.) wurde eine Zeitkonstante von etwa zwei Größenordnungen kleiner als bei Neon, d. h. 10^{-6} bis 10^{-7} sec.

Bei den angeführten Messungen wurde durch geeignete Vorionisierung der Entladestrecke die Zahl der Primärelektronen pro sec (n_0) so groß gehalten, daß der zeitliche Abstand zweier Primärelektronen ($1/n_0$) klein gegen die Aufbauzeit T, höchstens vergleichbar mit ihr war, wodurch der Entladeverzug unterdrückt wurde. Bei geringer Bestrahlung und Einlegen von Ruhepausen zwischen zwei Zündungen[3]) findet man natürlich einen Entladeverzug, der den bekannten statistischen Gesetzen gehorcht[4]). Für den Aufbau einer Entladung ist aber nicht nur wesentlich, daß ein Elektron für den Start der Entladung vorhanden ist, sondern, daß dieses Elektron mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zur Zündung führt. Die Berechnung dieser Zündwahrscheinlichkeit läßt sich nach den Überlegungen von Braunbek[5]) und Hertz[6]), die als Grundlage den Townsend-Aufbau haben, durchführen und liefert hierfür Werte, die sich schon bei Überspannungen von wenigen Prozenten rasch dem Werte 1 nähern und daher der Beobachtung entziehen. Indirekt beweisen dies die Oszillogramme von Steen-

[1]) H. Costa u. H. Raether, Naturwissensch. **36**, 593, 1938; H. Costa, ZS. f. Phys. **113**, 53, 1939; **116**, 508, 1940. — [2]) Vgl. hierzu auch die inzwischen erschienene Arbeit von W. Bartholomeyczyk, ZS. f. Phys. **116**, 241, 1940. Formel (2) kann leicht aus den Differentialgleichungen abgeleitet werden, die von Schade (a. a. O.) zur Ableitung der Formel (1) benutzt wurden. Auch hier $\mu^+ + \mu^L \sim 1$. — [3]) Das Einhalten dieser und anderer Vorsichtsmaßregeln wurde zuerst von K. Zuber, Ann. d. Phys. **76**, 231, 1925, erkannt. — [4]) Siehe Literatur in Strigel, Elektrische Stoßfestigkeit (Berlin 1939), S. 11—14. — [5]) W. Braunbek, ZS. f. Phys. **39**, 6, 1926. — [6]) G. Hertz, ebenda **106**, 102, 1937.

beck (a. a. O.), die durch Übereinanderschreiben von 50 bis 100 Zündvorgängen zusammengesetzt sind und trotzdem kein verwaschenes Bild ergeben. Der Entladeverzug wurde hierbei durch geeignete Maßnahmen unterdrückt; die Überspannung betrug etwa 40%.

Die Beobachtungen zeigen die von *einem* Elektron gestartete Entladung über den ganzen Elektrodenquerschnitt ausgebreitet, auch wenn innerhalb der Aufbauzeit im Mittel nur ein Primärelektron ausgelöst wird. Die Verhältnisse liegen folgendermaßen: Die aus diesem Primärelektron entwickelte Lawine hat nach Nebelkammerbeobachtungen eine Breite von $b \sim 2\sqrt{\frac{6\,U\alpha}{E}}\,d$ [1]), wo U die thermische Energie der Elektronen, α der Elektronenstoßionisierungskoeffizient, E die angelegte Feldstärke und d der Elektrodenabstand ist. In Luft mit $\alpha = 7\,\mathrm{cm}^{-1}$, $U = 6$ Volt, $E = 1000$ Volt/cm, $p = 10$ Torr, $d = 1$ cm gibt dies für $b \sim 1$ cm. Da die positiven Ionen infolge ihrer geringeren ungeordneten Energie ($\sim {}^1/_{30}$ Volt) einen kleineren Diffusionskoeffizienten als Elektronen besitzen ($D^+/D^- = v^+/v^- \sim 0{,}1$), verlassen die Ionen bei ihrer Rückwanderung auf die Kathode den Lawinenkanal nur unwesentlich, und es bliebe bei reinem Ionenstoß die Entladung auf den Querschnitt von etwa 1 cm beschränkt. Die seitliche Ausbreitung kann daher nur mit Hilfe des Photoeffektes erfolgen, der die Nachlieferungselektronen auch außerhalb des primären Lawinenkanals auslöst. Innerhalb einer Aufbauzeit, die bei nicht allzu großen Überspannungen eine große Zahl von Ionisierungsspielen umfaßt, wird dann ein Teil der Nachfolgelawinen durch Photoelektronen eingeleitet sein, die die Entladung über den Elektrodenquerschnitt verteilen und die bei niedrigen Drucken geläufige Ausdehnung der Entladung über den Elektrodenquerschnitt bewirken.

Bisher ist, wie gesagt, der Entladungsaufbau bis zu einer gewissen Stromstärke betrachtet worden. Man ist berechtigt anzunehmen, daß bei größeren Stromstärken der Aufbau nicht mehr raumladungsfrei, wie oben angenommen, vor sich geht, sondern im allgemeinen durch die Raumladung beschleunigt wird. Es findet ein Kippen in eine neue Entladungsform statt (Glimmentladung). Da dieser Umschlag in Zeiten, die klein gegen den Townsendschen Aufbau sind, geschieht, ist es berechtigt, den Aufbau noch als „Townsend-Aufbau" zu bezeichnen.

---

[1]) ZS. f. Phys. **107**, 91, 1937. Hier ist unter der Lawinenbreite die Entfernung verstanden, bis zu der die Ionendichte noch merklich ist.

b) $pd < \sim 100$ Torr · cm $\begin{cases} \text{Druck} \sim 760 \text{ Torr}, \\ \text{Abstand} \sim 0{,}1 \text{ cm und kleiner.} \end{cases}$

Die Diskussion der Versuche[1]) zeigt, daß bei dem angegebenen Druck und Abstand im Gebiet geringer Überspannungen (bis zu 5%) der Townsend-Aufbau die Grundlage bildet: Wird, wie es in den Versuchen geschehen ist[1]), die Zeit zwischen Anlegen der Feldstärke an die Elektroden und dem Absinken dieser Feldstärke infolge zu großer Leitfähigkeit der Funkenstrecke (Durchschlag) gemessen, so tritt bei Verwendung stärkerer Bestrahlung der statistische Charakter des Entladeverzuges zurück und es bleibt ein konstanter Wert übrig, der ebenfalls als „Aufbauzeit" der Entladung bezeichnet werden kann. Sie ergab sich bei Überspannungen von 3 bis 5%, $d = 0{,}068$ cm und $p = 760$ Torr, zu etwa $7 \cdot 10^{-5}$ sec. Da t^+ etwa $7 \cdot 10^{-7}$ sec beträgt, müßten ganz ungefähr 100 Ionisierungsspiele ablaufen, bis der Stromanstieg zum Durchschlag führt. Die Rechnung [Formel (1)] liefert nun für die Aufbauzeit einige 10^{-5} sec, d. h. es besteht eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung. Wenn die berechnete Aufbauzeit etwas zu klein gegenüber der gemessenen ist, so ist zu beachten, daß Tilles die Entwicklung der Entladung nicht bis zu einer gewissen Stromstärke, sondern bis zum Spannungsabfall mißt. Es ist also noch eine gewisse Zeit notwendig, in der die Entwicklung von der Townsend-Entladung in eine schwach leuchtende Kanalentladung (bei absinkender Elektrodenspannung) erfolgt, wie sie von Dunnington[2]) mit Hilfe des elektrooptischen Verschlusses auch bei kleinen Abständen ($\sim 0{,}1$ cm, 760 Torr) beobachtet wurde. Innerhalb dieses Kanals setzt nach Dunnington in wenigen 10^{-9} sec ein starkes Leuchten ein („Funken"). In welcher Weise dieser Übergang: Townsend-Entladung—Kanalentladung vor sich geht, ist nicht beobachtet; vermutlich wird es unter den durch Photoeffekt über den Elektrodenquerschnitt verteilten Lawinenkanälen solche geben, die sich überdecken, wo also ein Photoelektron die positiven Ionen der Vorgängerlawine noch im Gasraum antrifft und damit günstigere Ionisierungsbedingungen vorfindet. Infolgedessen steigt in diesem Kanal die Elektronennachlieferung durch Ionen aus der Kathode, womit in diesem Kanal, im Gegensatz zu den anderen, der Übergang in eine Schlauchentladung begünstigt ist, eine Schlauchentladung, ähnlich wie sie bei hohen Drucken im späteren Entwicklungsstadium der „Vorentladungskanal" (s. S. 398) darstellt. Auf jeden Fall ist bei dem langsamen Verlauf dieser Entwicklung keine prinzipielle Schwierigkeit

[1]) A. Tilles, Phys. Rev. **46**, 1015, 1934. — [2]) F. Dunnington, ebenda **38**, 1535, 1931.

in der Deutung. Es ist allerdings auffällig — vorausgesetzt, daß diese bisher ersten Messungen der Aufbauzeit in diesem $p \cdot d$-Gebiet bestätigt werden —, daß die nach Townsend berechnete Aufbauzeit kleiner als die beobachtete ist, im Gegensatz zu Fall Ia, worin man bereits Abweichungen vom Townsend-Aufbau vermuten könnte. Das wenige vorliegende Versuchsmaterial läßt hierüber noch keinen endgültigen Schluß zu, immerhin scheint eine solche Abweichung bei diesem kleinen $p \cdot d$ unwahrscheinlich.

Die Gültigkeit des Townsend-Aufbaues läßt die Berechnung der Zündwahrscheinlichkeit (vgl. S. 378, Anm. 5 u. 6) zu. Diese Zündwahrscheinlichkeit ist andererseits von Tilles (a. a. O.) bei konstanter Bestrahlung[1]) ($1{,}8 \cdot 10^{-15}$ A/cm^2) abhängig von der Überspannung ($\Delta U/U_{stat}$) gemessen worden. Tabelle 1 zeigt einen Vergleich beider.

Tabelle 1. Zündwahrscheinlichkeit p, abhängig von der Überspannung.

$\Delta U/U$	μ $(= \gamma\,(e^{\alpha d}-1))$	Berechnet	Beobachtet	
		p	σ (sec)	$p = 1/\sigma$
5 %	9,6	1	0,05	(= 1)
4 %	6	0,99	0,1	0,5
3 %	3,9	0,97	0,15	0,33
2 %	2,5	0,91	0,2	0,25
1 %	1,6	0,5	0,35	0,14

Ein Vergleich der beobachteten mit den berechneten Werten p zeigt, daß für diese Entladung die berechnete Zündwahrscheinlichkeit nicht mit der beobachteten übereinstimmt, denn es müßte $p \sim 1/\sigma$ gehen.

Man könnte den Grund für diese abweichende Spannungsabhängigkeit in dem der Townsend-Entwicklung nachfolgenden Entladungsaufbau suchen. Wahrscheinlich aber liegt der Grund nicht im Entladungsmechanismus, sondern in der Verwendung des Kugelfeldes statt eines homogenen. Wird an ein Kugelfeld eine Überspannung gelegt, so wird diese nur in der unmittelbaren Nähe der Achse der Anordnung herrschen, nach außen zu nimmt die Überspannung ab und unterschreitet an einer gewissen Stelle die statische Spannung. Diese Stelle rückt mit zunehmender Überspannung weiter hinaus, d. h. es werden immer größere Gebiete der Kugel für die Funkenbildung herangezogen, die Zahl der sich beteiligenden Elektronen nimmt zu und damit sinkt die Streuzeit mit zunehmender Überspannung.

[1]) Die Bestrahlung ist natürlich geringer als die oben zur Messung der Aufbauzeit verwendete, so daß ein Entladeverzug (σ) gemessen wird.

Eine kurze Rechnung soll zeigen, daß dies plausibel ist: Der Abstand der Kugeloberflächen $\delta = \delta_{Mitte} + \Delta\delta$ nimmt zu wie $\delta_{Mitte} + 2\frac{r^2}{2R} = \delta_{Mitte} + \frac{r^2}{R}$ (r Entfernung senkrecht von der Mittelachse der beiden Kugeln, R Kugelradius). Die Elektrodenfläche der Kugeln ist bis zu solchen Werten von r wirksam, wo

$$\frac{U_{stat} + \Delta U}{\delta_{Mitte} + \Delta\delta} \sim \frac{U_{stat}}{\delta_{Mitte}} \cdot 1{,}01$$

(der Faktor 1,01 tritt hinzu, da von $\frac{\Delta U}{U} = 1\%$ ab $p \sim 1$ gesetzt werden kann, was die Rechnung vereinfacht). Daraus folgt

$$\frac{\Delta\delta}{\delta_{Mitte}} \sim \frac{\Delta U}{U} - 0{,}01$$

und die wirksame Fläche

$$F_{eff} = \pi r^2 = \pi R\,\Delta\delta = \pi R\,\delta_{Mitte}\left(\frac{\Delta U}{U} - 0{,}01\right) = 0{,}2\left(\frac{\Delta U}{U} - 0{,}01\right).$$

Es werden 10^4 El/cm² · sec ausgelöst, so daß $F_{eff} \cdot \sigma \cdot 10^4$ die während der Streuzeit σ ausgelösten Elektronen angibt.

Tabelle 2. Die wirksame Fläche F_{eff} sowie die während der mittleren Streuzeit σ ausgelösten Elektronen $= F_{eff} \cdot \sigma \cdot 10^4$ als Funktion der Überspannung.

$\Delta U/U$	F_{eff}	$F_{eff} \cdot \sigma \cdot 10^4$
5 %	$8 \cdot 10^{-3}$ cm²	4
4 %	$6 \cdot 10^{-3}$ cm²	6
3 %	$4 \cdot 10^{-3}$ cm²	6
2 %	$2 \cdot 10^{-3}$ cm²	4
(1 %	$1 \cdot 10^{-3}$ cm²	5)

Zur letzten Zeile: Nimmt man $\Delta U/U = 1\%$, rechnet etwa bis $\Delta\delta/\delta_{Mitte} \sim 1/2$ und berücksichtigt $p \sim 1/2$, so ergibt sich ein mit den übrigen Werten übereinstimmender Wert.

Das Wesentliche dieser Zahlen ist ihre Konstanz, d. h. die Zahl der Elektronen, die den Durchschlag einleiten, ist nicht spannungsabhängig, wie es nach allem Bisherigen auch zu erwarten ist. Der Zahlenwert selbst (~ 5 Elektronen) besagt wenig, da die Strahlungsintensität nicht an den verwendeten Kupferelektroden, sondern an einer Nickelplatte gesondert, mithin sicher zu groß gemessen wurde. (*Cu* höhere Austrittsarbeit, außerdem beim obigen Versuch streifender Einfall des Lichtes auf die Kugelelektroden). Eine Widerholung dieser Messungen im ebenen Feld müßte den konstanten Wert 1 liefern.

Die bisher behandelten Experimente zeigen keine Ergebnisse, die den Townsendschen Vorstellungen Schwierigkeiten bereiten. Bei großen $p \cdot d$-Werten hingegen, die wir im folgenden behandeln, treten so grundsätzlich andere Verhältnisse ein, daß wir einen anderen Aufbau, den „Kanalaufbau", annehmen müssen.

Fall II. Große $p \cdot d$-Werte. „Kanalaufbau".

$pd > \sim 1000$ Torr · cm { Druck ~ 760 Torr und mehr, Abstand $\sim 1{,}3$ cm und größer.

a) Einleitung. Der entscheidende Unterschied der Entwicklung der Entladung bei großen Abständen und hohen Drucken (großen $p \cdot d$-Werten) ist, daß die Lawine bei ihrem Lauf auf die Anode, währenddessen die Trägerzahl mit $e^{\alpha x}$ wächst, schließlich so viel Ladungsträger erzeugt, daß die Lawine durch das Feld der von ihr gebildeten Ladungen sich umbilden muß, sowohl bezüglich ihrer Geschwindigkeit wie ihres Trägerbildungsgesetzes. Wie diese Entwicklung verläuft, war mit den üblichen Methoden nicht zu erkennen: die „Vorstrommessungen" (im stationären Zustand) liefern allein den Anstieg der Lawine nach dem $e^{\alpha x}$-Gesetz[1]), die Beobachtungen mit dem elektrooptischen Verschluß geben die Entwicklung im spätesten Stadium, wenn die Spannung absinkt und ein leuchtender Kanal vorhanden ist, und der Kathodenstrahloszillograph kann nur die Zeitdauer zwischen Start des ersten Elektrons und Spannungsabsenkung angeben. Die in dieser „Aufbauzeit" in der Entladestrecke vor sich gehende räumliche Entwicklung beobachten zu können, ist jedoch der Vorzug der Nebelkammer, womit die Ergebnisse der Vorstrommessungen und der elektrooptischen Beobachtungen überbrückt und in wichtigen Punkten ergänzt werden.

b) Der „Kanalaufbau" als Ergebnis der Nebelkammerbeobachtungen. Die Nebelkammerbeobachtungen des Verfassers über die Entwicklung der Elektronenlawine[2]) ergaben, daß die Entwicklung des Funkens in dem Lawinenkanal des ersten ausgelösten Elektrons vor sich geht im Gegensatz zum Townsend-Aufbau[3]). Die Resultate können wir im einzelnen folgendermaßen zusammenfassen:

Die von einem Photoelektron gestartete Elektronenlawine läuft mit der normalen Lawinengeschwindigkeit $u_{Law} = 1{,}25 \cdot 10^7$ cm/sec (Luft, $E/p \sim 40$)[4]) und mit $e^{\alpha x}$ wachsend auf die Anode. Erreicht der Exponent des Verstärkungsfaktors αx den Wert ~ 20, so bildet sich die Lawinen-

[1]) Das Gesetz $n = \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma\,(e^{\alpha d} - 1)}$ setzt bereits mehrere Ionisationsspiele voraus, gilt also nicht für die erste Lawine. — [2]) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 92, 1938; ZS. f. Phys. **112**, 464, 1939, sowie Arch. f. Elektrot. XXXIV, 49, 1940. — [3]) Dies ist ein wesentlicher Schritt über R. Strigel (Wiss. Veröff. d. Siemens-Konz. XI, 1, 52, 1932) hinaus, welcher fand, daß ein Primärelektron genügt, den Durchschlagsvorgang in Gang zu setzen; diesem können jedoch noch viele *Nachfolge*lawinen (d. h. durch die Entladung entstandene) folgen, worüber die Oszillogramme keinen Aufschluß geben. — [4]) Vgl. Anm. 1, S. 379.

entladung um, denn jetzt ist im Lawinenkopf eine solche Raumladung konzentriert, daß deren Feld von der Größe des angelegten Feldes E_0 ist. Die Feldverzerrung am Kopf (durch anodenseitige, negative Raumladung) nimmt weiter zu, so daß die unter dem Einfluß dieses steigenden Kopffeldes laufenden Elektronen zu einer rasch auf die Anode laufenden Kanalentladung führen. Die Beobachtung ergab für die Geschwindigkeit dieses aus dem Lawinenkopf kommenden „anodengerichteten" Kanales einen Wert von $\sim 8 \cdot 10^7$ cm/sec. Die Nebelkammerbilder zeigten außerdem, daß die für die Weiterentwicklung der Entladung entscheidende Verbindung des Lawinenkopfes mit der Kathode dadurch ermöglicht wird, daß sich aus der Gegend des Lawinenkopfes ein sehr rasch laufender Kanal (Mindestgeschwindigkeit 1 bis $2 \cdot 10^8$ cm/sec) in Richtung auf die Kathode entwickelt, so daß nunmehr ein Kathode und Anode verbindender Entladungsschlauch vorhanden ist, der das Bett für die folgende Funkenentladung bildet. Eine ausführliche Diskussion zeigte, daß diese hohe Laufgeschwindigkeit nur verständlich ist unter der Annahme, daß in der Umgebung des Lawinenkopfes bzw. des anodengerichteten Kanals im Gas Photoelektronen ausgelöst werden[1]). Durch den Nachweis dieser gasionisierenden Strahlung in der Nebelkammer[2]), insbesondere durch das Auffinden dieser Strahlung in einer noch unselbständigen Entladung[3]) ist diese Annahme berechtigt. Diese Photoelektronen fallen in das hohe, durch die positive (kathodenseitige) Eigenraumladung erzeugte Feld, wobei sie wiederum diese kurzwellige Strahlung anregen. Auf diese Weise wächst durch Anstückelung dieser Lawinen der Photoelektronen ein Kanal zur Kathode zurück. Eine eingehendere Betrachtung zeigte, daß für diese Art der Kanalentwicklung mittels Photoelektronen aus dem Gas eine hohe Feldverzerrung notwendig ist. Dies deckt sich mit der Beobachtung: 1. daß, bevor ein kathodengerichteter Kanal entsteht, der anodengerichtete gestartet sein muß: denn mit der Entwicklung des anodengerichteten steigt die Feldverzerrung bis zu einer Größe, bei der schließlich die kathodengerichtete Entladung einsetzen kann. Im Zusammenhang damit ist ihre Geschwindigkeit größer; die Beobachtung liefert eine Mindestgeschwindigkeit von einigen 10^8 cm/sec. 2. Die hohe Feldverzerrung vor dem Kanalkopf bringt es mit sich, daß das angelegte Feld nur eine geringe Führung der Kanalentladung bedeutet, so daß die kathodenseitige Entladung sich oft in Zickzacklinien der Kathode

[1]) E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. techn. Phys. **11**, 435, 1935; ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936; H. Raether, Phys. ZS. **15**, 560, 1936, sowie a. a. O.; L. B. Loeb, Rev. of Modern Physics **8**, 267, 1936. — [2]) ZS. f. Phys. **110**, 611, 1938. — [3]) W. Schwiecker, Naturwissensch. **28**, 380, 1940, sowie ZS. f. Phys. **116**, 562, 1940.

nähert. — Ist der Entladungsschlauch an der Kathode angelangt, so werden auf den letzten Weglängen die positiven Ionen auf der Kathode Elektronen ausschlagen können und dann zusammen mit der gasionisierenden Strahlung die Entladung in dem Schlauch aufrechterhalten.

Bei flüchtiger Betrachtung ließe sich einwenden, daß mit dem Aufbau dieses Entladungsschlauches („Vorentladungskanal") wenig Fortschritte erreicht sind, denn die im Schlauch aus der Kathode ausgeschlagenen Elektronen stehen im Grunde genommen den gleichen Bedingungen gegenüber wie das Primärelektron, da die längs des Schlauches nahezu gleichmäßig verteilten Träger auf das Längsfeld, d. h. dem angelegten elektrostatischen parallelen Feld keinen Einfluß haben[1]). Eine nähere Betrachtung

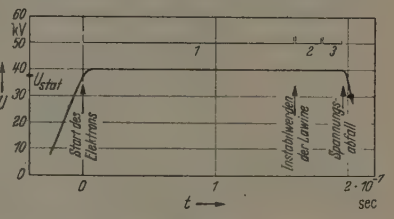


Fig. 1. Durchschlagoszillogramm, gedeutet nach Nebelkammerbeobachtungen, etwa 10% Überspannung. 1. Laufzeit der Elektronenlawine bis zu ihrer kritischen Verstärkung ($1{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec), 2. Entwicklungsdauer des anodengerichteten Kanals ($\sim 2 \cdot 10^{-8}$ sec), 3. Ausbildungszeit des kathodengerichteten Kanals ($\sim 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ sec).

zeigte jedoch, daß sich infolge der gegenüber Ionen größeren Diffusion der Elektronen ein radiales Feld ausbildet, welches nicht nur eine starke Erhöhung der Elektronengeschwindigkeit gegenüber der Lawinengeschwindigkeit bewirkt, sondern auch gleichzeitig eine erhöhte Ionisierungsausbeute der Elektronen hervorruft, die sogar mit fallender Spannung zunimmt und damit die fallende Charakteristik der Funkenentladung erklärt.

In einem Rogowskischen Oszillogramm (Fig. 1) sind diese den Nebelkammerbildern entnommenen Entwicklungsstadien noch einmal kurz zusammengefaßt, wobei die Bedingungen der Nebelkammerversuche zugrunde gelegt wurden [Elektrodenabstand 3,6 cm, Druck 250 Torr (20° C), 10% Überspannung ($U_{stat} = 37$ kV)].

c) Folgerungen aus der Vorstellung des Kanalaufbaues:

1. Kriterium für das Auftreten des Kanalaufbaues. Für die eben beschriebene Lawinenentwicklung ist also entscheidend, daß das Raumladungsfeld am Lawinenkopf ($E_{L\,K}$) vergleichbar mit dem angelegten Feld (E_0) wird; hierdurch wird die Entwicklung des anodengerichteten Kanals eingeleitet, die zu dem vom Townsend-Aufbau abweichenden „Kanal-Aufbau"

[1]) Vorausgesetzt natürlich, daß nicht so lange gewartet wird, bis sich die Ladungen gemäß ihrem Vorzeichen getrennt haben.

führt. Wann die eine oder andere Art der Entwicklung vor sich geht, entscheidet die Möglichkeit, ob die Lawine in ihrem Kopf eine hinreichende Ladung ansammelt, den Umschlag herbeizuführen. Bei Kanalaufbau muß also gelten:

$$E_{LK} = \frac{Q \cdot \varepsilon}{4\pi \Delta r^2} \cong E_0 \quad [\text{Volt/cm}] \tag{3}$$

[Q Ladung im Lawinenkopf, r dessen Radius, $\Delta = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}}$, ε Elementarladung (in Coul)]. Für Q werden wir $e^{\alpha x}$ setzen, da die insgesamt gebildeten Elektronen im Lawinenkopf angehäuft sind. Diese Ladung bzw. ihr Feld auf dem anodenseitigen Ende des Lawinenkopfes bestimmt den Umschlag der Lawinenentladung. Setzen wir r gleich der halben Lawinenbreite, wobei wir festsetzen, daß innerhalb r etwa die Hälfte der Ladungsträger liegen soll (ungefähr an dieser Stelle findet auch der steilste Abfall der Trägerdichte statt)[1]), so wird

$$r \cong \sqrt{3Dt} = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{U x}{E_0}} \tag{4}$$

(U thermische Energie der Elektronen in der Lawine). Zusammen mit (3) ergibt sich

$$E_{LK} = \frac{\varepsilon \cdot e^{\alpha x_{kr}}}{18 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \cdot U \cdot x_{kr}}{E_0}} \cong E_0$$

oder

$$e^{\alpha x_{kr}} = 2 \cdot 10^8 \cdot x_{kr}. \tag{5}$$

Hieraus berechnen wir x_{kr}, die kritische Lawinenlänge, für verschiedene Elektrodenabstände und ihre zugehörigen statischen Durchbruchsfeldstärken bzw. α; U nehmen wir gleich 6 Volt, ein Wert, der Nebelkammerbeobachtungen der Lawinengeschwindigkeit entnommen wurde. Er wurde konstant gesetzt, da seine Spannungsabhängigkeit nicht bekannt ist[2]), aber sich infolge der geringen Änderung der Durchbruchsfeldstärke mit dem Elektrodenabstand auch nur wenig ändert. Im übrigen ist selbst eine (nicht zu erwartende) Änderung um den Faktor 2 ohne Einfluß auf x_{kr}. Es zeigt dies in Fig. 2 die Kurve für x_{kr}, falls die Elektrodenladung gleich um den Faktor 10 erhöht wird. Wir vergleichen in Fig. 2 x_{kr} mit dem Elektrodenabstand d: für $x_{kr} < d$ erwarten wir Kanalaufbau, für $x_{kr} > d$ Townsend-Aufbau und entnehmen ihr, daß wir in der Gegend von etwa

[1]) Diese Festsetzung steht nicht im Gegensatz zu den in der Nebelkammer gemessenen Lawinenbreiten (vgl. S. 379, Anm. 1), da die oben angenommene Breite das Gebiet der stärksten Ladungskonzentration umfaßt. — [2]) Es gilt zwar $U = \text{const} \cdot E/\sqrt{\varkappa}$, worin $\varkappa$ in unbekannter Weise feldstärkeabhängig ist.

1,3 cm bei statischer Durchschlagfeldstärke die Grenze beider Aufbauarten vor uns haben, d. h. $p \cdot d \sim 1000$ Torr · cm.

Die Formel (3) und ihr physikalischer Inhalt wurden hergeleitet aus der Forderung, daß das Feld am Lawinenkopf gleich dem angelegten Feld

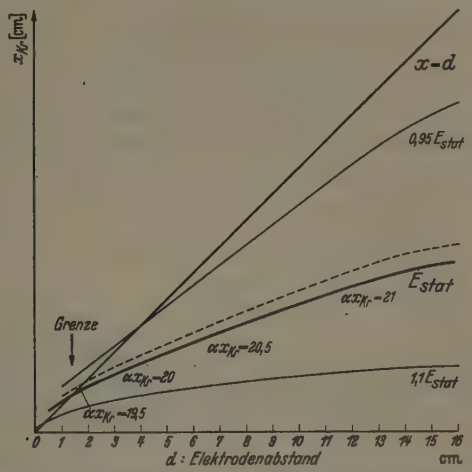


Fig. 2. Vergleich von x_{kr}, berechnet mit Hilfe der Formel (5), mit dem Elektrodenabstand d. Der Berechnung wurde in der stark ausgezogenen Kurve die statische Durchbruchfeldstärke zugrunde gelegt, in den schwach ausgezogenen Kurven 1,1 E_{stat} und 0,95 E_{stat}. Hieraus geht die außerordentlich starke Empfindlichkeit von x_{kr} gegenüber der Feldstärke hervor.

Die gestrichelte Kurve gibt x_{kr} für die Formel $e^{\alpha x_{kr}} = 2 \cdot 10^8\, x_{kr}$ und zeigt die Unempfindlichkeit von x_{kr} gegen Änderungen in der rechten Seite der Formel, hier eine Änderung um den Faktor 10. — Für $x_{kr} < d$ ist Kanalaufbau zu erwarten für $x_{kr} > d$ Townsend-Aufbau; die Grenze liegt bei etwa 1,3 cm (760 Torr), wie der Schnitt der stark ausgezogenen Kurve mit der Geraden $x = d$ zeigt.

sein soll. Daß die obige allgemeine Formulierung in Einklang mit dem experimentellen Befund ist, daß nach einer gewissen „kritischen Verstärkung", $\alpha x_{kr} \sim 20$, eine Umbildung der Lawine eintritt, zeigen die in Fig. 2 angeschriebenen Zahlen, die den Wert von αx_{kr} angeben, bei Erfüllung der Formel (3).

Bedingung (3) können wir auch herleiten aus der Forderung, daß die Lawinenladung $Q_{Law} = e^{\alpha d}$ vergleichbar mit der innerhalb der Fläche des Lawinenquerschnitts $(2r)^2$ liegenden Ladung auf den Elektroden Q_{El} sein muß, damit die Gültigkeit der Townsend-Theorie aufhört:

$$Q_{Law} \simeq Q_{El} \tag{6}$$

oder

$$e^{\alpha d} \sim (2r)^2 \cdot \Delta \cdot E_0,$$

die sich von (3) um den belanglosen Faktor π unterscheidet. Fig. 3 stellt beide Werte gegenüber und zeigt, daß für Abstände kleiner als etwa 1 cm (760 Torr) das Feld vor dem Lawinenkopf nicht mehr für den Start der Kanalentwicklung ausreicht. Die Grenze ($p \cdot d \sim 1000$ Torr · cm) kann

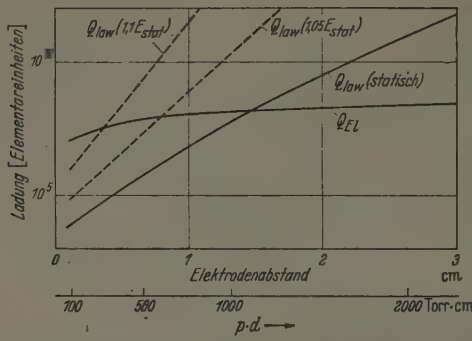


Fig. 3. Für verschiedene Elektrodenabstände ist, bei der jeweiligen statischen Feldstärke, die Ladung auf den Elektroden innerhalb des Lawinenquerschnittes, Q_{El}, mit der Ladung einer Lawine, Q_{Law}, verglichen, die nach Durchlaufen des Elektrodenabstandes erzeugt wird. Die punktierten Kurven geben das gleiche für geringe Überspannungen an.

man aber nicht als scharf bezeichnen, da eine geringe Unsicherheit in der Feldstärke E oder dem Ionisierungskoeffizienten eine starke Verlagerung der Q_{Law}-Kurve mit sich bringt (s. Fig. 3).

Statt den Abstand bei festem Druck zu verändern, ist in Tabelle 3 bei festem Abstand (1 cm) die Lawinenladung $e^{\alpha d}$ mit Q_{El} bei variablem Druck verglichen:

Tabelle 3. Vergleich der Lawinenladung $e^{\alpha d}$ mit der Elektrodenladung Q_{El} · Luft ($d = 1$ cm).

p (Torr) (= $p \cdot d$ Torr · cm)	αd	$e^{\alpha d}$	Q_{El}
1	5	$2 \cdot 10^2$	$\sim 1 \cdot 10^8$
10	8,5	$5 \cdot 10^3$	
100	13	$5 \cdot 10^4$	
760 (1 Atm)	16	$8 \cdot 10^6$	
1000	20	$2 \cdot 10^8$	
1520 (2 Atm)	22	$3 \cdot 10^9$	
2280 (3 Atm)	28,5	$2 \cdot 10^{12}$	
3040 (4 Atm)	33,5	$3 \cdot 10^{14}$	

Auch hier stellt sich $p \cdot d \sim 1000$ Torr · cm als Grenze heraus. Dies ist deshalb erwähnenswert, da das Ähnlichkeitsgesetz nicht mehr auf die

obige Bedingung (5) $A \cdot x = e^{\alpha x}$ zutrifft (A = const). Die Abweichungen sind jedoch sehr gering (vgl. die Diskussion S. 391).

2. *Berechnung der statischen Durchbruchsfeldstärke: Zündbedingung bei Kanalaufbau*[1]). Die große Empfindlichkeit der kritischen Länge auf eine Änderung der Feldstärke (s. Fig. 2) legt den Gedanken nahe, daß man im Falle des Kanalaufbaues in erster Näherung eine Zündbedingung an Stelle der Townsendschen Zündbedingung erhält, falls man fordert, daß der Elektrodenabstand *gleich* der kritischen Lawinenlänge wird, d. h. daß gerade noch innerhalb des Elektrodenabstandes das Feld am Lawinenkopf

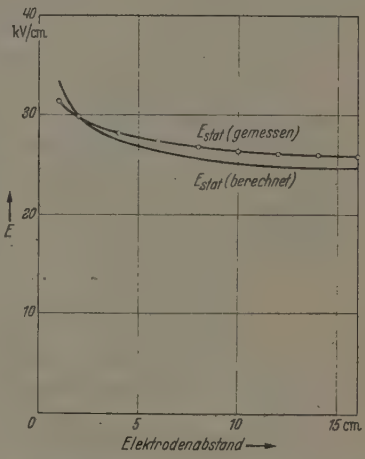


Fig. 4. Vergleich der gemessenen statischen Durchbruchfeldstärke mit der nach Formel (5) berechneten, falls für $x_{kr} = 0{,}8\,d$ gesetzt wird. Man erhält also eine recht gute Annäherung beider Werte, wenn man verlangt, daß eine Elektronenlawine noch vor der Anode, d. h. in $0{,}8\,d$, ar ihrem Kopf ein Raumladungsfeld gleich dem angelegten Feld erzeugt.

erreicht wird, den Umschlag der Lawinenentladung zu bewirken. Diese Forderung ist natürlich zu gering, da der anodenseitige Kanal bis zu einem gewissen Maße entwickelt sein muß, um an seiner Rückseite eine so hohe Feldverzerrung durch die zurückgelassene positive Raumladung zu erzeugen, daß der kathodengerichtete Kanal starten kann. Nimmt man daher willkürlich an, daß mit Erreichen der kritischen Verstärkung in 0,8 Elektrodenabstand der Durchbruch vor sich gehen kann, und setzt in Formel (5) für $x_{kr} = 0{,}8\,d$ ein, so erhält man für die statische Feldstärke Werte, die

[1]) Wie ich den soeben erschienenen Physikalischen Berichten (Heft 20. S. 1934. 1940) entnehme, scheint J. H. Meek (Phys. Rev. **57**, 722, 1940) ähnliche Überlegungen zu meinen Nebelkammerversuchen angestellt zu haben. Es ist mir jedoch unter den augenblicklichen Umständen nicht möglich gewesen, dieses Heft der Phys. Rev. zu bekommen.

in Fig. 4 den gemessenen[1]) gegenübergestellt sind. Würde man hierbei $x_{kr} = d$ fordern, so ergäbe sich gegenüber den mit 0,8 d berechneten Werten von E_{stat} nur ein geringer Unterschied (s. Tabelle 4), so daß wir

$$e^{\alpha d} = 2 \cdot 10^8 \cdot d \qquad (7)$$

als *statische Zündbedingung bei Kanalaufbau* bezeichnen können.

Die Ursache für den noch verbleibenden Unterschied zwischen Beobachtung und Berechnung zu finden, ist auf Grund der einfachen Vorstellungen, die hier angenommen sind, nicht möglich. Denn schon die Annahme, daß bis zur Ausbildung eines Feldes vor dem Lawinenkopf, vergleichbar mit dem Ursprungsfeld, der Anstieg mit $e^{\alpha x}$ erfolgt, ist nur eine Näherung. Es hat daher auch keinen Zweck, feinere Einzelheiten, wie Abhängigkeit der U_{therm} von der Feldstärke, zu berücksichtigen. Im übrigen ist die berechnete E_{stat} ziemlich unempfindlich gegen die auf der rechten Seite der Formel (5) vor sich gehenden Änderungen. Spalte 5 in Tabelle 4 zeigt die Änderung von E_{stat} (berechnet), falls die rechte Seite um den Faktor 10 erhöht wird. Wir können daher sagen, daß wir schon eine gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse bekommen, wenn wir fordern, die Lawine soll sich innerhalb des Elektrodenabstandes umbilden können, um den Kanalaufbau einzuleiten.

Tabelle 4. Vergleich der berechneten E_{stat} mit den gemessenen, falls für $x_{kr} = 0{,}8\,d$ oder d gesetzt wird bzw. statt Formel (7): $e^{\alpha d} = 10 \cdot 2 \cdot 10^8\,d$ zugrunde gelegt wird.

d	E_{stat} (kV/cm)			
cm	gemessen	$x = 0{,}8 \cdot d$	$x = d$	$e^{\alpha d} = 10 \cdot 2 \cdot 10^8\,d$
(1	31,4	33,4	32,4	34,2)
2	29,8	30	29,3	30,4
4	28,2	27,5	26,9	27,8
6	27,4	26,4	25,8	26,7
8	26,8	25,8	25,3	25,9
10	26,4	25,2	24,9	25,4
12	26,1	24,9	24,5	25,1
14	25;9	24,7	24,3	24,8
16	25,8	24,5	24,1	24,6

Wie oben bereits bemerkt, gilt für die obige Zündbedingung nicht mehr das Ähnlichkeitsgesetz, da als Grundlage der Betrachtung nicht mehr die freie Weglänge der Ladungsträger maßgebend ist, sondern die Lawinenbreite. Dieses Ergebnis ließe eine unabhängige Prüfung der Richtigkeit

[1]) Landolt-Börnstein III, Erg.-Bd. II, S. 1251 (Art. Schumann).

der obigen Betrachtungen zu, wenn die Abweichungen nicht zu gering wären: Es gilt

$$d \cdot A = e^{d \cdot \alpha},$$

wo $A = \text{const}$, also

$$\frac{A}{p} \cdot pd = e^{pd \cdot \frac{\alpha}{p}},$$

mithin für zwei Drucke, aber $(pd)_1 = (pd)_2$,

$$\ln \frac{p_1}{p_2} = pd \left\{ \left(\frac{\alpha}{p}\right)_2 - \left(\frac{\alpha}{p}\right)_1 \right\}.$$

Setzen wir, um sogleich die Änderung in der Durchbruchsfeldstärke zu erhalten,

$$\frac{\alpha}{p} = A e^{B \frac{E}{p}}, \qquad \frac{E}{p} : 20 - 40, \quad B = 0{,}25\ ^{1})$$

und

$$\left(\frac{E}{p}\right)_2 = \left(\frac{E}{p}\right)_1 + \Delta \frac{E}{p},$$

so wird

$$\Delta \frac{E}{p} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{B\,(\alpha d)_1}.$$

Beispiel: $p \cdot d = 7600$ Torr · cm $\begin{cases} p_1 = 760 \text{ Torr}, & d_1 = 10 \text{ cm} \\ p_2 = 7600 \ \text{,,}, & d_2 = 1 \ \text{,,} \end{cases}$

$$\Delta \frac{E}{p} \simeq -\frac{2{,}3}{5} = -0{,}46 \frac{\text{V/cm}}{\text{Torr}},$$

nun ist $\left(\frac{E}{p}\right)_1 = 33{,}5$, mithin

$$\left(\frac{E}{p}\right)_2 = 33{,}5 - 0{,}46 = 33{,}04 \frac{\text{V/cm}}{\text{Torr}}$$

oder

$$E_2 = 25{,}1 \text{ kV/cm statt } 25{,}45 \text{ kV/cm}$$

bei Gültigkeit des Paschen-Gesetzes. Die Abweichung von $\sim 1\,\%$ liegt noch innerhalb der Meßgrenze, so daß auf diese Weise eine unabhängige Bestätigung der obigen Vorstellungen nicht möglich ist.

3. Die Aufbauzeit und ihre Abhängigkeit von der Überspannung. Abgesehen von der Unhaltbarkeit der Townsendschen Vorstellungen infolge der hohen Feldverzerrungen in der Lawine hatte sich ein Versagen des Townsend-Aufbaues in der Erklärung der überraschend kurzen Aufbauzeiten des Funkens bei hohen Drucken gezeigt. Es war dies eines der ersten Ergebnisse der Untersuchungen mit dem Kathodenstrahloszillographen von Rogowski und seinen Mitarbeitern. Rogowski[2]) hat als erster darauf

---

[1]) F. B. Sanders, Phys. Rev. **41**, 667, 1932. — [2]) W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. **16**, 496, 1926.

hingewiesen, daß die Dauer des Entladungsaufbaues eine Möglichkeit bietet, die Townsendschen Vorstellungen zu prüfen. Er fand, daß die Aufbauzeiten mindestens 100mal kleiner als die Ionenlaufzeiten Anode—Kathode waren. Damit wurde das vorliegende Problem aufgerollt und regte die eingangs erwähnten Arbeiten über den Entladungsaufbau bei kleinen pd-Werten an. Nach diesem Befund setzten nun die Versuche ein, durch Berücksichtigung der Raumladungen (v. Hippel und Franck, Rogowski, Schumann, Loeb) den Townsendschen Aufbau so abzuändern, daß die kurzen Aufbauzeiten verständlich wurden. Selbst die Annahme, eine Elektronenlawine erzeugt nach Durchlaufen eines Teiles der Entladungsstrecke durch ihre positive Raumladung vor der Kathode ein so starkes Feld, daß die rücklaufenden positiven Ionen an der Kathode Nachlieferungselektronen herausschlagen können, ergibt insbesondere bei größeren Abständen noch viel zu lange Aufbauzeiten im Vergleich zur Beobachtung. Diese Bemühungen zeigen vielmehr, daß die Townsendschen Vorstellungen nicht hinreichen und durch andere ersetzt werden müssen[1]). Ein Nachteil dieser Überlegungen war außerdem, daß man sich ausschließlich auf die möglichst rasche Produktion des Nachlieferungselektrons aus der Kathode konzentrierte und dabei übersah, daß im Rahmen dieser abgeänderten Townsendschen Vorstellungen auch die weitere Entwicklung der Entladung zum Funken*kanal* enthalten sein mußte.

Die Nebelkammerversuche ergaben nun (vgl. die Diskussion des Rogowskischen Oszillogramms), daß die Aufbauzeit bei geringer Überspannung zum größten Teil aus der Lawinenlaufzeit bis zur kritischen Verstärkung besteht, die nachfolgende Kanalentwicklung geht dann infolge der hohen

---

[1]) Ein Versuch von R. Schade (ZS. f. Phys. **111**, 437, 1939), das Verhalten der Townsendschen Zündbedingung bei großen $p \cdot d$-Werten auf die Absorption der Strahlung, die auf der Kathode Photoelektronen auslöst, zurückzuführen, muß als verfehlt angesehen werden, da der beobachtete Absorptionskoeffizient (s. Schwiecker, a. a. O.) kleiner als der berechnete ist,

$$\mu_{beob} \sim 1{,}5\ \text{cm}^{-1} < \mu_{ber} \sim 6{,}7\ \text{cm}^{-1}\ (760\ \text{Torr}).$$

Abgesehen davon reicht aber der Photoeffekt an der Kathode nicht aus, die kurzen beobachteten Aufbauzeiten zu erklären, da die Laufzeit eines Elektrons von Kathode zu Anode größer als die Aufbauzeit selbst ist, was auf Grund des Townsend-Aufbaues nicht zu verstehen ist. Die Nebelkammerbeobachtungen zeigen überdies, daß der Aufbau auch ohne Photoelektronen aus der Kathode möglich ist. Prinzipiell ist gegen diese Überlegung einzuwenden, daß der Entladungsaufbau als raumladungsfrei betrachtet wird, während, wie wir oben sahen, gerade bei größeren $p \cdot d$-Werten das Feld der Raumladungen von ausschlaggebender Bedeutung wird.

Geschwindigkeit der Kanalentladungen in kürzester Zeit vor sich[1]). Da die Lawinengeschwindigkeit einige 10^7 cm/sec beträgt, so sind die Ergebnisse der Messungen mit dem Kathodenstrahloszillographen verständlich, daß die Aufbauzeit des Funkens bei 760 Torr und größeren Abständen (> 1 cm) bereits bei wenigen % Überspannung $\sim 10^{-7}$ sec beträgt. Die Oszillogramme hatten weiterhin ergeben, daß mit zunehmender Überspannung die Aufbauzeit von ungefähr $3 \cdot 10^{-7}$ sec bei 4% Überspannung auf einen Endwert von etwa $2 \cdot 10^{-8}$ sec bei 60% Überspannung absinkt

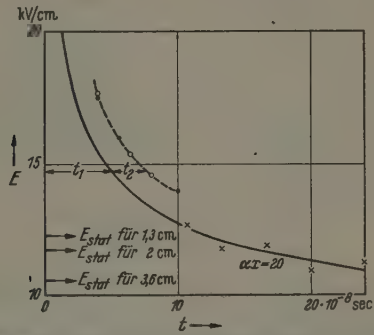


Fig. 5. Die ausgezogene Kurve zeigt, nach welcher Zeit $t = x_{kr}/u_{Law}$ (u_{Law} = Geschwindigkeit der Elektronenlawine) bei verschiedener Feldstärke die kritische Verstärkung ($\alpha x_{kr} = 20$) erreicht wird, $p = 260$ Torr (berechnete Kurve). (×) stellen Meßpunkte dar, die bestätigen, daß $\alpha x_{kr} = 20$ bei höherer Feldstärke (größeres α) in kürzerer Zeit (kleineres x_{kr}) erreicht wird. Außerdem zeigt die Abhängigkeit der Aufbauzeit (○ $d = 1{,}3$ cm), (● $d = 2$ cm) (Nebelkammer-Meßpunkte) von der Feldstärke einen Verlauf, der sehr ähnlich dem der Kurve $\alpha x_{kr} = 20$ für verschiedene Feldstärken ist. Die Verkürzung der Aufbauzeit mit zunehmender Feldstärke beruht daher wesentlich auf der Verkürzung der kritischen Lawinenlänge mit zunehmender Feldstärke. — In der Figur ist als Beispiel für 25% Überspannung ($d = 2$ cm) eine Aufteilung der Aufbauzeit in t_1 = Lawinenentwicklung und t_2 = rasche Kanalentwicklung bis zum Spannungsabfall vorgenommen. t_1 ist, wie schon erwähnt, sehr feldstärkeabhängig.

(Abstand einige cm)[2]). Um den Grund für diese Abnahme zu finden, wurden Beobachtungen in der Nebelkammer vorgenommen, die zeigten, daß es in erster Linie das Stadium der Elektronenlawine ist, welches durch die zunehmende Überspannung abgekürzt wird, da wegen des steigenden α der kritische Wert der Verstärkung nach entsprechend kürzerem Lawinenweg erreicht wird. In Fig. 5 ist zu jeder Feldstärke die Zeit t berechnet, die die

[1]) Die Verhältnisse liegen also ähnlich wie beim Townsend-Aufbau, wo die Zeit bis zum Aufschaukeln auf eine gewisse Stromstärke weitaus größer ist als die nachfolgende Entwicklung in die Glimmentladung. — [2]) W. Förster, Diss. Dresden (1934); M. Messner, Arch. f. Elektrot. **30**, 133, 1936; R. Strigel, Wiss. Veröff. d. Siemens-Werke **15**, 1, 1936.

Lawine bei $p = 260$ Torr zum Erreichen von $\alpha\, x_{kr} \sim 20$ benötigt, wobei $t = x_{kr}/u$, u die Lawinengeschwindigkeit $= 1{,}25 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{\frac{E/p}{40}}$ cm/sec ist. In dem meiner Apparatur zugänglichen Bereich sind die gemessenen Zeiten eingetragen, nach denen bei gegebener Feldstärke der Umschlag der Lawinenentladung eintrat (× Meßpunkte). Die Ähnlichkeit dieser Kurven mit der Abhängigkeit der „Verzögerung" von der Überspannung legt den Gedanken nahe, daß die Aufbauzeit mit zunehmender Überspannung im wesentlichen deswegen abgekürzt wird, weil die Lawine wegen des höheren α eher ihren labilen Punkt erreicht, von dem aus sie in die rasche Kanalentladung um-

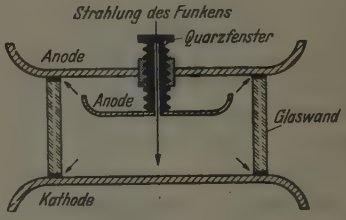


Fig. 6. Schematische Darstellung der Anordnung der oberen Elektrode in der Nebelkammer, die den Zweck hat, an den Stellen (A) das Feld abzuschwächen, um den dort beginnenden Einsatz von Gleitentladungen beim Anlegen höherer Stoßspannungen zu verhindern.

schlägt. In Fig. 5 sind daher die Meßwerte der Aufbauzeit bei dem gleichen Druck in der Nebelkammer aus einer früheren Arbeit[1]) als Funktion der angelegten Feldstärke eingetragen. Die Darstellung zeigt, daß die Verkürzung der „Verzögerung" bei höheren Überspannungen ($U/U_{stat} > 1{,}15$) im wesentlichen auf einer Verringerung der Lawinenentwicklungsdauer beruht, während die nachfolgende Kanalentwicklung weniger spannungsabhängig ist.

Um diese Betrachtung auf die Versuche bei Atmosphärendruck zu übertragen, war es erst notwendig, experimentell zu prüfen, ob der Umschlagpunkt der Lawinenentladung ebenfalls bei $\alpha x \sim 20$ liegt. Ausgeführte Beobachtungen bestätigten diese Annahme.

Bei hierzu unternommenen Versuchen stellte sich heraus, daß beim Anlegen von höheren Spannungen trotz des höheren Druckes störende Gleitentladungen längs der inneren Kammerwand auftraten, die durch ihre Ionenbildung die Kammer verseuchten. Daher wurde folgende Anordnung der Elektroden getroffen, die sich sehr gut bewährte (Fig. 6). Um das Feld an den Übergangsstellen Glas–Metall, dem Ausgangspunkt der Gleitentladungen (durch Pfeile gekennzeichnet), zu schwächen, wurde in die obere Elektrode eine kleinere, bequem in die Kammer passende Elektrode eingebaut, deren Abstand von der unteren Elektrode verändert werden konnte. Durch die Halterung dieser Elektrode hindurch, die oben mit einem Quarzfenster verschlossen war, wurde die

[1]) E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. Phys. **103**, 323, 1936.

untere Elektrode bestrahlt. Auf diese Weise ließen sich die Versuche bis in die Nähe des Atmosphärendruckes hin bei 2 cm Elektrodenabstand störungsfrei durchführen. Das richtige Arbeiten der Kammer wurde geprüft, indem beim ersten Sichtbarwerden von Tröpfchen in der Nebelkammer, d. h. dem Beginn einer merklichen Stoßionisation, die Spannungshöhe und Stoßdauer gemessen wurde. Die hieraus berechnete Zahl von Ionenpaaren ($e^{\alpha x}$) ergab sich um 10 herum, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Nachdem das einwandfreie Arbeiten dieser Anordnung festgestellt worden war, wurde bei festgehaltenen Stoßzeiten die Spannungshöhe so lange gesteigert, bis die Lawine eine starke Verbreiterung ihres Kopfes zeigte[1]) und der anodengerichtete Kanal sich zu entwickeln begann. Auch hier ergab sich aus einer größeren Zahl von Versuchen ein Wert von αx etwa 20 als kritische Verstärkung, ebenso wie es bei tieferen Drucken von 200 Torr der Fall war.

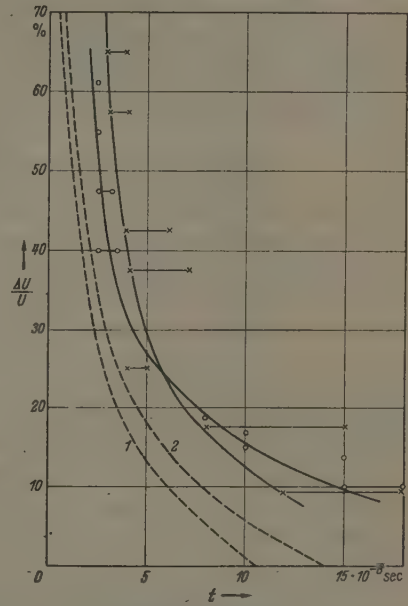


Fig. 7. Aufbauzeit abhängig von der Überspannung (760 Torr). Meßpunkte o nach Messner, $d = 2$ cm; × nach Strigel, $d = 3$ cm. Kurve 1 und 2 berechnete Lawinenlaufzeit bis zu ihrer kritischen Verstärkung abhängig von der Überspannung: 1 für $d = 2$ cm, 2 für $d = 3$ cm.

In Fig. 7 ist daher die Verzögerung als Funktion der Überspannung nach Messner (a. a. O.) bei 2 cm Elektrodenabstand und 760 Torr eingetragen sowie die Werte von Strigel (a. a. O.) bei 3 cm Abstand und 760 Torr. Desgleichen ist in Fig. 7 die Zeit eingetragen, nach welcher die Lawine die kritische Verstärkung ($\alpha x \sim 20$) erreicht hat. (Da als Ordinate der Wert $\frac{U - U_{stat}}{U_{stat}}$ aufgetragen und U_{stat} für beide Abstände verschieden ist, so fallen die Kurven für 2 cm und 3 cm auseinander.) Noch stärker als bei den obigen Kurven fällt bei höheren Überspannungen der gleichbleibende Abstand der Durchschlagskurven von den Kurven der Lawinenumschlagspunkte auf und läßt die Annahme zu, daß bei Überspannungen $> \sim 30\%$

[1]) Die Vermutung, daß die Verbreiterung des Lawinenkopfes z. T. auf die Wirkung der gasionisierenden Strahlung zurückgeführt werden kann, ist durch die Ergebnisse von W. Schwiecker (a. a. O.), daß die Strahlung bereits von einer Elektronenlawine ausgestrahlt wird, bestätigt worden.

die Abnahme der Verzögerung im wesentlichen auf einer Verkürzung der Lawinenentwicklung bis zur kritischen Verstärkung beruht, während die nachfolgende Entwicklung über den Vorentladungskanal zum Funken nahezu konstant bleibt. Bei geringeren Überspannungen wächst die letztere auch an. Die gleichzeitig einsetzende Streuung der Werte verhindert allgemeinere Aussagen.

Mit diesen Ausführungen ist auf Grund des Kanalaufbaues ein Verständnis der gegenüber kleinen $p \cdot d$-Werten erheblich kürzeren Aufbauzeit möglich und zugleich eine anschauliche Vorstellung von der auffallenden Abhängigkeit der Aufbauzeit von der Überspannung gegeben.

Anmerkung über Entladeverzug und Bestrahlung.

Die Messung der Aufbauzeit hat zur Voraussetzung, daß sogleich beim Anlegen der Spannung ein Elektron für den Aufbau des Durchschlages vorhanden ist. Ist dies nicht der Fall, so erhält man einen Entladeverzug, der bei sauberen Versuchsbedingungen und Einhalten gewisser Vorsichtsmaßregeln[1]) dem früher erwähnten statistischen Gesetz gehorcht (S. 378), da dieses unabhängig vom Entladungsaufbau ist. Es zeigt sich jedoch immer bei großen $p \cdot d$-Werten, daß trotz sehr geringer Bestrahlung die mittlere Entladeverzugszeit klein gegen die Aufbauzeit ist[2]), daß also ein Elektron fast sogleich startbereit zur Verfügung steht. Diese Elektronen können keine Photoelektronen sein, da die Bestrahlung auch Null sein kann und trotzdem eine Aufbauzeit einwandfrei gemessen wird. Dies liegt nun aller Wahrscheinlichkeit nach daran, daß bei großen $p \cdot d$-Werten eher große Abstände bei Normaldruck statt hohe Drucke bei kleinen Abständen benutzt werden und daher insbesondere bei technischen Messungen mit frei aufgestellten Funkenstrecken[3]) statt mit eingeschlossenen (wie bei kleinen $p \cdot d$-Werten) gearbeitet wird. So kommt es, daß die Voraussetzung sauberer Elektrodenflächen bei den gleichzeitig wachsenden Elektrodenquerschnitten schlecht erfüllt werden kann. Versuche in der Nebelkammer ohne Bestrahlung ergaben, daß nur mit Mühe Fasern und Staubteilchen von den Elektroden ferngehalten werden konnten; diese wurden bei Spannungen kleiner als die statische Durchschlagspannung zum Ausgangspunkt von Elektronenlawinen, die nur mit geringer zeitlicher Verspätung gegen die Photoelektronenlawinen starteten und damit für einen nahezu streuungs-

[1]) Vgl. K. Zuber, a. a. O., sowie R. Strigel, Elektrische Stoßfestigkeit (Jul. Springer), S. 11 u. f. — [2]) R. Strigel, a. a. O. — [3]) Z. B. W. Holzer, Arch. f. Elektrot. **26**, 865, 1932; M. Messner, a. a. O.; R. Strigel, a. a. O.

freien Einsatz des Funkens sorgten, wie er bei großen Abständen ohne Bestrahlung die Regel ist[1]).

Der in der Literatur vielfach hervorgehobene Unterschied zwischen dem streuungsfreien Einsatz bei großen Abständen (großes pd) auch ohne Bestrahlung und dem statistischen Entladeverzug bei geringen Abständen (kleines pd) ist daher kein prinzipieller, im Gegenteil: streuungsfreie Zündung und statistischer Entladeverzug treten bei großen wie kleinen $p \cdot d$ in Erscheinung, je nachdem wie die Versuchsbedingungen gewählt werden.

Gehen die aufeinanderfolgenden Durchschläge, z. B. bei der Messung der Aufbauzeiten, in nicht zu großen Zeitabständen (kleiner als einige sec) vor sich, d. h. beachtet man nicht die zwischen zwei Durchschlägen notwendige „Ruhezeit", S. 378), so treten „Rückstands-" oder „Klebeelektronen"[2]) hinzu, d. h. Elektronen, die von einer vorhergehenden Entladung her auf den Elektroden haften bleiben und innerhalb einer gewissen Zeit verschwinden. Eine Klärung dieser Erscheinung ist noch nicht gelungen[3]). Auf alle Fälle wird unter diesen Bedingungen ein streuungsfreier Einsatz des Durchschlages garantiert, sowohl bei großen wie kleinen $p \cdot d$-Werten.

Schlußbemerkung. An dieses Bild des Entladungsaufbaues, der bei großen $p \cdot d$-Werten den Townsend-Aufbau ablöst, fügen sich nun zwanglos die Beobachtungen der Funkenentwicklung mit dem elektrooptischen Verschluß[4]) [5]) [6]) an. Hierbei gibt das von der Entladung emittierte Licht Auskunft über die räumliche und zeitliche Entwicklung der Entladung von dem Moment an, in dem die Spannung an der Funkenstrecke zusammenzubrechen beginnt. Da die Spannungsabsenkung Voraussetzung für die Meßmethode ist, wird ein schon sehr spätes Stadium der Funkenentwicklung als erste Erscheinung beobachtbar. Ein charakteristisches Ergebnis ist, daß als frühestes ein gerade noch sichtbarer dünner Leuchtfaden gesehen

[1]) Landolt-Börnstein III., Erg.-Bd. II. S. 1270 (Art. Schumann). — [2]) Z. B. E. Flegler u. H. Raether, a. a. O., S. 320. — [3]) Diese Erscheinung ist oft beschrieben und untersucht worden: z. B. K. Zuber, a. a. O.; M. Büge, Arch. f. Elektrot. XIX, 480, 1928; H. Viehmann, ebenda XXV, 253, 1931; im Zählrohr von G. Medicus (ZS. f. Phys. **103**, 76. 1936) als Abklingen der Eigenerregungswahrscheinlichkeit und in letzter Zeit von H. Paetow (ebenda **111**, 770, 1939), der es wahrscheinlich machen konnte, daß die „Klebeelektronen" von einer kurzwelligen Strahlung auf den Elektroden erzeugt werden. Diese kurzwellige Strahlung scheint mit der vom Verfasser sowie von Schwiecker (a. a. O.) gefundenen gasionisierenden Strahlung identisch zu sein. — [4]) L. v. Hamos, Ann. d. Phys. **7**, 857, 1930. — [5]) F. Dunnington, Phys. Rev. **38**, 1555, 1931. — [6]) H. White, ebenda **46**, 99, 1934.

wird, der Kathode und Anode verbindet, und der ganz augenscheinlich identisch mit dem Vorentladungskanal ist, wie ihn die Nebelkammerbeobachtungen ergeben haben. In vollem Einklang mit den oben entwickelten Anschauungen setzt also eine Spannungsabsenkung erst im ausgebildeten Vorentladungskanal ein. Das Schwergewicht der Beobachtungen mit der Kerrzelle liegt nun in dem Studium der Funkenentwicklung in dem vorgegebenen Entladungsschlauch, d. h. der intensiven Leuchterscheinungen, ihrem Beginn und ihrer Vorwachsrichtung [1]) während der absinkenden Spannung. Zur Deutung dieser Einzelheiten wäre eine eingehende Diskussion der Vorgänge in dem Entladungsschlauch notwendig, die jedoch das Thema überschreitet.

Jena, Physikalisches Institut.

[1]) Man kann daher die Geschwindigkeit dieser Entladungen innerhalb des Vorentladungskanals nicht als Elektronengeschwindigkeit in der Lawine ansehen (H. White, Phys. Rev. 46, 104, 1934), noch die Breite dieser Kanäle als Breite der Elektronenlawine nehmen.

(Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium II der Siemenswerke.)

Eine neue, bei sehr niedrigen Drucken auftretende Form der Feldelektronenemission an Metalloberflächen, die mit isolierenden Stoffen bestäubt sind.

Von **H. Paetow** in Berlin-Siemensstadt.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Februar 1941.)

Legt man an ein Entladungsrohr, auf dessen Kathode sich etwas gepulverter Isolierstoff befindet, bei niederen Drucken eine hohe Spannung, so entsteht ein Entladungsvorgang, in dessen Verlauf die Kathode mit einer dünnen Schicht des Pulvers bedeckt wird. An der so formierten Kathode bildet sich bei Drucken bis zu 10^{-6} Torr ein neuer Entladungsvorgang aus, der bei Spannungen von etwa 200 Volt Stromdichten bis zu 100 mA/cm² liefert. Die beiden Entladungsvorgänge werden mit den zwei Emissionsformen der Malter-Schichtkathode verglichen und eine weitgehende Übereinstimmung festgestellt.

I. Einführung. Die zu einer Feldelektronenemission führende hohe Feldstärke kann einerseits durch geeignete Formgebung der Kathode (Spitzen), andererseits durch die positive Aufladung eines an einen Leiter grenzenden Isolators erzeugt werden. Die Feldelektronenemission an positiv geladenen Isolatoren gewinnt dann an Bedeutung, wenn man auf diese Weise im Vakuum bei kleinen Spannungen große Emissionsströme erhalten kann. Dies gelang zum ersten Male bei dünnen Isolatorschichten vom Typus Al_2O_3—Cs_2O auf Al (Malter-Schichtkathode). Die Emission dieser Schichtkathode wurde bei der ursprünglichen Versuchsanordnung von Malter[1]) durch Beschuß mit Elektronen einer Glühkathode angeregt und aufrechterhalten. Später zeigte sich[2]), daß bei Drucken bis zu etwa 10^{-5} Torr herunter auch eine dauernde selbständige Feldelektronenemission ohne den primären Elektronenstrahl bei kleinen Spannungen möglich ist. Im folgenden wird gezeigt werden, daß man zu einer solchen Niederspannungsemission nicht die spezielle und komplizierte Maltersche Schichtanordnung benötigt. Man kann vielmehr mit der dünnen Schicht eines beliebigen feingepulverten Isolators auf einem beliebigen Leiter ganz ähnliche Emissionseffekte erzielen, falls die Herstellung dieser Schichten auf eine bestimmte Art und Weise erfolgt ist. Die Formierung dieser neuen Schichtkathode

[1]) L. Malter, Phys. Rev. **49**, 879; **50**, 48, 1936; H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. **18**, 559, 1937; **19**, 313. 1938. — [2]) J. Mühlenpfordt, ZS. f. Phys. **108**, 698, 1938.

geschieht nämlich im Verlauf eines anderen Emissionsvorganges, der bei hohen Spannungen verläuft und der zunächst im II. Abschnitt beschrieben werden soll.

II. Die Hochspannungsemission. Bei den Versuchen wurden Isolatoren in feingepulverter Form verwendet, insbesondere Aluminiumoxyd und Magnesiumoxyd, daneben noch Glaspulver, Quarzpulver, Schwefel, Bakelitpulver und einige andere Materialien. Das Isolatorpulver wird in einem Entladungsrohr auf der Kathode, die aus einem beliebigen leitenden Material bestehen kann, zu einem kleinen Häufchen aufgeschichtet. Die Form der Kathode ist für die Versuche ohne große Bedeutung und wird den Verhältnissen höchstens dadurch angepaßt, daß sich an einer Stelle eine kleine Vertiefung zur Aufnahme des Pulvers befindet. Die Gasfüllung bestand meist aus dem nach dem Auspumpen verbliebenen Restgas und nur in einzelnen Fällen in ausgeheizten Rohren aus Sauerstoff, Helium und Neon. Bei Drucken zwischen 10^{-3} und 10^{-7} Torr wird die Spannung am Rohr soweit gesteigert, bis bei einigen 1000 Volt schlagartig ein Emissionsvorgang einsetzt. Nach dem ersten Zünden an einer kleinen Stelle springt die Emission auch zu anderen Stellen der Kathode über, begleitet von Leuchterscheinungen und Bewegungen der Körnchen. Da sich in dem Entladungskreis ein Vorwiderstand befindet, sinkt die Spannung am Rohr, so daß man bei dieser Emission ähnlich wie bei einer Gasentladung von einer Zünd- und Brennspannung reden kann. Die Brennspannung beträgt etwa $^1/_3$ bis $^1/_{10}$ der Zündspannung und lag bei den verwendeten Versuchsanordnungen in der Größenordnung von 400 bis 2000 Volt. Der Stärke der Emission sind, soweit geeignete Spannungsquellen zur Verfügung stehen, keine Grenzen gesetzt.

Die Einleitung der Hochspannungsemission geschieht dadurch, daß anfangs eine geringe unmerkliche Feldelektronenemission einige positive Ionen erzeugt, die sich auf den Isolator setzen, diesen positiv aufladen und so die Feldelektronenemission vergrößern, wodurch wiederum mehr Ionen erzeugt werden und Aufladung und Emission lawinenartig ansteigen.

Die Hochspannungsemission ist im Gegensatz zu der später zu beschreibenden Niederspannungsemission nicht an das Vorhandensein besonders formierter Kathodenoberflächen gebunden, sondern setzt überall dort an, wo größere zusammenhängende Isolatorteile an das leitende Material der Kathode grenzen. Der Isolatorkörper wird von den Ionen als Ganzes aufgeladen und vermehrt damit die an sich schon bestehende hohe Feldstärke an der Kathode. Ein Emittieren ist nur direkt an den

Rändern des Isolatorkörpers möglich, da die Elektronen diesen im allgemeinen nicht durchdringen können. Die Hochspannungsemission zieht sich also auf der Kathode nur an einigen wenigen Linien entlang, so daß dort große Stromdichten entstehen und der ganze Vorgang, insbesondere das Fluoreszenzleuchten und die Zerstäubung des Materials, einen sehr heftigen Charakter annimmt.

Die beschriebenen Vorgänge finden sich in ähnlicher Weise überall dort, wo an der Berührungskante von Isolatoren mit Leitern elektrische Felder angreifen. Das Besondere in dem Falle eines pulverförmigen Isolators sind nur alle jene Folgeerscheinungen des Effektes, die sich aus der leichten Beweglichkeit der Körnchen ergeben.

III. Die Formierung der Isolatorschicht in der Hochspannungsemission. Sofort nach Einsetzen der Hochspannungsemission beginnt ein sehr lebhaftes explosionsartiges Auseinanderfliegen der Isolatorkörnchen, hervorgerufen durch ihre starke positive Aufladung bzw. durch die damit verbundene gegenseitige Abstoßung. Die Körnchen werden im Fluge von den Elektronen getroffen und leuchten dann in einem hellen weißlichen Fluoreszenzlicht, so daß an den Emissionsstellen ein fackelartig sprühendes Gebilde emporwächst. Das auf der Kathode lagernde Isoliermaterial erreicht nahezu das Anodenpotential, was daran zu erkennen ist, daß die davonfliegenden Teilchen bis zur Anode gelangen und durch diese, falls sie gitterartig gebaut ist, sogar hindurchfliegen. Die Bewegungen der Körnchen sind mannigfaltig und unberechenbar, weil je nach dem Ort, an dem sie sich befinden, die Anziehung durch die Unterlage oder die Abstoßung durch ihre Nachbarn überwiegt. Das Ganze ist ein sehr unruhiger Vorgang, was sich auch in einem starken Schwanken des Emissionsstromes äußert.

Nach dem Auseinanderfliegen werden die Isolatorkörnchen durch das zwischen Kathode und Anode liegende Feld zu den negativen Elektrodenteilen zurückgeführt und bedecken diese mit einer eigenartigen und für diesen Vorgang charakteristischen dünnen Pulverschicht. Die Betrachtung im Mikroskop zeigt, daß diese Schicht aus Körnchen von höchstens 1 μ Stärke besteht, wobei diese Körnchen allerdings ziemlich unregelmäßige, flockige Gebilde sind. Wesentlich für die Wirksamkeit der Schicht ist die Tatsache, daß die Körnchen im Mittel völlig gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt sind, etwa so, daß bei senkrechter Draufsicht 70 bis 90% der Fläche bedeckt erscheint. Sämtliche leitenden Teile der Kathode besitzen nach der ersten Zerstäubung den gleichen, gleichmäßig samtartig aussehenden Überzug von der Farbe des zerstäubten Pulvers. Diese gleichmäßige Be-

setzung großer Flächen entsteht wohl dadurch, daß im Augenblick, wo bei dem Zerstäubungsvorgang die Körnchen auf die Fläche niederrieseln, die Teilchen noch ihre positive Ladung besitzen und somit durch die Abstoßungskräfte für einen gleichmäßigen Abstand der Teilchen gesorgt wird. Der so gebildete feine Überzug aus Isoliermaterial haftet erstaunlich fest auf der Unterlage und ist nur durch Abwischen, nicht jedoch durch Schütteln oder Anblasen zu beseitigen. Auch der nicht zerstäubte Rest des Pulverhaufens, der vorher völlig locker und feinpulverig war, ist nunmher zu größeren Klümpchen zusammengebacken, die ihrerseits wieder an der Unterlage haften.

IV. Die Niederspannungsemission. Bei Drucken von etwa 10^{-3} bis 10^{-6} Torr läßt sich an den aufgestäubten Schichten eine eigenartige Elektronenemission mit niedriger Brennspannung von 150 bis 300 Volt aufrechterhalten. Der Übergang in die neue Emissionsform erfolgt aus der Hochspannungsemission entweder von selbst im Anschluß an den Formierungsvorgang oder dadurch, daß man die Spannung plötzlich erniedrigt. Der schlagartige Übergang äußert sich in einem plötzlichen Stromanstieg bzw. in einem Absinken der Spannung bis auf wenige 100 Volt. Der bei der Hochspannungsemission um 100% seines Wertes schnell schwankende Strom ist nunmehr ruhig und stetig bis auf langsame Schwankungen, die kleiner sind als $^1/_2$%. Gleichzeitig hat sich das Aussehen der Kathode vollständig geändert. Die bestäubten Flächen sind dicht und regelmäßig mit kleinen, vollkommen ruhig leuchtenden, blauen Punkten besetzt, während an den Stellen, wo das Pulver hoch gehäuft liegt, wo also vorher unter weißlicher Lichterscheinung die Hochspannungsemission ansetzte, nunmehr Dunkelheit herrscht. Gleichzeitig hat jede Bewegung der Körnchen aufgehört. Steigert man den Gasdruck, so ändert sich zunächst nichts, bis in dem Raum über der Kathode ein Volumenleuchten sichtbar wird, dessen Farbe durch das betreffende Gas gegeben ist. Erst bei Drucken höher als 10^{-3} Torr verschwinden die blauen Pünktchen, und das Ganze hat das Aussehen, das man von der Spritzentladung her kennt, nämlich eine unmittelbar an der Kathodenoberfläche ansetzende Lichterscheinung, deren Stärke mit wachsender Entfernung von der Kathode abnimmt. Bei Verringerung des Gasdruckes erscheinen dann wieder die blauen Pünktchen unter allmählichem Verschwinden sämtlicher übriger Leuchterscheinungen.

Man kann demnach auch bei hohen Gasdrucken mit niederer Spannung eine gewöhnliche Gasentladung zünden, die dann sofort in eine Spritzentladung übergeht, die man ihrerseits wieder durch Auspumpen des Gases in die hier beschriebene Niederspannungsemission überführen kann.

Kurve I in Fig. 1 zeigt in schematischer Darstellung die Charakteristik der Niederspannungsemission. Steilheit und Lage der Charakteristik sind bei den einzelnen Kathoden etwas unterschiedlich. Sie sind bestimmt durch die bei der ersten Zerstäubung entstehenden Isolatorschichten, die, wie es bei der Art ihrer Entstehung nicht anders zu erwarten ist, stets etwas verschieden sind. Wenn man durch Vermindern der Spannung zu sehr kleinen Emissionsströmen übergehen will, reißt die Emission ab, d. h. der Strom beginnt bis auf den Wert Null abzusinken. Dieser Abreißpunkt

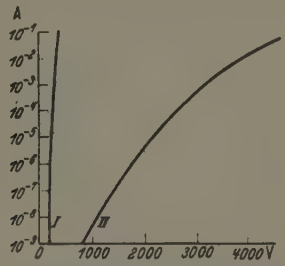


Fig. 1. Charakteristik der Niederspannungsemission (I) und der Hochspannungsemission (II).

liegt bei den einzelnen Kathoden verschieden bei einer Stromdichte zwischen 10^{-7} und 10^{-9} Amp./cm² und einer Spannung von 130 bis 160 Volt. Nach dem Abreißen wie auch beim völligen Abschalten der Spannung verbleibt also noch kurze Zeit hindurch ein allmählich kleiner werdender Emissionsstrom. Solange dieser Strom noch nicht zu klein geworden ist, kann man durch Wiedereinschalten bzw. Erhöhen der Spannung auf über 160 Volt die Niederspannungsemission wieder in Gang setzen. Es vergeht dabei eine gewisse Zeit, bis die Emission ihren alten, durch Vorwiderstand und Spannung gegebenen Wert erreicht hat, und zwar ist diese Zeit um so größer, je geringer der Emissionsstrom schon geworden war. Wenn der Strom bzw. die Körnchenaufladung zu klein geworden sind, kann ein Wiederzünden, abgesehen von der bereits erwähnten Möglichkeit, vorübergehend Gas einzulassen, nur durch Anwendung hoher Spannungen stattfinden. In Bruchteilen einer Sekunde wiederholt sich dann an einer kleinen Stelle der ganze Formierungs- und Zündungsvorgang, wobei durch eine geringe neue Zerstäubung kleine Änderungen im Zustand der Kathode eintreten.

Die höchsten erreichten Emissionsstromdichten waren etwa 100 mA auf 1 cm² Wenn man versucht, der Kathode noch höhere Ströme zu ent-

nehmen, erlischt die Emission oder geht in die Hochspannungsemission über, falls die Spannung dazu hoch genug ist.

Die Tatsache, daß die Niederspannungsemission bei Gasdrucken kleiner als 10^{-6} Torr nicht mehr bestehen kann, deutet schon darauf hin, daß die zur Feldelektronenemission führende positive Aufladung der Isolatorschicht durch Ionen erfolgt. Man muß dabei annehmen, daß dazu nur sehr wenig Ionen benötigt werden, was schon daraus hervorgeht, daß auch die wenigen Ionen, die bei Drucken von 10^{-6} Torr erzeugt werden, die Ladung aufrechterhalten können. Die Bedeutung der im Raum erzeugten Ionen zeigt sich auch darin, daß die Emission an den Stellen der Kathode verlöscht, wo ein Körper dicht vor die Kathodenoberfläche gebracht wird, so daß dieser Körper, falls er nicht zu klein ist, sich als Schatten auf der mit blau leuchtenden Punkten übersäten Kathodenoberfläche abzeichnet.

Der Raum zwischen der Anode und den Körnchen ist im wesentlichen feldfrei, denn während sich bei der Hochspannungsemission die Anode dicht bei der Kathode befinden muß, ist nach Zündung der Niederspannungsemission der Abstand und die Lage der Anode von geringer Bedeutung. Bei Drucken über $5 \cdot 10^{-5}$ Torr ist der Raum senkrecht über den durch die leuchtenden blauen Pünktchen erkennbaren emittierenden Teilen der Kathode leuchtend, während er über den nicht emittierenden Teilen dunkel bleibt. Gegenstände, die im Weg der Elektronenstrahlen stehen, werfen in den Raum hinein Schatten. Stärke und Farbe des Lichtes sind dabei immer gleich, auch dicht an der Kathodenoberfläche. Dies zeigt, daß die Elektronen senkrecht von der Kathodenoberfläche ausgehen und in dieser Richtung mit etwa gleichbleibender Geschwindigkeit verharren, woraus zu entnehmen ist, daß oberhalb der Isolatorschicht keine wesentlichen Feldstärken mehr bestehen.

V. Vergleich mit den zwei Emissionsformen der Malter-Schichtkathode. In der Fig. 1 ist noch das Kennlinienbild der Hochspannungsemission (Kurve II) hinzugefügt, das aber nur schematisch angedeutet werden konnte, da die Kathodenoberfläche durch die Bewegung der Körnchen während der Emission ständig umgestaltet wird und so eine genaue Aufnahme der Kurve nicht möglich ist.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß das Bild der beiden Kennlinien fast das gleiche ist wie bei den zwei Emissionsformen der Malter-Schichtkathode[1]). Dort wurden in gewissen Druckbereichen zwei Entladungs-

[1]) ZS. f. Phys. **108**, 704, 1938, Fig. 3.

typen beobachtet, deren eine mit niedriger Brennspannung ohne Funkeln auf der Kathode, und deren andere bei höherer Brennspannung mit Funkeln auf der Kathode brennt. Die Größenordnung der Ströme ist die gleiche, während die Brennspannungen etwas niedriger sind als in dem hier vorliegenden Falle.

Es seien den Figuren gemäß die einander entsprechenden Emissionsformen in beiden Fällen mit I bzw. II bezeichnet.

Die folgenden Beobachtungen zeigen, daß die Verwandtschaft der beiden Emissionskathoden sich nicht nur auf das äußere Kennlinienbild beschränkt. Übereinstimmende Merkmale ergeben sich vor allem, wenn man die Bedingungen betrachtet, unter denen die eine Emissionsform in die andere übergeht. Die Hochspannungsemission II der Pulverschichtkathode wird durch kurzzeitige Spannungserniedrigung in die Emission I übergeführt, und unter der gleichen Bedingung findet der entsprechende Übergang zwischen den beiden Emissionsarten der Malter-Schichtkathode statt. Die Emission I der Pulverschichtkathode hat ferner das Bestreben, bei hohen Stromstärken kurzzeitig wieder in die Emissionsform II zurückzuspringen. In Übereinstimmung damit geht die normale Emission I der Malter-Schichtkathode bei Überbelastung der Kathode in die anomale Emission II über. Man kann diesen Wechsel der Emissionsform auch so auffassen, daß die Emission I plötzlich erlischt und der dabei einsetzende Spannungsanstieg die Emission II zündet, wobei deren Zündspannung durch noch existierende Restladungen erheblich herabgesetzt ist.

Beide Kathoden besitzen in der Niederspannungsentladung nur eine beschränkte Lebensdauer. Die Alterung äußert sich darin, daß bei konstanter Spannung die Entladungsstromstärke langsam absinkt, die anfangs sehr steile Charakteristik etwas flacher wird und die Emission I leichter in die Form II übergeht. Während bei der frisch formierten bzw. neu hergestellten Kathode nur bei sehr hoher Belastung ein Übergang vorkommt, geschieht das nach längerer Brenndauer auch schon bei kleinen Strömen. Die Besonderheit der Pulverschichtkathode liegt darin, daß durch die Emission II immer wieder etwas Isolatorpulver zerstäubt wird, was etwas dazu beiträgt, daß bei ständigem Brennen die Lebensdauer in einer Pulverschichtkathode mehrere Wochen beträgt gegen eine Lebensdauer der Malter-Schichtkathode von wenigen Stunden.

Fig. 2 zeigt den Einfluß des Gasdruckes auf die Emission I der Pulverschichtkathode. Der Strom bleibt über mehrere Größenordnungen des Gasdruckes konstant, um dann mit kleiner werdendem Druck erst langsam

und dann immer rascher abzusinken. Die Charakteristik wird flacher, die Abreißspannung steigt und die Wahrscheinlichkeit für den Übergang zur Emission II nimmt zu, bis diese schließlich unterhalb von 10^{-6} Torr allein existenzfähig ist.

Bei der Malterschen Emission ergibt sich hinsichtlich der Druckabhängigkeit ein ähnliches Bild, nur daß dort die selbständige Niederspannungsentladung schon bei etwas höheren Drucken aufhört.

Die Besonderheit des Malter-Effekts liegt darin, daß bei Beschuß der Kathode mit den Elektronen einer Glühkathode die Emission bis zu den

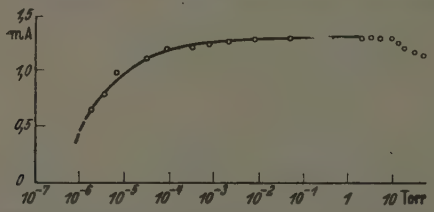


Fig. 2. Druckabhängigkeit der Niederspannungsemission (Spannung 300 Volt, Vorwiderstand 10^5 Ω).

tiefsten Drucken erhalten bleibt. Die Wirksamkeit der schnellen Glühelektronen ist dabei einmal die zusätzliche Erzeugung von Ionen, andererseits wahrscheinlich noch die Auslösung von Sekundärelektronen aus der Schichtkathode im Sinne der alten Malterschen Darstellung[1]). Zur Zündung der Emission kann jedoch unter Umständen auf die Glühelektronen verzichtet werden, denn neuere Versuche zeigen, daß man ebenso wie bei der Pulverschichtkathode auch bei der Malter-Schichtkathode durch hohe Spannung direkt die Emission II zünden kann, die dann, allerdings nur unter Schwierigkeiten, bei geeignetem Druck in die Emission I übergeführt werden kann.

Bei der Malterschen Feldkathode ist etwas mehr als bei der Pulverschichtkathode ein Nebeneinander bzw. Ineinanderübergehen beider Emissionsarten möglich, was sich auch in dem gemeinsamen Verlauf der Charakteristik bei kleinen Stromstärken kundtut. Man kann wie bei der Pulverschichtkathode annehmen, daß die beiden Emissionsarten an ganz verschiedenen Stellen der Kathode ihren Sitz haben, ohne daß man bei dem komplizierten Aufbau der Schichten darüber eine genauere Aussage machen kann. Vielleicht ist es so, daß die Emission II ihren Sitz an Rissen, Löchern und den Kanten des oxydierten Aluminiumblechs hat, also überall

[1]) Siehe hierzu auch H. Hintenberger, ZS. f. Phys. **114**, 98, 1939.

dort, wo eine Berührungslinie Muttermetall—Oxyd direkt mit dem Außenraum in Verbindung steht. Die Alterung der Kathode ist eine Zerstörung und Durchschlagung der Oxydschicht, so daß damit die Existenzbedingung für die Emission II verbessert wird. Die Emission I ist dagegen auf die ganze Fläche verteilt, wobei die Elektronen wahrscheinlich die dünne Oxydschicht durchlaufen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Trägheit, mit der die Emission Spannungsänderungen folgt, bei der Pulverschichtkathode viel kleiner ist als bei der Malter-Schichtkathode.

VI. Zur Deutung der Niederspannungsemission. Bei der Niederspannungsemission ist jedes einzelne Körnchen der formierten Kathode Träger positiver Ladungen und Zentrum einer Emission, die sich somit über große Gebiete der Kathode verteilt. Es hat sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt, der nur bei Alterung der Kathode durch das unerklärliche kurzzeitige Verlöschen gestört wird. Die Körnchen werden soweit positiv aufgeladen, daß das zwischen der Isolierschicht und der Anode verbleibende elektrische Feld gerade soviel Ionen heranführt, daß die Körnchenladungen erhalten werden. Hierzu genügen sehr wenige Ionen, und die meisten der auf die Kathode zufliegenden Ionen werden von dem starken elektrischen Feld, das zwischen den Körnchen und der Unterlage herrscht, erfaßt und zwischen den Körnchen hindurch auf die leitende Unterlage geführt. Nur dadurch, daß sich durch das Zusammenwirken der einander benachbarten Körnchen besondere Feldverhältnisse ergeben, ist es überhaupt möglich, daß bei so kleinen Spannungen ein genügender Anteil der Ionen auf die Isolatorteilchen gelangt.

Für die Niederspannungsemission ist also das Vorhandensein einer auf besondere Weise hergestellten Isolatorschicht notwendig. Versuche, durch Aufstreuen von Pulver oder auf andere Weise ähnlich wirksame Schichten herzustellen, schlugen fehl. Bei einem einzelnen auf der Kathode sitzenden Körnchen, sowie bei allen ungleichmäßigen oder zu wenig dichten Schichten kann bei kleinen Spannungen eine Aufladung nur bei einem starken Ionenüberschuß stattfinden, also bei hohen Drucken. Somit ist auch erklärt, weshalb die kleinen Veränderungen nach langer Brenndauer die Kathode für die Emission unbrauchbar machen und weshalb die bekannte Spritzentladung[1]) nur bis zu Drucken von 10^{-2} bis höchstens 10^{-3} bestehen kann.

[1]) A. Güntherschulze u. H. Fricke, ZS. f. Phys. **86**, 821, 1933; H. Schnitger, ebenda **96**, 551, 1935.

Eine genaue Theorie der Erscheinungen zu geben, ist nicht möglich, da man noch nicht einmal den Aufladungszustand eines einzelnen Körnchens genau übersehen kann. Außer der Ladungszufuhr durch Ionen erfolgt noch eine Aufladung durch die von der Unterlage emittierten Elektronen, die gegen die Körnchen stoßen, dort Sekundärelektronen auslösen und schließlich im Innern stecken bleiben. Nach Versuchen über die Aufladungserscheinungen an Isolatoren bei Elektronenbeschuß[1]) kann man bei den hier vorkommenden Elektronengeschwindigkeiten erwarten, daß sich in dem unteren Teil der Körnchen stets eine negative Raumladung ausbilden wird. Eine Feldelektronenemission würde demnach nicht unmittelbar unter einem Körnchen, sondern nur in den Zwischenräumen der Körnchen stattfinden können.

[1]) H. Hintenberger, ebenda **114**, 98, 1939.

(Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring.)

Bemerkung zu der Veröffentlichung von W. Lochte-Holtgreven und H. Maecker[1]) „Über eine neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens".

Von **H. Hahnemann** und **H.-J. Hübner**, Braunschweig.

(Eingegangen am 15. Februar 1941.)

In der von Maecker[2]) beschriebenen Anordnung zur Herstellung eines stabilisierten Lichtbogens wurden zwei verschiedene Entladungsformen beobachtet. Das Umschlagen der Entladung von der breiteren zur fadenförmigen Bogenform führen Lochte-Holtgreven und Maecker auf den Umschlag von der laminaren in die turbulente Strömungsform der umlaufenden Preßluft zurück. Nach ihren Ausführungen wird der fadenförmige Bogen nur in engen, nicht aber in weiten Führungsrohren erhalten. Dies steht, sofern der Strömungszustand verantwortlich ist, im Widerspruch zur Ähnlichkeitstheorie. Bei der von Maecker gewählten Anordnung werden die geometrischen Verhältnisse an den weiten Rohren denen an den engen Rohren nicht ähnlich gewesen sein (Düsenöffnungen). Lochte-Holtgreven und Maecker stützen ihre Annahme durch eine rohe Abschätzung der Reynoldsschen Zahl $Re = d_h \cdot v \cdot \varrho/\eta$ (d_h hydraulischer Durchmesser $4F/U$, F Querschnitt, U benetzter Umfang, v über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit, ϱ Dichte und η Zähigkeit des Gases), gegen die wir folgende Einwände haben:

Der beim Betrieb des fadenförmigen Lichtbogens hörbare Ton wird einmal zu rund 1000 Hz[3]) und das andere Mal zu rund 10000 Hz[4]) angegeben. Die Tonfrequenz soll mit der Zahl der sekundlichen Umläufe der Preßluft um den Lichtbogen identisch sein. Für die Abschätzung von Re werden 10000 Umläufe je Sekunde und die weitere Annahme, daß die Gasströmung als in einer Spirale von 4 mm Durchmesser strömend gedacht werden kann, zugrunde gelegt. Es besteht keinerlei Anhaltspunkt dafür, daß der gehörte Ton mit der Umlaufzahl des Gasmantels identisch ist. Der Ton wird vielmehr, wie die Erfahrung zeigt, durch Wirbelbildung an den Preßluftdüsen

[1]) W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, ZS. f. Phys. **116**, 267, 1940. — [2]) H. Maecker, ebenda S. 257. — [3]) W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, a. a. O. S. 268. — [4]) W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, a. a. O. S. 269.

oder auch an einem der einander zugekehrten Enden der Elektroden entstanden sein. Damit wird die von Lochte-Holtgreven und Maecker angegebene Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit von 200 m/s [1]) in der Spirale hinfällig. Eine einfache Messung der verbrauchten Luftmenge in der Maeckerschen Anordnung hätte hier Klarheit schaffen können.

Die Abschätzung der Reynoldsschen Zahl könnte auf folgende Weise versucht werden: Der Hauptteil des Vordruckes von der Größenordnung 1 atü werde zur Beschleunigung der Luft in den Düsen verbraucht: die Luft ströme mit Schallgeschwindigkeit aus den Düsen aus und erfahre im Führungsrohr keinen wesentlichen Druckverlust. Aus Kontinuitätsgründen ist $\varrho_1 v_1 F_1 = \varrho_2 v_2 F_2$, wobei F_1 die Ringspaltfläche zwischen Rohrwand und Lichtbogen, F_2 der Gesamtquerschnitt der 16 Düsen, ϱ_1 bzw. ϱ_2 und v_1 bzw. v_2 die Luftdichte und -geschwindigkeit am Rohr bzw. Düsenaustritt bedeuten. Nach Voraussetzung ist $\varrho_1 \approx \varrho_2$, $v_2 \approx 330$ m/s. Damit wird, da 16 Düsen von 0,25 mm Durchmesser vorhanden sind, $v_1 \approx 3.4$ m/s. Mit dieser Geschwindigkeit verläßt die Luft das Quarzrohr in der Achsenrichtung. Bleiben wir dabei, daß die Luft angenähert in einer Spirale von 0,4 cm Durchmesser [2]) strömt, so entfallen auf die Rohrlänge von 12 cm 30 Windungen, welche bei Abwicklung eine Länge von rund 60 cm ergeben. Die Luft besitzt dann in der Spirale eine Geschwindigkeit von rund $3{,}4 \cdot 60/12 = 17$ m/s, deren Komponente senkrecht zur Rohrachse um etwa 4% kleiner ist. Für den hydraulischen Durchmesser haben wir in *Re* die doppelte Ringspaltbreite einzusetzen und damit wird als rohe Näherung

$$Re \approx 1700 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}00031/0{,}00049 = 860 < Re_{krit} = 2320,$$

wo Re_{krit} die kritische Reynoldssche Zahl bezeichnet. Die Frage, ob beim Auftreten des fadenförmigen Lichtbogens die Strömung des Gasmantels laminar oder turbulent war, muß daher auf alle Fälle offengelassen werden.

Bemerkt sei noch, daß neuerdings die Zähigkeit der Luft bei 1000° C und 1 at zu 0,00049 [g cm^{-1} s^{-1}] [3]) angegeben wird und nicht wie von Lochte-Holtgreven und Maecker zu 0,00062 [g cm^{-1} s^{-1}].

Im November 1940.

---

[1]) Aus dieser Umlaufgeschwindigkeit folgt nach der Kontinuität eine Düsenaustrittsgeschwindigkeit von weit über Schallgeschwindigkeit! — [2]) W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, a. a. O. S. 269. — [3]) F. Henning, Wärmetechnische Richtwerte, VDI-Verlag, Berlin 1938.

Erwiderung zu der Bemerkung der Herren H. Hahnemann und H.-J. Hübner.

Von W. Lochte-Holtgreven.

(Eingegangen am 19. Dezember 1940.)

Auf Grund einer neuen Berechnungsweise der Reynoldsschen Zahl kommen die Herren Hahnemann und Hübner zu dem Resultat, daß eine Gewißheit über den turbulenten oder nicht turbulenten Strömungszustand beim stabilisierten Lichtbogen auf Grund theoretischer Überlegungen nicht zu erlangen ist. Dieses Resultat deckt sich ganz mit unseren in der betreffenden Arbeit entwickelten Anschauungen, die den turbulenten Strömungszustand nur als wahrscheinliche Ursache für die neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens annehmen, in dieser Annahme jedoch auch die beste Arbeitshypothese erblicken, um das Wesen der neuen Entladungsform aufzuklären. Gewißheit über den Strömungszustand können leicht weitere experimentelle Untersuchungen schaffen, die jedoch von uns aus zwingenden Gründen eingestellt werden mußten. Hierdurch ist auch der Vorwurf, daß eine Messung der verbrauchten Luftmenge hätte erfolgen sollen, gegenstandslos. Die Bogenform in weiten Rohren kann trotz ähnlicher Strömungsverhältnisse wegen der zwangsläufig veränderten Entladungsbedingungen sehr wohl ein anderes Aussehen haben. Die Entstehung des Tones, der von uns zu 10000 Hz ermittelt und leider infolge eines übersehenen Druckfehlers einmal zu 1000 Hz angegeben wurde, läßt sich mit Sicherheit auch erst experimentell klären.

Berichtigung.

Von **W. Glaser** in Prag.

(Eingegangen am 28. Januar 1941.)

Die Arbeit „Über die Ablenkfehler von elektrischen und magnetischen Ablenksystemen“ [1]) enthält einige Druck- und Rechenfehler, auf die mich Herr Picht freundlicherweise aufmerksam gemacht hat. In Gleichung (46) auf S. 365 soll es an Stelle von $-\frac{1}{8}(x'^2+y'^2)^2$ richtig $+\frac{1}{8}(x'^2+y'^2)^2$ heißen. Daher hat auf S. 366 in den Gleichungen (48) jeweils das von den C_i freie Glied in a_1, a_4, a_5 und a_{13} das *positive* Vorzeichen. In a_8 heißt es statt $-\frac{1}{4}Y'$ richtig $+\frac{1}{2}Y'$. Bei a_3 ist $C_5 Y'$ nicht mit $z-z_1$ zu multiplizieren. in a_5 fehlt das Glied $C_1(z-z_1)^2$. Auf S. 367 heißt es in a_4 an Stelle von $(z-z_1)$ richtig $(z-z_1)^2$, in a_5 heißt es richtig $+\frac{3}{2}Y'^2$ in a_6, Y' und a_7 und a_{10} sind negativ. Auf S. 366 in Gleichung (49) hat das Glied a_7 den Faktor $x_s y_s$, auf S. 365 heißt der Faktor von a_6 an Stelle von $x_s y_s'^2$ richtig $x_s y_s'$ und der Faktor von a_8 an Stelle von $x_s'^2 y_s$ richtig $x_s'^2 y_s'$.

[1]) ZS. f. Phys. **111**, 357, 1938.

Berichtigung

zu der Arbeit „Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren“ von L. Fauldrath [1]).

Auf S. 702 sind die letzten Textzeilen irrtümlich vertauscht worden. Der ganze Absatz muß richtig heißen:

Die Fig. 1 zeigt die Schaltung, bei der die Ladung über den Spitzenkamm K_1 von einem kleinen Transformator über eine Ventilröhre (Spannung U_b) auf die Scheibe aufgesprüht und auf der Hochspannungsseite über den Spitzenkamm K_2 aufgesogen wird (Schaltung für „einfache Beladung“). Fig. 3 zeigt die Abhängigkeit des Kurzschlußstromes I_k (Kurve 1) und die des Beladungsstromes I_b (Kurve 1a) von der Beladungsspannung U_b. Bei der benutzten Scheibe liegt die maximal-erreichte Flächendichte bei $1{,}44 \cdot 10^{-9}$ Coul/cm^2. Es ist anzunehmen, daß bei Scheiben mit polierter Oberfläche ein höherer Wert erreicht wird.

[1]) ZS. f. Phys. **116**, 701, 1940.

Raum, Zeit und Naturgesetze.

Von **A. March**, Innsbruck.

(Eingegangen am 4. Februar 1941.)

Die in vorausgegangenen Arbeiten entwickelte Metrik wird axiomatisch begründet. Die nicht-punktförmige Partikel ist ebensowenig ausgedehnt wie die punktförmige, es gilt aber für sie das Axiom nicht, daß aus der Koinzidenz von AB und von BC die von A und C folgt. Das gibt der Raumbeziehung von koinzidenten Partikeln einen gewissen Spielraum, der durch eine universelle Konstante l_0 gemessen wird. Aus der objektiven Bedeutung des Koinzidenzbegriffes ergibt sich eine fundamentale Relation, welche die Anwendbarkeit der Quantentheorie begrenzt und wonach eine Partikel nur solcher Zustandsänderungen fähig ist, für die

$$\left|\,|\Delta \mathfrak{p}|^2 - \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2\right| < \left(\frac{\hbar}{2\,l_0}\right)^2.$$

Es ist unvermeidlich, daß eine Theorie, die althergebrachte und bisher niemals kritisierte Begriffsbildungen durch völlig neue ersetzt, wegen ihrer als „Unanschaulichkeit" bezeichneten Ungewohntheit zunächst mißverstanden wird. Die Mißverständnisse ergeben sich immer daraus, daß der Kritiker an den gewohnten Begriffen, deren Zulässigkeit eben bestritten wird, unbewußt festhält und auf Grund ihrer Verwendung die neuen Begriffsbildungen widerspruchsvoll findet. Dieses Schicksal blieb auch einer neuen, den Beobachtungsmöglichkeiten angepaßten Raum-Zeitauffassung, die von uns in dieser Zeitschrift entwickelt worden ist[1]), nicht erspart. Vielleicht vermögen die folgenden Ausführungen zur Klarstellung der wesentlichen Punkte beizutragen.

Kritik eines Axioms. Es handelt sich in der von uns vertretenen Theorie *nicht* um eine neue Geometrie. Alle Begriffe und Beziehungen sowohl der affinen wie der metrischen Geometrie — einschließlich des Punktbegriffs — werden letzten Endes beibehalten und auch an der vierdimensionalen Geometrie der Relativitätstheorie ändert sich nichts. Was vom Eingriff betroffen wird, sind nicht die geometrischen Begriffe als solche, sondern *lediglich die Art, in der diese Begriffe mit der beobachtbaren Wirklichkeit in Beziehung zu setzen sind.*

---

[1]) A. March u. E. Foradori, ZS. f. Phys. **114**, 215 u. 653, 1939; A. March, ebenda **115**, 245 u. 522, 1940. Diese Aufsätze werden im folgenden als I, II, III, IV zitiert.

Die bisherige Auffassung betrachtet die raum-zeitliche Welt als ein Punktkontinuum und hält es, wenigstens im Prinzip, für möglich, die Punkte dieses Kontinuums tatsächlich aufzuweisen. Es gibt für sie ein punktuelles „Hier" und ein punktuelles „Jetzt", das eine verwirklicht durch einen räumlich ausdehnungslosen Körper, das andere durch ein zeitlich ausdehnungsloses Ereignis. Alles Messen beruht nach der geltenden Metrik auf der Feststellung von Koinzidenzen solcher punktförmiger Körper bzw. Ereignisse. Bei einer Abstandsmessung werden die beiden Punktkörper, deren Abstand bestimmt werden soll, mit den Endpunkten eines Maßstabes zur Koinzidenz gebracht, während bei Zeitmessungen die Koinzidenz von zeitlich punktuellen Ereignissen mit Uhrzeigerstellungen beobachtet wird. Der Punktcharakter der Koinzidenzen spricht sich dabei in der Forderung aus: Wenn ein Punktkörper oder ein Punktereignis A mit B koinzidiert und B mit C, dann koinzidieren auch A und C; ein Axiom, das bisher jeder Messung zugrundegelegt worden ist und auf dessen ausdrückliche Formulierung man wegen seiner scheinbaren Selbstverständlichkeit verzichtet hat.

Demgegenüber haben wir den Nachweis erbracht, daß es weder notwendig noch natürlich ist, den Meßvorgang auf die Feststellung von Punktkoinzidenzen zu begründen. Alles spricht dafür, daß es Punktkörper — wir beschränken uns vorläufig auf den Raum, von der Zeit sprechen wir nachher — in Wirklichkeit nicht gibt, sondern daß die letzten Elemente der Materie „nicht-punktförmig" sind. Das wurde bereits früh erkannt. Aber man zog daraus, indem man „nicht-punktförmig" und „ausgedehnt" verwechselte, den verhängnisvollen Schluß, daß den Elementarteilchen der Materie eine Ausdehnung zugeschrieben werden müsse. Der Punktbegriff ließ sich dann anscheinend nur so überwinden, daß man den von einer Partikel erfüllten Raum als letztes nicht weiter zerlegbares Raumelement betrachtete und dieses Element an Stelle des Punktes setzte. Aber diese Vorstellung bot, wie sich bald zeigte, keine Möglichkeit, aus den durch den Punktbegriff bedingten Schwierigkeiten herauszukommen, weil sie den Begriff, der vermieden werden sollte, stillschweigend beibehielt und ihn nur rein äußerlich unterdrückte. Denn wenn ein „kleinstes Teilchen" einen endlichen Raum erfüllt, so besteht es notwendig aus kleineren Teilen, womit man letzten Endes wieder zum Punktbegriff zurückkommt. Es nützt nicht das Mindeste, ein Raumgebiet von bestimmter endlicher Größe als letztes unzerlegbares Raumelement zu deklarieren, weil dieses Vorgehen über eine reine Nomenklatur nicht hinausgeht und zu einer in sich widerspruchsvollen Raumidee führt, die den Begriff des Raumpunktes wohl verleugnet, ihn aber tatsächlich in dem des ausgedehnten Raumelements versteckt hält. Welchen

Sinn sollte übrigens die Behauptung, daß der Elementarpartikel eine bestimmte Größe zukommt, haben? Wenn die Partikel eine letzte Gegebenheit darstellt, läßt sie sich ja nicht ausmessen, weil uns als Meßmittel nur wieder Partikel oder Maßstäbe, die aus Partikeln zusammengesetzt sind, zur Verfügung stehen, so daß wir vor der Aufgabe stünden, die Partikel mit sich selber zu vergleichen.

Wenn aber die Elementarpartikel nicht ausgedehnt ist, worin drückt sich dann ihr nicht-punktförmiger Charakter aus? Es bleibt dabei, daß alles Messen auf Feststellungen von Koinzidenzen beruht. Da den Partikeln keine Ausdehnung zukommt, so sind die Koinzidenzen, die zwischen ihnen stattfinden, ebenso scharf definiert wie die zwischen Punktkörpern. *Aber es gilt für sie nicht das oben angeführte Koinzidenzenaxiom*; aus der Koinzidenz von A mit B und von B mit C kann nicht mehr gefolgert werden, daß auch A und C koinzidieren. Hierin und nicht in einer vermeintlichen Ausdehnung liegt das entscheidende Merkmal der nicht-punktförmigen Partikel. Von einer Ausdehnung der elementaren Körper ist bei dieser Charakteristik nicht die Rede, sondern es wird lediglich zum Ausdruck gebracht, daß die elementaren Raumbeziehungen von Partikeln nicht dieselben sind wie die von Punktkörpern, eine Einsicht, die den eigentlichen Kernpunkt der von uns entwickelten Metrik bildet.

Die bisherige Auffassung hielt es für ausgemacht, daß die Raumbeziehungen der Dinge nur auf Grund des Koinzidenzenaxioms erfaßbar sind, d. h. sie bestand darauf, auf die Wirklichkeit den Punktbegriff anzuwenden. In Wahrheit liegt dazu keine Notwendigkeit vor. Ob sich die Wirklichkeit dem Axiom fügt oder nicht, darüber kann nicht eine vorgefaßte Meinung, sondern nur die Erfahrung entscheiden, die kaum einen Zweifel darüber läßt, daß das Axiom *nicht* gilt. Gibt man aber dies zu, so ist der Weg, den man zu beschreiten hat, zwangsläufig gegeben. Es tritt dann eben an Stelle des Punktes das durch eine Partikel realisierte Raumelement, das sich zwar einer im Sinne der Punktgeometrie „anschaulichen" Vorstellung entzieht, begrifflich aber von ebenso einfacher Art wie der Punkt ist. Die Punktgeometrie vermag sich dieses Raumelement nur im Bild eines Raumgebietes von endlicher Ausdehnung vorzustellen, ein Bild, das ganz unzulänglich ist, weil es die wesentlichste Eigenschaft des Elements, sich bei einer Änderung des Koordinatensystems wie ein Punkt zu transformieren, nicht wiederzugeben vermag. Es hängt dies damit zusammen, daß eben das Bild an den Voraussetzungen der Punktgeometrie festhält und daher grundsätzlich nicht in der Lage ist, den Begriff eines nicht-punktförmigen Raumelements zu erfassen.

Der elementare Meßakt. Die Ungültigkeit des Koinzidenzenaxioms führt zu einer Art des Messens, die sich von der bisherigen prinzipiell unterscheidet. Alle Messungen gehen — und dies gilt ganz allgemein für jede Art von Metrik — auf einen Grundakt zurück, nämlich auf die Feststellung, ob zwei gegebene elementare Körper (Punktkörper oder Partikel) miteinander koinzidieren oder nicht. Dieser Akt bildet die notwendige Voraussetzung allen Messens. Während aber die hergebrachte Metrik mit solchen Akten allein nicht auskommt, sondern zur Durchführung einer Messung noch eines Maßstabes bedarf, dessen Länge willkürlich festgesetzt wird, bildet in der neuen Metrik die Feststellung von Koinzidenzen nicht bloß die Voraussetzung der Messung, *sondern zugleich das Meßmittel*, indem jede Messung *in der Abzählung von Koinzidenzen* besteht. Sind nämlich A und B die gegebenen Partikel, deren Abstand bestimmt werden soll, so läßt sich immer A mit B durch eine Kette von Teilchen verbinden, in der jedes Teilchen mit seinen beiden Nachbarn durch eine Koinzidenz zusammenhängt. Die Mindestanzahl n der Partikeln, die zur Herstellung einer solchen Kette erforderlich ist, wird als Maßzahl des Abstandes genommen. Diese natürliche Art des Messens beruht wesentlich auf der Ungültigkeit des alten Koinzidenzenaxioms, also auf dem nicht-punktförmigen Charakter der Elementarpartikeln. Mit Punktkörpern läßt sich eine Kette von endlicher Ausdehnung nicht herstellen. Daher war die alte Metrik gezwungen, den Vorgang durch Hintereinanderauftragen eines Maßstabes nachzubilden, dessen Länge willkürlich festgesetzt wurde und als abhängig vom Bewegungszustand angenommen werden mußte. Einen solchen Maßstab kennt die neue Metrik nicht. An seine Stelle tritt hier eine universelle Konstante l_0, auf deren Sinn wir im nächsten Abschnitt zurückkommen.

Bei der grundlegenden Bedeutung des Koinzidenzbegriffs muß aber vorher die Frage geklärt werden, woran denn eine Koinzidenz erkannt wird. Die Antwort darauf ist: Die Feststellung einer Koinzidenz ist ein auf keinen anderen Akt zurückführbarer Grundakt des Beobachters. Ohne ihn gibt es überhaupt keine Beobachtung. Es hat keinen Sinn, die Entscheidung, ob in einem gegebenen Fall zwei Partikel koinzidieren oder nicht, vom Ausfall irgendeines Versuchs abhängen zu lassen. Denn das Ergebnis eines jeden Versuchs kann ja nur wieder in bestimmten Koinzidenzen bestehen. Damit überhaupt Beobachtungen möglich sind, muß der Beobachter aus eigner Machtvollkommenheit imstande sein, das Stattfinden oder Nichtstattfinden einer Koinzidenz zu konstatieren. Die aus den Beobachtungen entnommenen Raumbeziehungen der Dinge sind demnach ausgesprochen *subjektiv* bedingt; wem das befremdend erscheint, mag sich

vergegenwärtigen, daß dieses subjektive Moment auch der klassischen Punktmetrik anhaftet, nur mit dem Unterschied, daß dort dem Beobachter die Beurteilung von Punktkoinzidenzen zugetraut wird.

Nun ist aber andererseits klar, daß der Koinzidenz auch eine objektive Bedeutung zukommen muß. Denn es wäre ja sonst nicht abzusehen, wie es möglich sein sollte, auf diesen Begriff eine in sich widerspruchsfreie Beschreibung der Wirklichkeit zu gründen. Es ist nicht unsere Sache, uns mit der philosophischen Seite dieses Problems auseinanderzusetzen. Für den Physiker ist der einzige mögliche Standpunkt der, die objektive Bedeutung der Koinzidenz und damit die Widerspruchsfreiheit des Raumbildes durch die *Forderung* zu sichern, daß zwei als koinzident beurteilte Partikel *auch durch keinen Versuch räumlich getrennt werden können.* In Wahrheit ist die Koinzidenz zweier Teilchen überhaupt nur an diesem Merkmal zu erkennen, weil es ja in Wirklichkeit keinen Beobachter gibt, der direkt eine Koinzidenz (die sich auf der Netzhaut seines Auges zuträgt) festzustellen vermöchte. Die Koinzidenzen, die wir tatsächlich konstatieren, sind von unvergleichlich viel groberer Art und finden nicht zwischen Elementarpartikeln, sondern zwischen Körpern statt, die aus einer sehr großen Anzahl von Partikeln zusammengesetzt sind. Die Behauptung, daß zwei Partikel koinzidieren, kann daher nur den Sinn haben, daß sie in einer solchen Raumbeziehung stehen, daß es durch keinen Versuch, der die Beziehung in eine uns erfaßbare übersetzt, gelingt, die Teilchen räumlich voneinander zu trennen. Es muß also z. B. unmöglich sein, die Trennung durch einen Beugungsversuch, der mit Licht- oder materiellen Strahlen vorgenommen wird, herbeizuführen. Tatsächlich wird dies, wie wir sehen werden, durch die fundamentale Beschränkungsrelation verhindert.

Der Sinn der Konstanten l_0. Die Möglichkeit, Abstände durch Abzählen von Koinzidenzen zu messen, beruht darauf, daß die Ungültigkeit des klassischen Koinzidenzenaxioms der Raumbeziehung zweier koinzidenter Partikel einen gewissen Spielraum läßt. Die Weite dieses Spielraums drückt sich in einer universellen Konstanten l_0 aus, die der Metrik als natürliche Maßeinheit dient. In diesem Sinne setzt sie den Abstand zweier Partikel, deren Verbindung durch eine zusammenhängende Kette mindestens n Teilchen erfordert, gleich $n \cdot l_0$.

Die Konstante l_0 darf nicht als Länge eines „kleinsten Maßstabes" verstanden werden, was unsinnig ist, weil es — schon aus relativistischen Gründen — einen kleinsten Körper nach der neuen Metrik ebensowenig gibt wie nach der alten. l_0 hat mit der Ausdehnung eines materiellen Dings

nichts zu tun, sondern ist *die invariante Bewertung eines invarianten Meßvorganges*. Dieser Vorgang besteht immer, gleichgültig, ob die beiden Partikel, deren Abstand gemessen werden soll, in Ruhe oder Bewegung sind, in der Ausspannung einer „kürzesten" Partikelkette, deren Länge dann mit $n \cdot l_0$ bewertet wird. Daß der Abstand von verschieden bewegten Beobachtern verschieden gemessen wird, kommt hier nicht, wie in der Punktmetrik, durch eine Änderung der Maßeinheit l_0 (bei unverändertem n) zustande, sondern durch eine solche der Koinzidenzenzahl n, indem die Koinzidenz oder Nicht-Koinzidenz zweier Teilchen von den Beobachtern infolge der verschiedenen Auffassung der Gleichzeitigkeit verschieden beurteilt wird. *Die Koinzidenz ist keine invariante Raumbeziehung.* Zwei Teilchen, die dem einen Beobachter koinzident erscheinen, müssen es für einen anderen nicht sein, oder, objektiv formuliert: während sich die Teilchen in einem System K voneinander räumlich trennen lassen, kann es sein, daß in einem anderen K' jeder Versuch einer Trennung fehlschlägt. An Hand der aufzustellenden Beschränkungsrelation läßt sich ersehen, wie diese Nicht-Invarianz zustande kommt. Sie wirkt sich bei der Lorentz-Kontraktion dahin aus, daß eine zwischen A und B von einem mit den Partikeln bewegten Beobachter ausgespannte kürzeste Partikelkette für einen relativ zu A und B bewegten Beobachter sich dehnen läßt, ohne dabei ihren Zusammenhang zu verlieren.

Es läßt sich jetzt übersehen, daß die hier entwickelte Theorie nicht so sehr eine neue, als eine *verallgemeinerte* Metrik vertritt. Eine Metrik ist eindeutig festgelegt, sowie durch den Wert einer Konstanten der Spielraum in der Raumbeziehung koinzidenter Elementarkörper vorgegeben ist. Die klassische Punktmetrik setzte diesen Spielraum gleich Null und stellt daher den Spezialfall $l_0 = 0$ dar, während wir hier den Fall untersuchen, daß die metrische Konstante einen von Null verschiedenen Wert hat. Zugleich erkennt man, daß der Übergang zu einer verallgemeinerten Metrik nicht in der Weise gelingen kann, daß man den Raumpunkt durch ein ausgedehntes Raumelement ersetzt. Zwar gilt auch für solche Elemente das klassische Koinzidenzenaxiom nicht und es lassen sich mit ihnen Abstandsmessungen genau nach dem oben beschriebenen Verfahren durchführen, wobei als l_0 der Durchmesser der Raumelemente auftritt. Aber der Begriff Koinzidenz verliert dabei seine elementare Bedeutung. Denn zwischen ausgedehnten Raumelementen gibt es nur Überdeckungen, d. h. aber Raumbeziehungen, die aus Punktkoinzidenzen bestehen. Man kommt also auf diese Weise über die Punktmetrik nicht hinaus. Relativistisch drückt sich dies darin aus, daß sich l_0 beim Übergang auf ein anderes Koordinaten-

system ändert, ein Zeichen, daß die als unzerlegbar erklärten Raumelemente sich in Wahrheit nicht als solche transformieren.

Man darf nicht versuchen, die verallgemeinerte l_0-Metrik mit den Begriffen der Punktmetrik verstehen zu wollen. Die Invarianz der metrischen Konstanten l_0 ist ein für die geltende Raum-Zeitauffassung völlig unverständlicher Zug, der dadurch bedingt ist, daß hier den letzten Raumelementen, trotzdem sie nicht punktförmig sind, keine Ausdehnung zukommt, was nach der klassischen Auffassung keinen Sinn hat.

Die Ausmessung von Abständen mittels kürzester Partikelketten liefert nur ganzzahlige Vielfache von l_0 (wobei für n auch der Wert -1 auftreten kann). Man kann indessen die Messung verfeinern, indem man außer dem Abstand der Teilchen A und B auch noch die Abstände aller Partikeln mißt, mit denen A und B koinzidieren. Das gelingt am einfachsten mittels des in I beschriebenen Maßkörpers. Mit Hilfe einer Abbildung läßt sich dann, wie in I und II gezeigt wurde, ein Abstandsmaß gewinnen, das *jeden* positiven Wert annehmen kann. Mit solchen Abständen und Koordinaten kann man genau so rechnen wie mit den entsprechenden Größen der Punktmetrik. Sie haben indessen nicht primären Charakter, sondern stellen *abgeleitete* Größen dar, deren Gebrauch nur dann zulässig ist, wenn er sich durch die Beobachtungsmöglichkeiten rechtfertigen läßt. Mit Hilfe des gewöhnlichen Abstandsmaßes kann l_0 als der größte Abstand definiert werden, den zwei Partikel voneinander haben dürfen, um noch als koinzident zu erscheinen.

Die Messung der Zeit. Das Wesen der Zeit ist „anschaulich" schwieriger zu erfassen als das des Raumes. Der Grund dafür ist, daß es einem eingewurzelten Vorurteil weit leichter fällt, die Unbeobachtbarkeit von Raumpunkten zuzugeben als die von Zeitpunkten. Die Aufweisbarkeit eines punktuellen „Jetzt" erscheint dem Bewußtsein evident und es führt erst eine eindringliche Besinnung auf die Beobachtungsmöglichkeiten zur Einsicht, daß es ein solches „Jetzt" ebensowenig gibt wie ein punktuelles „Hier".

Jede Zeitmessung hat zur Voraussetzung, daß der Beobachter zu beurteilen vermag, ob zwei Ereignisse gleichzeitig sind oder nicht. Dieses Urteil erfolgt durch einen primären, auf keinen anderen zurückführbaren Akt des Subjekts, der überhaupt erst die Verfolgung eines Vorganges an Hand einer Uhr ermöglicht. Denn eine Uhrablesung beruht ja darauf, daß der Beobachter ein Ereignis als gleichzeitig mit einer bestimmten Uhrzeigerstellung nicht „erkennt", sondern erklärt. Für Zeitmessungen spielt also

die Gleichzeitigkeit dieselbe fundamentale Rolle wie die Koinzidenz bei einer räumlichen Messung.

Was ist nun aber ein „Ereignis"? Was wir in der Welt beobachten, sind immer nur Koinzidenzen von Partikeln. Daher besteht das einfachste, nicht weiter zerlegbare Ereignis darin, daß zwischen zwei Partikeln, die sich gegeneinander bewegen, eine Koinzidenz stattfindet. Im folgenden wird der Begriff Ereignis immer in diesem Sinne verstanden, wobei es zunächst offen bleiben mag, ob die Partikel als Punkt- oder Nicht-Punktkörper aufgefaßt werden. Wesentlich ist aber natürlich, daß die Teilchen sich gegeneinander bewegen, daß also das beobachtete System sich verändert; denn in einem ruhenden System gibt es ja nichts, was sich „ereignet".

Erst die Ereignisse machen die Zeit zu einem ausmeßbaren Etwas. Die leere Zeit als solche läßt sich nicht messen (ja überhaupt nicht begrifflich erfassen), sondern meßbar sind nur die zeitlichen Beziehungen von Ereignissen. Bei der Festlegung dieser Beziehungen aber ging die klassische Metrik von der Annahme aus, daß den einfachsten Ereignissen (erklärt durch das Stattfinden einer Koinzidenz zwischen Punktkörpern) *Punkt*charakter zukommt, was heißen soll, daß den Messungen das Axiom zugrunde gelegt wurde: Wenn ein Ereignis E_1 gleichzeitig mit E_2 ist und E_2 gleichzeitig mit E_3, dann sind auch E_1 und E_3 gleichzeitig. Dieses Axiom machte es unmöglich, eine von Null verschiedene Zeitstrecke aus Gleichzeitigkeitsbeziehungen aufzubauen und darum bedurfte die bisherige Metrik für Zeitmessungen notwendig einer Uhr, d. h. einer Vorrichtung, die periodisch immer wieder in den gleichen Zustand zurückkehrt und deren Periode als willkürlich festgesetztes Zeitmaß dient.

Wieder besteht nun der entscheidende Schritt im Übergang zu einer Metrik, in der das Gleichgewichtsaxiom *nicht gilt*, in der also einfachste Ereignisse nicht mehr Zeit*punkte* definieren. Dieser Übergang wird von unserer Raumauffassung gefordert, weil die Zulassung von Punktereignissen eine Möglichkeit bieten würde, zwei koinzidente Partikel auf dem Wege über die Zeit räumlich zu trennen (was wir ausschließen müssen, weil dann der Koinzidenz keine objektive Bedeutung zukäme). Gehe nämlich ein Lichtstrahl von einer Partikel A zu einer mit A koinzidenten Partikel B. Abgang und Ankunft des Lichtes werden an Koinzidenzen beobachtet, welche die durch das Licht in Bewegung gesetzten Teilchen A und B mit ruhenden Partikeln erfahren, wobei es auf diejenigen zwei Koinzidenzen E_1 und E_2 ankommt, die sich am frühesten ereignen. Sie markieren die Ereignisse „Abgang des Lichtes" und „Ankunft des Lichtes" und werden vom Beobachter als gleichzeitig beurteilt, da ja anderenfalls der Versuch den Schluß

zuließe, daß A und B räumlich verschieden liegen, ihre Koinzidenz also durch den Versuch aufgehoben würde. Der Begriff Koinzidenz würde dann jeden objektiven Sinn verlieren. Sei nun C eine dritte Partikel, die mit B, nicht aber mit A koinzidiert. Ein Lichtstrahl gehe von A über B nach C. Abgang von A, Ankunft in B und Ankunft in C bilden dann drei Ereignisse $E_1E_2E_3$, von denen E_1 und E_2 gleichzeitig sind, ebenso E_2 und E_3, *nicht* aber E_1 und E_3, weil ja A und C nicht koinzidieren und daher E_1 und E_3 auch zeitlich trennbar sein müssen. Man darf diese Überlegung nicht etwa dahin verstehen, daß in ihr den Ereignissen E eine gewisse zeitliche *Dauer* zugeschrieben und daraus die Ungültigkeit des bisherigen Gleichzeitigkeitsaxioms abgeleitet würde. Der Begriff „Dauer" ist auf elementare Ereignisse ebensowenig anwendbar wie der Begriff „Ausdehnung" auf elementare Partikel. Zeitmessungen beziehen sich immer nur auf die zeitliche *Beziehung* von Ereignissen, niemals aber auf das einzelne Ereignis, das in die Zeitmessung als unzerlegbares Element eingeht. Eine Überlegung von der Art: „weil die Partikeln räumlich ausgedehnt sind, bleiben sie, wenn sie sich treffen, immer eine gewisse Zeit beisammen und darum kommt den elementaren Ereignissen eine gewisse Dauer zu", verkennt daher vollkommen den Sinn der hier vertretenen Theorie, indem sie auf den unzulässigen Versuch besteht, die Begriffe der neuen Metrik auf die der Punktmetrik zurückzuführen.

Der Begriff der Gleichzeitigkeit hat bereits einmal in der Geschichte der Physik eine entscheidende Rolle gespielt, als aus seiner Kritik die Theorie der Relativität hervorging. Während sich aber damals die Kritik lediglich auf die Gleichzeitigkeit von Ereignissen bezog, die sich an verschiedenen Orten zutragen, dagegen die von gleichortigen Ereignissen unangetastet blieb, richtet sich jetzt der Eingriff auf die letztere, indem für sie die Gültigkeit eines von der Punktmetrik als selbstverständlich angenommenen Axioms bestritten wird. Dieser Schritt wirkt sich aber ganz analog wie beim Raum dahin aus, daß der Grundakt einer jeden Zeitmessung, die Feststellung von Gleichzeitigkeiten, nicht bloß wie in der klassischen Metrik, die Voraussetzung einer jeden Messung ist, sondern zugleich zum Meßmittel wird. Ebensowenig wie einen willkürlichen Maßstab kennt die neue Metrik eine willkürliche Uhr. Sondern sie mißt ohne jede Uhr den Zeitabstand zweier Ereignisse E und E' in der Weise, daß sie E und E' durch eine Kette von Ereignissen E_i verbindet, von denen jedes mit seinen beiden Nachbarn gleichzeitig ist, und die Mindestanzahl n der für die Bildung einer solchen zusammenhängenden Kette erforderlichen Glieder bestimmt, ein Verfahren, das natürlich die Ungültigkeit des klassischen Gleichzeitigkeitsaxioms zur

Voraussetzung hat und daher in der Punktmetrik nicht anwendbar ist. Die Zahl n wird als Maßzahl genommen und der gesuchte Zeitabstand gleich $n \cdot t_0$ gesetzt, unter t_0 eine universelle Konstante verstanden, die bei Zeitbestimmungen an Stelle von l_0 tritt. Zur Bestimmung von t_0 verwenden wir das Prinzip der Lichtgeschwindigkeit. Das Ereignis E sei jetzt der Abgang eines Lichtsignals von der Partikel P, E' die Ankunft des Signals in P', wobei P und P' voneinander den Abstand $n \cdot l_0$ haben mögen, so daß also die kürzeste Partikelkette, die P und P' miteinander verbindet, aus n Teilchen besteht. Das Signal passiert auf dem Weg von P nach P' alle diese Partikel, was ebensoviele Ereignisse E_i bedeutet. Nach dem Obigen ist jedes dieser Ereignisse mit seinen beiden Nachbarn gleichzeitig und es gilt außerdem, daß die aus den E_i gebildete Kette die kürzeste ist, die man zwischen E und E' ausspannen kann. Denn aus weniger als n Ereignissen läßt sich keine zusammenhängende Kette bilden, die E und E' verbindet, weil dazu eine Verbindung von P und P' durch weniger als n Teilchen erforderlich wäre. Somit geht in den Zeitabstand von E und E' dasselbe n ein wie in den räumlichen Abstand von P und P' und da das Verhältnis von Abstand und Zeit die Lichtgeschwindigkeit ist, ergibt sich $t_0 = l_0/c$.

Die oben erklärte Messung der Zeit ist im Prinzip der des Raumes vollkommen analog; sie nutzt den Spielraum aus, den die Ungültigkeit des alten Gleichzeitigkeitsaxioms der zeitlichen Beziehung von Ereignissen läßt, die vom Beobachter als gleichzeitig beurteilt werden. Die Konstante t_0 bedeutet nicht die Dauer eines bestimmten Vorganges, sondern sie bewertet den Bereich dieses Spielraums. Ebenso wie die Koinzidenz zweier Partikel ist auch die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse keine invariante Beziehung. Zwei Ereignisse, die vom Beobachter eines Systems K als gleichzeitig erklärt werden, müssen in einem anderen System K' nicht ebenfalls gleichzeitig erscheinen. Hierauf beruht die von der Relativitätstheorie geforderte Verlangsamung einer bewegten Uhr, die hier nicht durch eine Änderung von t_0, sondern durch eine solche der Maßzahl n zustande kommt. Seien E und E' zwei Ereignisse, die sich an einer im System K ruhenden Partikel abspielen (also durch Koinzidenzen von bewegten Teilchen mit dieser Partikel erklärt sind). Der Zeitabstand sei von K aus beurteilt gleich $n \cdot t_0$. Dann ist für einen bewegten Beobachter (System K') die Mindestzahl von Ereignissen, die sich zwischen E und E' einschalten lassen, größer als n, nämlich $n' = \frac{n}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Der zeitliche Abstand zweier Ereignisse E und E' läßt sich, solange deren Beziehungen zu anderen Ereignissen außer Betracht bleibt, grundsätzlich nur als ganzzahliges Vielfaches von t_0 messen. Man kann aber die

Zeitmessung dadurch beliebig verfeinern, daß man in die Messung weitere Ereignisse einbezieht, die mit E und E' gleichzeitig erscheinen. Das dazu gebrauchte Hilfsmittel besteht in einer ganzzahlig geeichten Uhr, deren Prinzip wir in I ausführlich auseinandergesetzt haben. Ihr Zeiger ist eine bewegte Partikel, die mit den Partikeln des ruhenden Zifferblattes Koinzidenzen erfährt. Jede Koinzidenz stellt ein Ereignis dar, dessen Abstand von einem bestimmten Bezugsereignis (Koinzidenz des Zeigers mit einer beliebig gewählten Nullpunktspartikel) einer ganzen Zahl entspricht. Mit Hilfe der Vorrichtung läßt sich durch eine große Zahl von Messungen für den Abstand von E und E' eine „statistische" Zeit gewinnen, die jeden Wert annehmen kann und mit der gewöhnlichen Zeit identisch ist. Der Definition dieser Zeit liegt eine Abbildung der Ereignisse auf Strecken der Länge t_0 zugrunde, die deshalb zulässig ist, weil die auf einer gemeinsamen Geraden liegenden Strecken eine Mannigfaltigkeit von derselben Art wie die Ereignisse bilden. Denn es gilt ja auch für sie das Koinzidenzaxiom nicht, wenn wir die (teilweise oder vollständige) Überdeckung zweier Strecken als Koinzidenz auffassen, und der Spielraum in der Beziehung zweier koinzidenter Elemente ist wieder durch t_0 gegeben.

Die Zuhilfenahme einer Uhr zur Messung der gewöhnlichen (statistischen) Zeit widerspricht nicht der Behauptung, daß die neue Metrik im Prinzip eine Uhr nicht kennt, weil nach ihr jede Zeitmessung in der Abzählung von Gleichzeitigkeitsbeziehungen besteht. Denn die hier gebrauchte Uhr bedeutet nicht wie bisher eine Vorrichtung, die Zeitmessungen erst ermöglicht, sondern ihre Konstruktion setzt solche Messungen bereits voraus. Außerdem ist sie überhaupt nicht unentbehrlich, sondern stellt nur ein bequemes Hilfsmittel dar, das die Abzählung von Koinzidenzen erleichtert, ähnlich wie etwa eine Geldzählmaschine das Abzählen von Geldstücken vereinfacht.

Die statistische Zeit ist nicht direkt meßbar, sondern hat die Bedeutung einer *abgeleiteten* Größe, die aus den Zeitabständen sämtlicher mit E und E' koinzidenten Ereignisse gewonnen wird. Ihrer Definition liegt das Verfahren zugrunde, E und E' nicht bloß unter sich, sondern auch zu allen übrigen Ereignissen, die den Ablauf der Zeit ausmachen, in Beziehung zu setzen. Dadurch gelingt es, E und E' stetig in den Strom des Geschehens einzuordnen und so ihre Zeitbeziehung durch eine stetige Größe zu erfassen. In der statistischen Zeit sind alle Spuren ihrer Herkunft verwischt, für sie gilt wieder das alte Koinzidenzenaxiom: sind E_1 und E_2 in ihrem Sinne gleichzeitig (d. h. ist der statistische Zeitabstand von E_1 und E_2 gleich Null) und ebenso E_2 und E_3, so besteht auch zwischen E_1 und E_3 Gleichzeitigkeit. Das bedeutet aber, daß wir mit dem Übergang von der direkt meßbaren zur statisti-

schen Zeit zum gewöhnlichen Zeitbegriff zurückkehren. Beim Raum sind wir ganz entsprechend vorgegangen, indem wir mit Hilfe einer großen Zahl von Beobachtungen einen statistischen Abstand definierten, der alle Eigenschaften des klassischen Abstandsmaßes aufweist.

Die Beschränkungsrelation. Es ist also so, daß sich auch im Rahmen einer Metrik, die das Koinzidenzenaxiom der klassischen Raum-Zeitauffassung für die primären Meßakte nicht anerkennt, auf dem Wege über eine Statistik ein Raum-Zeitschema begründen läßt, auf das die gewöhnliche vierdimensionale *Punkt*geometrie anwendbar ist. Wir wollen damit nicht behaupten, daß der Übergang zu dieser Geometrie notwendig, oder auch nur sachgemäß sei. Zweifellos wäre die Verwendung einer der l_0-Metrik konformen Geometrie, die den Punktbegriff nicht kennt, natürlicher. Sie brächte aber die Notwendigkeit mit sich, *alle* Naturgesetze neu zu formulieren, ohne daß damit in den Fällen, in denen die Gesetze von der l_0-Metrik praktisch nicht betroffen werden, etwas gewonnen wäre. Es erscheint daher, wenigstens vorderhand, zweckmäßiger, im mathematischen Formalismus der Theorie die Raum- und Zeitkoordinaten xyz und t im bisherigen punktgeometrischen Sinne weiter zu verwenden. Dann wirkt sich aber die l_0-Metrik dahin aus, *daß diese Begriffe nicht mehr wie bisher kritiklos gebraucht werden dürfen, sondern immer nur in dem Umfang, der sich auf Grund der tatsächlichen Meßmöglichkeiten rechtfertigen läßt.* Das führt dazu, daß die bisherige raum-zeitliche Beschreibung gewisser Prozesse jeden Sinn verliert, woraus geschlossen werden muß, daß derartige Prozesse sich in Wirklichkeit nicht abspielen können. Hierin liegt der Sinn der Beschränkungsrelation, die der Anwendbarkeit der Quantentheorie eine prinzipielle Grenze setzt. In einer zukünftigen Theorie, die sich zur Beschreibung der Wirklichkeit einer „natürlichen" Geometrie bedient, wird es überflüssig sein, den Gültigkeitsbereich der Theorie durch eine eigene Vorschrift abzugrenzen, weil dann der Formalismus selbst dafür Sorge trägt, daß diese Grenzen nicht überschritten werden können. Solange wir aber die Punktgeometrie beibehalten muß die durch die Metrik bedingte Einschränkung ihres Gebrauchs in einem besonderen Naturgesetz ihren Ausdruck finden.

Es ist von vornherein klar, daß die Quantentheorie, welche die Wiederholung von Messungen verbietet, weil bereits durch die erste der Zustand des Systems zerstört wird, nur mit Vorbehalt der Verwendung von Begriffen zustimmen kann, die nur aus wiederholten Messungen ableitbar sind. Sie deutete bisher die ψ-Funktion einer Partikel dahin, daß $|\psi(xyz)|^2 \cdot dv$ die Wahrscheinlichkeit angibt, die Partikel P bei einer einmaligen Ortsbestimmung innerhalb eines den Ort xyz umgebenden beliebig kleinen Volumen-

elementes dv anzutreffen, betrachtete also $|\psi(xyz)|$ als eine den Beobachtungen unmittelbar entnehmbare Funktion. Sie ging dabei, im Sinne der Punktmetrik, von der Voraussetzung aus, daß es möglich sei, durch eine einmalige Messung die Koordinaten xyz einer Partikel mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Demgegenüber ist nach der l_0-Metrik durch eine einmalige Messung immer nur feststellbar, daß P mit irgendeiner Partikel P_0 eines als Maßkörper verwendeten starren Körpers koinzidiert. Eine genauere Lokalisierung von P ist ohne Zuhilfenahme weiterer Meßakte ausgeschlossen, wie sich sofort ergibt, wenn man irgendein Experiment, das zur Ortsbestimmung von P dienen kann, auf seine Genauigkeit hin prüft. Die Lage von P_0 (relativ zu einer beliebig gewählten „Nullpartikel" des Maßkörpers) kann dabei durch oftmalige Messungen mit beliebiger Genauigkeit ermittelt und durch Koordinaten xyz gekennzeichnet werden, was allerdings voraussetzt, daß den Teilchen des Maßkörpers eine unendlich große Masse zukommt, da ja andernfalls auch an P_0 mehrmalige Messungen nicht ausführbar sind. Daß es einen solchen Maßkörper in Wirklichkeit nicht gibt, ist belanglos, da es hier nur auf seine Möglichkeit ankommt; wer an ihm Anstoß nimmt, mag bedenken, daß sich sein Einwand ebensowohl gegen die Punktmetrik richtet.

Durch eine einmalige Messung sind demnach niemals die Koordinaten xyz der Partikel P selbst, sondern immer nur die einer Partikel P_0 feststellbar, mit der P in Koinzidenz angetroffen wird. Das bedeutet aber, daß die Messung die Koordinaten von P innerhalb eines bestimmten Bereiches unbestimmt läßt. Dieser Bereich, den man den „Überdeckungsbereich" von P_0 nennen kann, umfaßt die Lagen aller Teilchen, die mit P_0 koinzidieren, stellt also eine Kugel vom Radius l_0 dar. Was sich demnach den Beobachtungen entnehmen läßt, ist nicht $|\psi(xyz)|^2$ selber, sondern immer nur das über den Überdeckungsbereich einer Stelle xyz genommene Integral von $|\psi|^2$, als die Funktion

$$\chi(xyz) = \int \mathrm{d}v \cdot |\psi|^2.$$

Die Bedeutung von $\chi(xyz)$ ist die der Wahrscheinlichkeit, die Partikel in Koinzidenz mit einem Teilchen von der Lage xyz anzutreffen. Zu einem ψ, das nur von x abhängt, gehört als beobachtbare Funktion

$$\chi(x) = \int_{x-l_0}^{x+l_0} \mathrm{d}x \cdot |\psi(x)|^2,$$

welche die Wahrscheinlichkeit einer Koinzidenz mit einem Teilchen angibt, dessen x einen vorgegebenen Wert hat, während y und z beliebig sein können.

Und es ist nun zu fordern, daß *das Verhalten einer Partikel niemals einem ψ entsprechen kann, dessen zugehöriges χ keine beobachtbare Funktion darstellt.* Erst dieser Schluß, der sich wesentlich auf die objektive Bedeutung der Koinzidenz stützt, indem er Vorgänge ausschließt, die sich nicht im Sinne der Metrik auf Partikelkoinzidenzen zurückführen lassen, stellt eine These dar, die den Physiker eigentlich interessiert, weil sie die Frage der Metrik der Gerichtsbarkeit des Experiments unterstellt.

Die Beobachtungsmöglichkeiten schließen nämlich vor allem ein $|\psi(xyz)|^2$ aus, das in einer der Koordinaten eine Periodizität mit einer Periode $\lambda \leqq 2 l_0$ aufweist. Zum Beweis nehmen wir an, ψ hänge nur von x ab und es gelte für jedes x: $|\psi(x)| = |\psi(x+\lambda)|$, eine Beziehung, die natürlich auch für $\chi(x)$ gilt. Wir bezeichnen mit W die Wahrscheinlichkeit, daß die Partikel P bei einer Ortsbestimmung innerhalb des Raumes V angetroffen wird, der zwischen den Ebenen x_1 und x_2 liegt. Wir betrachten nun, indem wir für x einen beliebigen Wert annehmen, diejenigen innerhalb V liegenden Maßkörperteilchen P_n, deren x-Koordinate einen der Werte $x \pm n\lambda$ hat, unter n eine *ganze* Zahl verstanden. Ist $\lambda \leqq 2 l_0$, so muß P, wenn es überhaupt innerhalb V vorgefunden wird, mindestens mit einem der P_n koinzidieren. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Koinzidenz ist $\chi(x)$. Für die Wahrscheinlichkeit W ergibt sich daraus, wenn der Abstand $x_2 - x_1 = N \cdot \lambda$, unter der Voraussetzung, daß λ gerade $= 2 l_0$ ist, der Wert $W = N \cdot \chi(x)$. Ist $\lambda < 2 l_0$, so wird $W = N \cdot k : \chi(x)$, unter k einen von λ abhängigen Faktor < 1 verstanden, der dadurch bedingt ist, daß P zugleich mit Teilchen P_n zusammenfallen kann, die zwei oder mehreren verschiedenen „Schichten" n angehören. Die Gleichung $W = N \cdot k \cdot \chi(x)$ gilt nun aber für *jedes* x, da die angestellte Betrachtung vom Wert x ganz unabhängig ist. Also ist $\chi(x) = \chi(x')$, d. h. die Gleichung $\chi(x) = \chi(x+\lambda)$ kann nur bestehen, wenn $\chi(x)$ konstant ist. Der Beweis verliert seine Gültigkeit, wenn $\lambda > 2 l_0$, da dann P nicht jedesmal, wenn es in V liegt, mit einem der P_n koinzidieren muß.

Aus der Unmöglichkeit, ein $\chi(x)$ zu beobachten, das in x periodisch mit $\lambda \leqq 2 l_0$ ist, darf nun nicht ohne weiteres auf die Unmöglichkeit von Zuständen geschlossen werden, deren $|\psi(x)|^2$ eine solche Periode aufweist. Denn es kann ja sein, daß sich beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem K' die Periodizität in eine solche mit $\lambda > 2 l_0$ verwandelt, so daß der Zustand in K' beobachtbar ist. Wohl aber läßt sich behaupten, *daß es Partikelzustände, für die $|\psi(x)|^2$ in jedem Koordinatensystem periodisch mit $\lambda \leqq 2 l_0$ ist, überhaupt nicht gibt.* Das entscheidende Argument dabei ist nicht etwa, daß solche Zustände zwar an sich denkbar, aber grundsätzlich

nicht beobachtbar sind, sondern ihre Unmöglichkeit folgt daraus, daß ihre formale Beschreibung sich als völlig inhaltslos erweist.

Wir haben in IV gezeigt, wie sich daraus ein Übergangsverbot ableiten läßt. Es spricht, allgemein formuliert, die Unmöglichkeit solcher Übergänge einer Partikel aus, bei denen das Teilchen, um vom Anfangs- in den Endzustand zu gelangen, nicht realisierbare Zustände passieren müßte. Die Partikel erfahre durch irgendeinen Prozeß eine beliebige Zustandsänderung, z. B. dadurch, daß an ihr ein anderes Teilchen gestreut wird oder daß es ein Elektron unter gleichzeitiger Emission von schweren Elektronen absorbiert. Wir wollen uns dabei zunächst auf solche Zustandsänderungen beschränken, für die ΔE und $\Delta \mathfrak{p}$ (= Änderungen der Energie und des Impulses) einen raumartigen Vektor bilden, so daß

$$|\Delta \mathfrak{p}|^2 - \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 > 0.$$

Es gibt dann ein Koordinatensystem, in welchem $\Delta E = 0$, so daß Anfangs- und Endzustand darstellbar sind durch

$$\psi_1 = a_1 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{r}))}, \qquad \psi_2 = a_2 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - (\mathfrak{p}_2 \mathfrak{r}))}$$

Beim Übergang vom ersten in den zweiten Zustand muß das System Zustände annehmen, in denen sich ψ_1 und ψ_2 überlagern, in deren Darstellung daher die Summe

$$\left(c_1(t) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{r})} + c_2(t) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}_2 \mathfrak{r})}\right) e^{\frac{i}{\hbar} Et}$$

eingeht. Das ergibt für $|\psi|^2$ einen Summanden

$$4 |c_1| \cdot |c_2| \cdot \sin^2\left(\frac{(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1, \mathfrak{r})}{2\hbar} + \delta\right).$$

Legen wir die x-Achse in die Richtung von $\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$, so wird

$$(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}) = |\Delta \mathfrak{p}| \cdot x,$$

so daß in $|\psi|^2$ ein in x periodisches Glied mit $\lambda = \frac{h}{|\Delta \mathfrak{p}|}$ auftritt, das nur dann eine Bedeutung hat, wenn $|\Delta \mathfrak{p}| < \frac{h}{2 l_0}$. Ist $|\Delta \mathfrak{p}| \geqq \frac{h}{2 l_0}$, so ist die Periodizität in *keinem* Koordinatensystem beobachtbar, da sich $|\Delta \mathfrak{p}|$ beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem wegen der Invarianz von $|\Delta \mathfrak{p}|^2 - \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2$ nur vergrößern kann. Das heißt aber, daß zwischen den Zuständen ψ_1 und ψ_2 kein Übergang möglich ist, wenn ihnen im aus-

gezeichneten Koordinatensystem ein $\Delta \mathfrak{p}$ mit $|\Delta \mathfrak{p}| \geqq \frac{h}{2 l_0}$ entspricht, oder, unabhängig vom Koordinatensystem formuliert, wenn:

$$|\Delta \mathfrak{p}|^2 - \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 \geqq \left(\frac{h}{2 l_0}\right)^2.$$

Für den Beweis der Relation muß es natürlich gleichgültig sein, ob man die emittierten, absorbierten oder gestreuten Teilchen zum störenden System rechnet, wie das hier geschehen ist, oder aber in das gestörte System mit einbezieht. Bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte geht man bekanntlich in der zweiten Art vor. Man überzeugt sich leicht, daß sich an der Relation nichts ändert, wenn man z. B. beim Stoßproblem von den Formeln der Bornschen Näherungsmethode ausgeht oder in den Fällen, in denen eine strenge Lösung existiert, diese diskutiert.

Die Relation gilt, mit dem umgekehrten Vorzeichen der linken Seite, auch für den Fall, daß die Größen ΔE und $\Delta \mathfrak{p}$ nicht einen raum-, sondern einen zeitartigen Vektor bilden, wenn also $\left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 - |\Delta \mathfrak{p}|^2 > 0$. Dann existiert ein Koordinatensystem, in welchem die Partikel lediglich eine Änderung der Energie erfährt, während $\Delta \mathfrak{p} = 0$. Die Partikel muß dann beim Übergang Zustände passieren, deren $|\psi|^2$ einen Summanden von der Art $4\,|c_1| \cdot |c_2| \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta E \cdot t}{2\hbar} + \delta\right)$ enthält. Der periodische Faktor dieses Gliedes ist aber nur dann beobachtbar, wenn die Periode oberhalb $2 t_0$ liegt. Der Beweis dafür gründet sich auf eine Betrachtung, die der früher für den räumlichen Fall angestellten ganz analog ist. Nach der Quantenmechanik soll $|\psi(t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit bedeuten, zur Zeit t die Partikel an einer vorgegebenen Stelle anzutreffen, wobei unter t die gewöhnliche Punktzeit gemeint ist. Was sich tatsächlich in einem Beobachtungsakt erfassen läßt, ist aber lediglich die Gleichzeitigkeit einer bestimmten Lage der Partikel mit einer bestimmten *Uhrzeigerstellung* t. Die Punktzeit bleibt dabei innerhalb des Bereiches von $t_0 - t$ bis $t_0 + t$ unbestimmt, ganz analog wie die Koinzidenz einer Partikel mit einem Maßkörperteilchen xyz den genauen Ort der Partikel innerhalb eines Bereiches von der Ausdehnung $2 l_0$ unbestimmt läßt. Den Beobachtungen ist daher nicht $|\psi(t)|^2$ selber, sondern immer nur

$$\chi(t) = \int_{t-t_0}^{t+t_0} \mathrm{d}t \cdot |\psi(t)|^2$$

entnehmbar. Von der Funktion $\chi(t)$ läßt sich aber auf ganz entsprechende Art wie von $\chi(x)$ zeigen, daß die Beobachtungsmöglichkeiten eine Periodizität mit einer Periode $\tau \leqq 2 t_0$ ausschließen. Es gibt daher keine Zustände,

für die $|\psi(t)|^2$ in jedem Koordinatensystem periodisch mit einer Periode $\leqq 2t_0$ ist, woraus folgt, daß eine Partikel nur solcher Übergänge fähig ist, die — bei zeitartigem Vektor ΔE, $\Delta \mathfrak{p}$ — der Bedingung genügen:

$$\left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2 - |\Delta \mathfrak{p}|^2 < \left(\frac{h}{2 l_0}\right)^2.$$

Der eben geführte Beweis versagt nur dann, wenn die Störungsmatrix periodisch von t abhängt, weil dann die Koeffizienten $c(t)$ ebenfalls periodische Funktionen von t werden und in $|\psi|^2$ Glieder mit dem Zeitfaktor $\sin^2 \frac{\Delta E \pm h\nu}{2h} t$ auftreten, so daß unsere Schlußweise hinfällig wird. In diesem Falle ist darauf zurückzugehen, daß eine periodische Störung auf die Partikel nur dann eine Wirkung auszuüben vermag, wenn die im Schwerpunktssystem gemessene Schwingungszahl ν unterhalb $1/2 t_0$ liegt. Denn die Wirkung sollte — nach der klassischen Korrespondenz — in einer Schwingung der Partikel von derselben Schwingungszahl ν bestehen. Solche Schwingungen sind aber gemäß der l_0-Metrik kinematisch nur für $\nu < \frac{1}{2 t_0}$ möglich. Das wurde bereits in II am Beispiel eines Oszillators gezeigt und beruht darauf, daß sich das Ereignis: „die Partikel koinzidiert mit einem bestimmten Maßkörperteilchen" infolge des Spielraumes der Gleichzeitigkeit nicht bloß *einer* Uhrzeigerstellung t, sondern allen Stellungen eines Bereiches von der Ausdehnung $2 t_0$ zuordnen läßt. Es ist daher unmöglich, daß sich das System mit einer Periode $\tau \leqq 2 t_0$ zeitlich verändert, woraus die Unwirksamkeit entsprechender periodischer Störungen folgt. Nach dem Korrespondenzprinzip muß dieser Schluß auch für die Quantenmechanik gültig sein. Die Beschränkungsrelation ergibt sich dann daraus, daß (zufolge des in der Störungsrechnung auftretenden Resonanznenners) nur solche Prozesse stattfinden können, bei denen $\Delta E - h\nu$ innerhalb der natürlichen Unschärfe verschwindet.

Bei der gleichzeitigen Einwirkung *mehrerer* periodischer Störungen muß man beachten, daß die resultierende Störung eine kinematisch zulässige Periodizität aufweisen kann, auch wenn dies für die einzelnen Störungen nicht gilt. Wenn z. B. auf ein Atom eine Lichtwelle ν_1 auftrifft und gleichzeitig eine zweite ν_2 von ihm ausgeht, so ist die Wirkung der resultierenden Welle, wie eine elementare Rechnung zeigt, beobachtbar, wenn die Differenz der Wellenvektoren $\mathfrak{k}$ der Bedingung $|\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2| < \frac{1}{2 l_0}$ genügt. Das ergibt für die Zustandsänderung des Atoms wiederum die Beschränkungsrelation.

Allgemein gilt daher für jede Zustandsänderung einer Partikel:

$$\left|\Delta \mathfrak{p}|^2 - \left(\frac{\Delta E}{c}\right)^2\right| < \left(\frac{\hbar}{2\, l_0}\right)^2,$$

eine Relation, die zum ersten Male — für einen speziellen Fall — vom Verfasser[1]) gefordert und in der Folge von Heisenberg[2]) verallgemeinert und invariant formuliert wurde. Sie bildet vorläufig das einzige greifbare Ergebnis der Theorie. Vermutlich gilt sie nicht bloß für einzelne Teilchen, sondern für beliebige Systeme von Partikeln, was sich aber in Strenge nicht beweisen läßt, da für diesen Fall der relativistische Ausdruck der ψ-Funktion nicht bekannt ist. Für ihre Prüfung kommen im Wesentlichen nur Versuche in Betracht, bei denen hinreichend schwere Teilchen emittiert, absorbiert oder gestreut werden, da für Zustandsänderungen, die eine Partikel durch die Wechselwirkung mit Photonen und Elektronen erfährt, die Beschränkungsrelation praktisch immer erfüllt ist (vgl. IV). Von Bedeutung wird die Relation daher erst für Prozesse, an denen schwere Elektronen beteiligt sind. Die wenigen über solche Prozesse heute vorliegenden Erfahrungen reichen natürlich zu einer Entscheidung der Frage, ob sich die Relation wirklich ausnahmslos bestätigt, noch nicht aus. Immerhin lassen sich aber alle bis jetzt bekannt gewordenen Abweichungen von der Quantentheorie, wie z. B. die geringe Winkeldivergenz der harten Schauer, aus ihr erklären[3]), wenn für l_0 die Größenordnung des klassischen Elektronenradius angenommen wird. Es ist weiter bemerkenswert, daß sich mit ihrer Benutzung für die auf Grund der Yukawaschen Theorie berechneten Kernkräfte sowie die magnetischen Momente von Proton und Neutron die richtige Größenordnung ergibt[4]). Es darf also jedenfalls behauptet werden, daß nach allem, was wir heute wissen, die Relation als bestätigt gelten kann.

Im Rahmen dieser prinzipiellen Untersuchung ist es vor allem wichtig, an der Relation die Widerspruchsfreiheit der Theorie nachzuweisen. Diese Widerspruchsfreiheit verlangt, daß die Relation kein Experiment zuläßt, durch das zwei koinzidente Partikel (also Partikel mit einem Abstand $d \leqq l_0$) voneinander getrennt werden könnten. Wir überzeugen uns davon am Beispiel eines mit Elektronen durchgeführten Beugungsversuchs. Die

[1]) A. March, ZS. f. Phys. **106**, 49, 1937. Bereits die dort entwickelte Theorie, die noch mit dem unzulässigen Begriff eines ausgedehnten Raumelementes operierte, führte zum Ergebnis, daß ein ruhendes Atom mit einem Photon von einer Energie $> hc/l_0$ nicht in Wechselwirkung zu treten vermag. — [2]) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **110**, 250, 1938. — [3]) Vgl. die in IV angegebene Literatur. — [4]) H. Fröhlich, W. Heitler u. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. London (A) 166, 154, 1938.

Strahlung falle senkrecht zur Verbindungslinie der beiden voneinander zu trennenden Teilchen auf. Für das Zustandekommen einer Beugungsfigur ist erforderlich, daß von den Teilchen gebeugte Strahlen unter einem Winkel ϑ gegen die Einfallsrichtung auslaufen, für den $d \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}$. Ablenkung um den Winkel ϑ bedeutet eine Impulsänderung $\Delta \mathfrak{p}$ des gebeugten Elektrons im Betrag

$$2\,|\mathfrak{p}|\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} = 2\,\frac{h}{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}.$$

Nach der Beschränkungsrelation muß also

$$2\,\frac{h}{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} < \frac{h}{2\,l_0}$$

sein (vorausgesetzt ist dabei, daß die Energie des Elektrons konstant bleibt). Aus $d \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}$ folgt dann:

$$\frac{\lambda}{2\,d} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\vartheta}{2}} < 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} < \frac{\lambda}{2\,l_0},$$

somit $d > l_0$. Der Schluß gilt, wie eine elementare Rechnung zeigt, auch für schiefen Einfall der Strahlung sowie auch für den Fall einer gleichzeitigen Impuls- und Energieänderung des Elektrons. Ganz analog läßt sich beweisen, daß auch ein mit Lichtstrahlen angestellter Beugungsversuch nicht gelingt, wenn $d \leqq l_0$.

Daß die Beschränkungsrelation eine räumliche Trennung koinzidenter Partikel verhindern muß, folgt unmittelbar aus ihrer Herleitung. Denn sie geht ja letzten Endes darauf zurück, daß die Unmöglichkeit von Vorgängen behauptet wird, deren raum-zeitliche Beschreibung die Auflösung von Partikelkoinzidenzen erfordern würde. Wenn es daher einen Vorgang gäbe, der der Relation widerspricht, so könnte man auf ihn, indem man die Überlegungen zurückverfolgt, die zur Relation geführt haben, ein Experiment gründen, das die Koinzidenz zweier in einem Abstand $\leqq l_0$ befindlicher Partikel aufhebt. Die Relation kann daher auch dahin interpretiert werden, daß es nach ihr unmöglich ist, zwei Partikel mit einem Abstand $\leqq l_0$ voneinander zu trennen, ein Satz, der den Ausgangspunkt unserer in I angestellten Überlegungen gebildet hat.

Metrik und Feldtheorie. Die Beschränkungsrelation läßt sich gut mit den Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelationen vergleichen, mit denen sie sowohl innerlich wie äußerlich eine gewisse Ähnlichkeit aufweist. Beide Male handelt es sich darum, daß die Wirksamkeit einer universellen Konstanten (h bzw. l_0) eine bestimmte Begrenzung der Beobachtungsmöglich-

keiten mit sich bringt. Denn der tiefere Sinn der Beschränkungsrelation liegt ja in der Erkenntnis, daß gewisse Zustandsänderungen deshalb nicht zustandekommen, weil sie den Bedingungen einer raum-zeitlichen Beschreibbarkeit nicht genügen. So wie sich nun auf die Ungenauigkeitsrelationen eine geschlossene Theorie begründen ließ, deren Gesetze automatisch die Relationen erfüllen, so muß auch von der Beschränkungsrelation der Übergang zu einer Theorie vollziehbar sein, in der die Relation aufgeht.

Aber hier stoßen wir auf eine Schwierigkeit von grundsätzlicher Art. Es muß nämlich als fraglich gelten, ob sich die angestrebte Theorie, die wesentlich auf der l_0-Metrik beruht, in der Ausdrucksweise der Punktgeometrie, also mit Verwendung gewöhnlicher Raum-Zeitkoordinaten, überhaupt sinngemäß formulieren läßt. Wenn sich auch, wie wir gesehen haben, mittels eines statistischen Verfahrens zwischen l_0-Metrik und Punktgeometrie ein Übergang vermitteln läßt, so ist doch nicht zu verkennen, daß dieser Übergang etwas Gekünsteltes hat. Es ist keine Frage, daß, wenn die hier vertretenen Anschauungen zurecht bestehen, die Naturgesetze sich nur widerwillig, wenn überhaupt, der Widergabe in einer Sprache fügen können, deren Begriffe ihrem Sinn nicht angemessen sind. Die Aufstellung einer „natürlichen", den Meßmöglichkeiten angepaßten Geometrie erscheint daher für den zukünftigen Ausbau der Theorie von vordringlicher Bedeutung. Wir maßen uns kein Urteil an, ob die von Mimura[1]) begründete Wellengeometrie diese natürliche Geometrie verwirklicht. Daß sie in der Tendenz der hier vertretenen Metrik sehr nahesteht, ist sicher[2]). Ihr Grundgedanke, das Linienelement ds als Matrix aufzufassen, entspricht dem in I besprochenen Matrixcharakter der Abstände, wobei bemerkenswerterweise dort wie hier der Eigenwert -1 aufscheint. Daneben scheinen allerdings weitgehende Unterschiede zu bestehen, aber bei der völligen Verschiedenheit der Ausgangspunkte der beiden Theorien ist es nicht unmöglich, daß sie rein formaler Art sind. So wenig wir indessen die Mimurasche Konzeption als einen bedeutungsvollen Versuch verkennen, eine der Wirklichkeit adäquate Geometrie zu schaffen, so möchten wir es andererseits doch nicht schon als ausgemacht hinstellen, daß die Naturgesetze überhaupt nur innerhalb einer solchen Geometrie darstellbar seien. Möglicherweise gelingt diese Darstellung, wenn auch vermutlich umständlicher, auch mittels der gewöhnlichen Punktgeometrie, vorausgesetzt nur, daß deren Begriffe mit der gebotenen Vorsicht verwendet werden. Und es

[1]) Y. Mimura, Journ. of Sci. Hirosima Univ. A, **5**, 99, 1935 u. folg. Arbeiten. — [2]) Vgl. Y. Mimura u. T. Hosokawa, ebenda **9**, 217, 1939.

erscheint daher vernünftig, zunächst den letzteren Weg wenigstens zu versuchen.

Es läßt sich dann von den Feldgleichungen voraussehen, daß in sie die Konstante l_0 explizite eingehen muß. Denn wenn in diesen Gleichungen die Feldgrößen als Funktionen der gewöhnlichen Raum-Zeitkoordinaten auftreten, so muß ja irgendwie zum Ausdruck gebracht werden, daß diese Funktionen bestimmten Einschränkungen unterliegen, die durch die Meßmöglichkeiten bedingt sind (und die bei Gebrauch einer natürlichen Geometrie entfallen, weil dann l_0 bereits als Maßeinheit in den Koordinaten steckt). In diesem Sinne verstehen wir die grundlegende Bedeutung der Theorie von Yukawa, der den entscheidenden Gedanken hatte, eine Konstante von der Größenordnung der Reichweite der Kernkräfte in eine Feldtheorie einzuführen, und dem es so bereits auf Grund einfachster Ansätze gelang, nicht bloß die Existenz, sondern auch die wesentlichsten Eigenschaften eines neuen Teilchens vorauszusagen. *Das Mesotron erscheint so als eine direkte Auswirkung der Konstanten* l_0. Daß seine Masse durch l_0 bedingt ist, geht übrigens bereits daraus hervor, daß nach der Beschränkungsrelation die größte Masse, die von einem Partikelsystem ohne gleichzeitige Emission oder Absorption anderer Teilchen emittiert oder absorbiert werden kann, durch $\frac{h}{2 l_0 c}$, also der Größenordnung nach durch die Masse des schweren Elektrons, gegeben ist.

Die Aufgabe, eine Feldtheorie zu entwickeln, in deren Gleichungen l_0 explizite eingeht, läßt keineswegs eine unübersehbare Anzahl verschiedener Lösungen zu. Es liegt dies daran, daß die zu fordernde Invarianz der Feldgleichungen die Zahl der Möglichkeiten außerordentlich einschränkt. Der Ausgangspunkt einer Feldtheorie ist immer die Aufstellung eines invarianten Wirkungsintegrals. Derartige Integralinvarianten aber gibt es für Feldgrößen von gegebenem Tensorcharakter nur in geringer Zahl, wenn man fordert, daß sich aus ihnen Feldgesetze zweiter Ordnung ergeben sollen. Geht man z. B., wie dies Yukawa in seiner ersten Arbeit unternommen hat, auf eine skalare Funktion $U(xyzt)$ aus, die das zwischen Proton und Neutron wirkende Feld beschreibt, so kommt, wenn man zunächst von der Wechselwirkung des Feldes mit der Materie absieht, als invariantes Wirkungsintegral nur das über $\square U^* \cdot \square U + \varkappa^2 \cdot U^* \cdot U$ in Frage, unter $\square U$ den vierdimensionalen Gradienten von U verstanden. Denn dieser Ausdruck ist die einzige Invariante, die sich aus U bilden läßt und zu einer Gleichung zweiter Ordnung, nämlich zu

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t^2} - \varkappa^2 U = 0$$

führt. $\varkappa^2$ bietet dabei eine Möglichkeit zur Unterbringung von l_0. Nicht so klar ist, wie das Wechselwirkungsglied angesetzt werden soll. Unterscheidet man Proton und Neutron durch eine Variable τ, die für das Neutron $= +1$, für das Proton $= -1$ ist und definiert Q und Q^* durch die Matrizen:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so scheint es am nächstliegenden, die Wechselwirkung in der Hamiltonfunktion durch einen Term von der Art $g \Sigma Q_s^* U^* (q_s) + Q_s U (q_s)$ zu beschreiben, der bei der Quantisierung des Feldes zum Ausdruck bringt, daß die Entstehung eines positiven U-Teilchens mit dem Übergang eines Protons in ein Neutron, der eines negativen Teilchens mit dem umgekehrten Prozeß verknüpft ist. Zu summieren ist dabei über alle im Feld vorhandenen schweren Teilchen, deren Koordinaten durch q_s angedeutet sind. Für U ergibt sich dann die Gleichung:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \varkappa^2 U = g \Sigma Q_s^* \delta (q\, q_s)$$

bzw.

$$\Delta U^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} - \varkappa^2 U^* = g \Sigma Q_s \delta (q\, q_s).$$

Die auf der rechten Seite auftretenden δ-Funktionen kommen dadurch zustande, daß den Partikeln Punktcharakter zugeschrieben wird, und bedingen das Auftreten einer unendlich großen Selbstenergie der Teilchen. Diese Schwierigkeit tritt ja auch in der Elektrodynamik auf und haftet grundsätzlich jeder auf der Punktmetrik beruhenden Feldtheorie an. Die Frage ist daher wichtig, ob die neue Raum-Zeitauffassung sie zu überwinden vermag.

Nun sieht es zunächst so aus, als ob die l_0-Metrik an der Unendlichkeit der Selbstenergie nichts zu ändern vermöchte, weil sie ja daran festhält, daß den Partikeln keine Ausdehnung zukommt. Eine genauere Überlegung ergibt indessen, daß der nicht-punktförmige Charakter der Teilchen (der sich in der Ungültigkeit des alten Koinzidenzenaxioms ausdrückt) genügt, um ein Unendlichwerden der Selbstenergie zu verhindern. Denn er hat ja zur Folge, daß sich einem Teilchen grundsätzlich keine genauen Werte der Koordinaten zuschreiben lassen, weil immer nur die Koinzidenz des Teilchens mit einer bestimmten Maßkörperpartikel feststellbar ist. Der genaue Ort des Teilchens bleibt dabei innerhalb des invarianten „Überdeckungsbereiches" der Maßkörperpartikel unbestimmt, ein Sachverhalt, der sich dahin beschreiben läßt, daß der Nichtpunktcharakter der Partikel *im punktgeometrischen Bild eine scheinbare invariante Ausdehnung der*

Teilchen vortäuscht. Sie geht in den Formalismus wie eine wirkliche Ausdehnung ein und ergibt eine endliche Selbstenergie. Es ist lehrreich, daß für ein Teilchen von unendlich großer Masse die scheinbare Ausdehnung verschwindet; denn es lassen sich ja an einer solchen Partikel beliebig viele Ortsmessungen vornehmen, so daß ihr genaue Werte der q zugeordnet werden können. Ein unendlich schweres Teilchen verhält sich also trotz seiner Nicht-Punktförmigkeit wie ein Punktkörper.

Wie Wechselwirkung eines Feldes mit der Materie wird also — und dies gilt nicht bloß für die Yukawasche, sondern für *jede* Feldtheorie — nicht mit Hilfe von δ-Funktionen beschreibbar sein, sondern erfordert zu ihrer Darstellung, vorausgesetzt, daß sie sich überhaupt punktgeometrisch wiedergeben läßt, die Vermittlung einer Funktion $D(qq_s)$, die innerhalb des Überdeckungsbereiches nicht verschwindet. Wir haben in III gezeigt, daß sich so eine in sich konsequente divergenzfreie Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes durchführen läßt. So bemerkenswert die Möglichkeit einer solchen Theorie ist, so möchten wir indessen auf den Versuch keinen allzu großen Wert legen, weil man den Eindruck gewinnt, daß in ihm die Tragfähigkeit des punktgeometrischen Bildes bereits überbeansprucht wird.

Die in der Elektrodynamik auftretenden Divergenzschwierigkeiten legten schon früher den Gedanken nahe, die Maxwellschen Gleichungen unter Einführung einer Konstanten von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius abzuändern. Das wurde erstmalig von Born und Infeld[1]) versucht. Das Feld ist nach ihnen zu beschreiben durch zwei 6-Vektoren $\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{H}$, die in bestimmter Weise durch Vermittlung einer Konstanten b miteinander verknüpft sind und durch die Invariante $(1 + (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2)/b^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2/b^4)^{1/2} - 1$ die Lagrange-Funktion des Feldes festlegen. Die Aufnahme eines Gliedes vierter Ordnung in die Lagrange-Funktion hat zur Folge, daß die Feldgleichungen nicht-linear werden. Die Theorie ergibt in invarianter Weise eine endliche Selbstenergie des Elektrons, das als eine Singularität des Feldes auftritt. Ihre Quantisierung stoßt indessen auf Schwierigkeiten und es scheint außerdem, daß sie der zu fordernden Beschränkungsrelation nicht entspricht, so daß sie mit den Erfahrungen kaum in Einklang stehen dürfte. Die später von anderen Autoren unternommenen Versuche, die klassische Theorie unter Einführung einer fundamentalen Länge abzuändern, gingen grundsätzlich einen ganz

[1]) M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London (A) **144**, 425, 1934 u. folg. Arbeiten.

anderen Weg, indem sie unter möglichster Beibehaltung der Maxwellschen Gleichungen deren Gültigkeitsbereich durch „abbrechende Faktoren" einzuschränken suchten. Das Elektron wurde dabei ausdrücklich oder (wie in einer früheren Arbeit des Verfassers) versteckt als ausgedehnt angenommen, was wir nach dem hier vertretenen Standpunkt als verfehlt betrachten müssen, weil wir es für grundsätzlich unmöglich halten, dem Elektron eine bestimmte Ausdehnung zuzuschreiben. Tatsächlich führt eine konsequente Theorie des ausgedehnten Elektrons, wie eine solche von Markow[1]) entwickelt wurde, zu einem Formalismus von befremdender und kaum sinnvoller Unanschaulichkeit, indem es sich als notwendig erweist, dem Elektron außer einer räumlichen auch eine zeitliche Ausdehnung zuzuschreiben. Man entgeht dem, wenn das Elektron, wie dies in III geschehen ist, als ein unausgedehntes, aber nicht-punktförmiges Teilchen eingeführt wird.

Immerhin behält die Theorie auch dann noch etwas Befremdendes, was wohl darauf hindeutet, daß eine wirklich zutreffende Formulierung der Feldgesetze nur im Rahmen einer „natürlichen" Geometrie möglich ist. Eine solche Geometrie haben wir derzeit nicht zu bieten. Und wir müssen es daher der Zukunft überlassen, ob sich mit ihrer Hilfe das eigentliche Ziel der Feldtheorie, die Erklärung der Massen der Elementarteilchen, wird erreichen lassen.

---

[1]) M. Markow, Journ. of Phys. **2**, 453, 1940.

(Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G.)

Zur Ausmessung des Feldes magnetischer Elektronenlinsen.

Von **J. Dosse.**

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Februar 1941.)

Ein Verfahren und eine Meßeinrichtung werden beschrieben, mit deren Hilfe stark inhomogene magnetische Felder, wie sie in Elektronenlinsen kurzer Brennweiten auftreten, ausgemessen werden können. Einige Meßergebnisse werden mitgeteilt.

1. Aufgabenstellung. Die Theorie der Elektronenlinsen ist durch eine Reihe von Arbeiten[1]) bereits soweit ausgebaut, daß sie bei der Entwicklung der Linsen in steigendem Maße herangezogen werden kann, nicht nur, um grundsätzliche Fragen zu beantworten, sondern auch um genauere, zahlenmäßige Angaben über optische Konstanten vorliegender Linsen zu gewinnen. Vordringlich ist hierbei u. a., die Frage nach Brennweiten und Fehlerkonstanten starker Linsen, wie sie in Elektronenmikroskopen Verwendung finden, zu beantworten.

Hierzu ist die Kenntnis des Feldverlaufs in der Linse notwendig. Die Ausmessung des Feldes einer gegebenen Linse wird nun dadurch sehr erleichtert, daß nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie das Feld im ganzen Raum aus dem *Feldverlauf längs der Linsenachse* und dessen Ableitungen bestimmt werden kann. In den Formeln für die optischen Konstanten treten ebenfalls nur diese Feldkurve und ihre Ableitungen auf.

Für die Ausmessung elektrischer und magnetischer Felder stehen verschiedene erprobte Verfahren zur Verfügung[2]), deren Anwendung bei

[1]) Es seien hier nur einige der einschlägigen Arbeiten genannt, in denen sich weitere Schrifttumshinweise finden: W. Glaser, ZS. f. Phys. **80**, 451, 1933; ebenda **97**, 177, 1937; ebenda **109**, 700, 1938; ebenda **116**, 19 u. 56, 1940; O. Scherzer, ebenda **80**, 193, 1933; ebenda **101**, 23 u. 593, 1936; ebenda **114**, 427, 1939; A. Recknagel, Jahrb. d. AEG-Forsch. **7**, Sonderheft: Übermikroskop, März 1940, S. 15. — [2]) a) *Ausmessung elektrischer Felder:* erstmalig C. L. Fortescue u. S. W. Farnsworth, Proc. Amer. I. E. E. **32**, 757, 1913 und W. Estorff, ETZ. **37**, 61, 1916; Zusammenstellung der Verfahren bei E. Brüche u. O. Scherzer, Geom. Elektronenoptik, Berlin, Jul. Springer, 1934, S. 71; Neuere Versuchsanordnung vgl. R. Theile u. J. Himpan, Telef. Rö. 1940, Heft 18, S. 50. b) *Ausmessung magnetischer Felder:* Methoden vgl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik, 17. Aufl., Leipzig, Teubner, 1935; Messung mittels Schwingspule vgl. O. Klemperer u. H. Miller, Journ. Sc. Instr. XVI, 121, 1939.

größerer Ausdehnung des zu messenden Feldes oder eines vergrößerten Modellfeldes keine Schwierigkeiten macht. Diese treten erst auf, wenn es sich um stark inhomogene Felder in Linsen kurzer Brennweite handelt und die Benutzung eines vergrößerten Modells sich verbietet. Ein solcher Fall liegt bei den magnetischen Linsen des Übermikroskops vor. Hier beträgt die Ausdehnung des Feldes längs der Achse nur wenige mm; da aber die Feldverteilung im Eisenmantel und in den Polschuhen von der Induktion abhängt und damit auch die Feldform im Luftspalt, d. h. das eigentliche Linsenfeld, sich mit der Durchflutung in der Magnetspule ändert, ist es für genauere Untersuchungen notwendig, das Feld der fertigen Linse unmittelbar auszumessen.

2. Meßverfahren. Unter den vorliegenden Bedingungen schien das ballistische Verfahren am aussichtsreichsten. Es wird hierbei mittels eines ballistischen Galvanometers der Stromstoß gemessen, der in einer kleinen Meßspule als Sonde entsteht, wenn das zu messende Feld geändert, d. h. z. B. ein-, aus- oder umgeschaltet wird [1]). Der Ausschaltvorgang ist bei weitem, der Einschaltvorgang gerade noch genügend kurz gegenüber der Schwingungsdauer der in Betracht kommenden Galvanometer. Die experimentelle Hauptaufgabe lag darin, Meßspulen von genügend kleiner Ausdehnung zu bauen, die jedoch noch einen so großen Stromstoß geben, daß man mit einem hochempfindlichen Galvanometer eine ausreichende Meßgenauigkeit erhält. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß für die Rechnungen außer der Feldkurve selbst auch noch ihre erste und zweite Ableitung gebraucht werden, muß eine verhältnismäßig hohe Meßgenauigkeit gefordert werden. Es ist vorläufig ein Meßfehler von rund 0,5 Skt. bei 250 Skt. Höchstausschlag, d. h. von 0,2% erreicht worden, der durch Ausgleichung

[1]) Es kommen außerdem folgende Verfahren in Betracht (vgl. auch Fußnote 2b): 1. *Kraftmessung* an einem para- oder diamagnetischen Probekörper. Waagen ausreichender Empfindlichkeit stehen zur Verfügung, jedoch muß das Eigengewicht des Probekörpers kompensiert werden. Die Aufhängung des Probekörpers dürfte Schwierigkeiten bereiten. 2. *Widerstandsmessung an einer Wismutspirale.* Der u. W. dünnste zur Zeit käufliche Wismutdraht (0,06 mm Durchmesser) erscheint zur Herstellung einer genügend kleinen Spule als Sonde zu stark, da der Widerstand zu klein (wenige Ω) und daher die Meßgenauigkeit vermutlich zu gering würden. Auch die Isolierung des Drahtes ist schwierig. 3. Für eine Messung mit einer Probespule im *Wechselfeld*, die bei Anwendung des Kompensationsverfahrens sehr bequem und genau durchführbar ist, müßte das zu messende Feld durch einen rein sin-förmigen Strom erzeugt werden, was bei Verwendung eines Eisenschlusses und bei hohem Blindwiderstand des Stromkreises Schwierigkeiten macht. 4. Ein *Herausziehen der Meßspule* aus dem zu messenden Feld erscheint nicht zweckmäßig, da der Ort der Meßspule sehr genau festgelegt werden muß.

einer dichten Folge von Meßpunkten noch auf etwa die Hälfte (0,1%) herabgedrückt werden kann. Damit ergeben sich für die zweite Ableitung der Feldkurve schon brauchbare glatte Kurven (vgl. Fig. 2, Kurve d). Eine weitere Steigerung der Meßgenauigkeit an sich erscheint vorläufig nicht erstrebenswert, da die Länge und vor allem der Durchmesser der Meßspule (vgl. folgenden Abschnitt *3*) doch noch nicht so klein sind, daß man unter allen Umständen mit ausreichender Homogenität des von der Meßspule erfaßten kleinen Feldausschnittes rechnen dürfte. Die Ausdehnung der Meßspule *längs* der Achse hat zur Folge, daß die Feldkurve an den besonders stark gekrümmten Stellen etwas verflacht, also insbesondere der Höchstwert etwas zu klein gemessen wird. Dieser Einfluß läßt sich berechnen; er liegt bei den hier mitgeteilten Messungen im ungünstigsten Falle (Feldhöchstwert) knapp über der Fehlergrenze. Da jedoch die *Querausdehnung* der Meßspule gerade in der Umgebung des Feldhöchstwertes eine Erhöhung des wirklichen Wertes ergibt — die Feldstärke steigt dort mit wachsender Entfernung von der Achse an — ist auf eine Korrektur verzichtet worden. Der Einfluß des endlichen Meßspulendurchmessers könnte durch Messungen mit Spulen verschiedener Durchmesser und Extrapolation auf den Durchmesser Null erfaßt werden.

Auch die Einstellgenauigkeit des Meßspulenortes auf der Linsenachse erfordert besondere Aufmerksamkeit. Die Feldkurven der heute gebräuchlichen magnetischen Linsen haben z. T. so steile Flanken, daß der genannten Meßgenauigkeit im Galvanometerkreis ein Einstellfehler von 0,001 mm auf der Achse entspricht.

3. Die Meßeinrichtung[1]). Fig. 1 zeigt die Meßeinrichtung. Die *Verstellung der Meßspule* längs der Linsenachse erfolgt durch einen normalen Zahntrieb V_1, die Ablesung der Stellung wird jedoch durch ein Mikroskop A an einem mit der Meßspule fest verbundenen Objektmikrometer O vorgenommen. Da dieses nur 1 mm Länge besitzt, muß das Mikroskop von Millimeter zu Millimeter nachgestellt werden. Zwecks Justierung der Meßspule im Linsenfeld (Übereinstimmung der Bewegungslinie der Meßspule mit der Linsenachse) kann der ganze Zahntrieb um kleine Beträge in zwei zur Achse senkrechten Richtungen meßbar verstellt werden; die Linse ist in zwei zur Achse senkrechten Richtungen schwenkbar. Der Verlauf des Feldes bei Verschiebung der Meßspule senkrecht zur Linsenachse weist in der Umgebung des Feldhöchstwertes ein Minimum, in den Außenteilen,

[1]) Für wertvolle Hilfe bei der experimentellen Arbeit und der Auswertung der Messungen bin ich Herrn Th. Fromme sowie Herrn Dr. O. Prenner zu Dank verpflichtet.

jenseits der steilsten Stellen des Feldes, ein Maximum auf; diese Extremwerte entsprechen den gesuchten Achsenpunkten, auf die die Meßspule einzujustieren ist.

Die *Meßspulen* sind aus isoliertem Kupferdraht von 0,02 mm Durchmesser gewickelt. Bei 0,4 mm Länge und 0,3 . . . 0,4 mm Außendurchmesser des Wickelraumes (etwa 100 Windungen) läßt sich eine Größe des Stromstoßes erzielen, mit der sich die oben (unter *2*) genannte Meßgenauigkeit

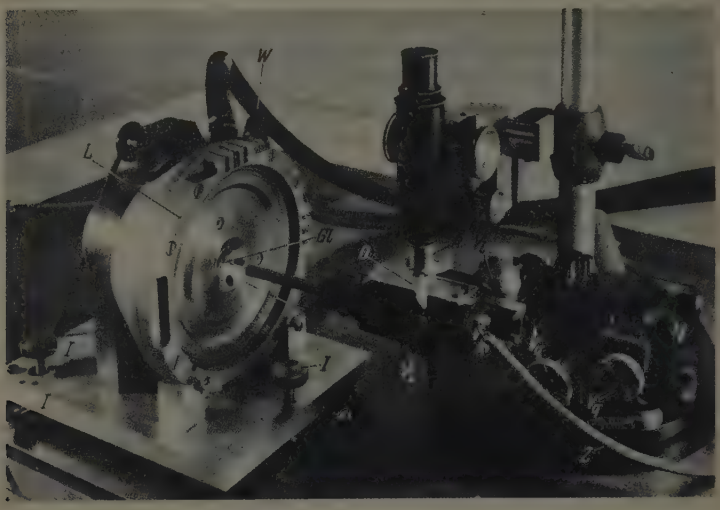


Fig. 1. Feldmeßeinrichtung.

L Linsengehäuse. *P* Polschuh. *Gl* Glasröhrchen, an dessen linkem Ende sich die *Meßspule* befindet. *O* Objektmikrometer für die Messung der Verstellung längs der Linsenachse. *A* Mikroskop zur Ablesung des Objektmikrometers. V_1, V_2 Stellschrauben zur Verschiebung der Meßspule längs bzw. quer zur Linsenachse. *J* Justierschrauben zur Schwenkung der Linsenachse. *W* Schläuche für Wasserkühlung. *Z* Abgeschirmte Zuleitung von der Meßspule zum Galvanometer.

ergibt. 1 Skt. Ausschlag entspricht dabei einer Ladung von etwa 10^{-9} Coul. Die Zuleitungsdrähte zur Meßspule müssen äußerst sorgfältig verdrillt werden, da sonst falsche Feldstärkenwerte vorgetäuscht werden können, wenn die Drähte durch Gebiete hoher Feldstärke hindurch zu der im schwachen Feld befindlichen Meßspule führen.

Das *Galvanometer* ist zwecks Fernhaltung von Erschütterungen aufgehängt, und zwar zum Schutz gegen Luftbewegungen innerhalb eines Kastens, und mit einer Öldämpfung versehen, die die Schwingungen des Gehäuses in der waagerechten Ebene unterdrückt. Die Ablesung erfolgt

mittels Fernrohr, um die Empfindlichkeit des Galvanometers (Siemens-Super-Standard) möglichst weit auszunutzen. Als Ablesemarke dient das Bild eines beleuchteten schmalen Spaltes. Da die Abbildung dieses Spaltes auf die Fernrohrskala über den kleinen Galvanometerspiegel erfolgt, ist die Größe der Marke durch Beugung bestimmt und erreicht etwa 1 Skt.

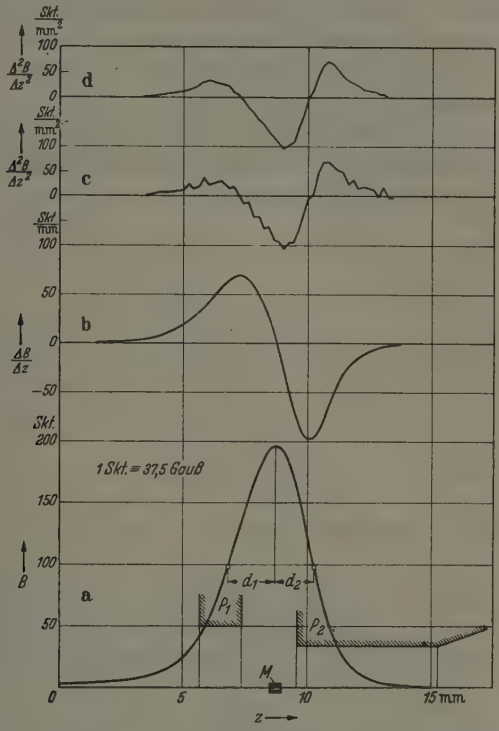


Fig. 2. Feldverlauf auf der Achse einer starken magnetischen Linse.
a Verlauf der Induktion B längs der Linsenachse z. Die Umrisse der Polschuhbohrungen P_1 und P_2 und der Meßspule M sind im Maßstab der Linsenachse eingetragen.
b und c Verlauf der ersten und zweiten Differenzen von B.
d Die zweiten Differenzen nach Ausgleichung der Meßwerte nach dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadratsumme.

Breite. Trotzdem lassen sich bei einiger Übung Zehntel Skt. ablesen, und der Ablesefehler an sich liegt bei 0,1 %. Da man mit *einem* Okular nur einen Teil der Fernrohrskala übersehen kann und die übliche Verstellung des Okulars bei der Ablesung ballistischer Ausschläge die Ablesegenauigkeit empfindlich beeinträchtigt, sind *zwei* feste Okulare dicht nebeneinander

vorgesehen, so daß die ganze Skala, bis auf einen kleineren Bereich um den Nullpunkt, übersehen werden kann.

4. Meßergebnisse. Fig. 2 zeigt eine mit der beschriebenen Meßeinrichtung gewonnene Feldkurve (*a*) und die daraus abgeleiteten Kurven der ersten (*b*) und zweiten (*c*) Differenzen. Die als Kurve *d* aufgetragenen zweiten Differenzen erhält man durch eine Ausgleichung der Meßwerte nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme, wenn man zur Berichtigung eines jeden Meßwertes die beiden linken und rechten Nachbarwerte mit heranzieht.

In Fig. 2a sind die Bohrungen der Polschuhe P_1 und P_2 im Maßstab der z-Achse mit eingezeichnet. Man erkennt, daß die Feldkurve *steiler*

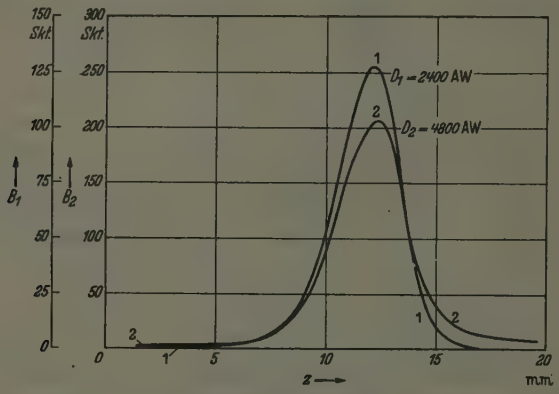


Fig. 3. Feldkurven einer Magnetlinse[1]) bei verschiedener Durchflutung: Die Induktionswerte der Kurve 2 sind im Verhältnis $\frac{D_2}{D_1} = 2$ kleiner als bei Kurve 1 dargestellt.

abfällt bei *engerer* Polschuhbohrung. Für die überschlägliche Beurteilung der optischen Konstanten, insbesondere der Brennweite, ist außer dem *Scheitelwert* B_0 der Induktion die *Feldlänge* wesentlich, die wir durch die *Halbwertsbreite d* (eigentlich *halbe* Halbwertsbreite, vgl. Fig. 2a) kennzeichnen wollen.

Steigert man die Durchflutung D der Linse von kleinen Werten beginnend, so wächst die Induktion B_0 zunächst proportional mit D und die Feldkurvenform, d. h. auch die Halbwertsbreiten d bleiben unverändert. Erst wenn im Eisenkreis, insbesondere in den Polschuhen der Linse, Sättigung einzutreten beginnt, wird dies anders: Die magnetische Spannung zwischen den Polschuhflächen steigt infolge des wachsenden Spannungsabfalls längs

[1]) Fig. 2 und 4 gelten für die gleiche, Fig. 3 für eine andere Magnetlinse.

des Eisenweges immer schwächer mit D an, so daß B_0 weniger rasch steigt und die Feldkurve flacher wird [1]), die Halbwertsbreiten d also anzusteigen beginnen. Fig. 3 zeigt dies an zwei Feldkurven, die an einer Magnetlinse bei zwei verschiedenen Durchflutungen gemessen sind. Mit der Verbreiterung

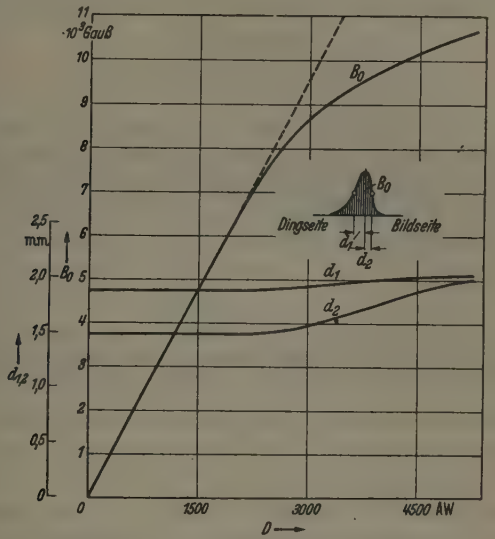


Fig. 4. Höchstwert B_0 der Induktion und Halbwertsbreiten d_1 und d_2 in Abhängigkeit von der Durchflutung D der Linsenspule [2]).

der Feldkurve bei steigender Durchflutung ist wegen des Durchflutungsgesetzes $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = D$ eine *relative* Abnahme des Induktionshöchstwertes B_0 verknüpft. Der Verlauf des Induktionshöchstwertes B_0 und der beiden Halbwertsbreiten d_1 und d_2 mit der Durchflutung D, der in Fig. 4 dargestellt ist, hängt im einzelnen von der geometrischen Form der Polschuhe und den magnetischen Eigenschaften des verwendeten Eisens ab.

Durch die Kenntnis des Feldverlaufs in der Linse sind wir nun in der Lage, die optischen Größen der ausgemessenen Linsen nach den von Glaser entwickelten Berechnungsverfahren [3]) zu bestimmen und mit der Erfahrung zu vergleichen. Dies soll in einer späteren Arbeit geschehen.

---

[1]) Qualitativ sind diese Zusammenhänge erstmals von E. Ruska (ZS. f. Phys. 89, 90, 1934, insbes. S. 114 ff.) bei Vergrößerungsmessungen an starken Magnetlinsen gefunden und besprochen worden. — [2]) Vgl. Fußnote S. 442. — [3]) W. Glaser, ZS. f. Phys. 117, 285, 1941.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Bemerkungen zur allgemeinen Schwankungstheorie.

Von **H. Scheffers.**

(Eingegangen am 14. Februar 1941.)

Während in der Literatur nur die Formeln für die durch den zweiten Hauptsatz bedingten statistischen Schwankungen der speziellen thermodynamischen Größen (Volumen, Druck, Temperatur usw.) gegeben sind, werden hier die Schwankungsformeln für die (nicht immer thermischen) „allgemeinen Zustandsparameter", für die ihnen zugehörigen „allgemeinen Kraftkomponenten" sowie für die von ihnen abhängigen Größen abgeleitet. Es handelt sich also um die statistische Ergänzung der schon von anderen Autoren entwickelten „verallgemeinerten" Thermodynamik, die die erwähnten nicht thermodynamischen Bestimmungsstücke in ihren Gleichungen enthält. Die Schwankungsformeln der Literatur sind, wie sich zeigt, als Spezialfälle in den entwickelten enthalten. Zum Schluß folgt eine kurze Betrachtung der Schwankungsvorgänge bei den „Gleichgewichten dritter Art" und beim kritischen Punkt.

Auf Ansätzen von Gibbs fußend, hat H. A. Lorentz[1]) schon vor vielen Jahren eine verallgemeinerte Thermodynamik entwickelt, indem er systematisch in die phänomenologische Thermodynamik die beliebigen äußeren „allgemeinen Kraftkomponenten" $A_1, A_2, \ldots$ und die zugehörigen voneinander unabhängigen „allgemeinen (makroskopischen) Zustandsparameter" $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die mit der Temperatur T den Zustand des Systems bestimmen, einführte; die üblichen thermodynamischen Formeln mit p (Druck) und v (Volumen) erscheinen dann nur noch als Spezialfälle, in denen $A_1 = p$, $A_2 = A_3 = \ldots = 0$ und $\alpha_1 = v$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$ ist. Der Wert dieser Verallgemeinerung liegt aber bekanntlich darin, daß die A und α auch andere nicht thermodynamische Größen vorstellen können; man kann so durch geeignete Wahl dieser Größen die thermischen Vorgänge beim galvanischen Element, bei Problemen der Elastizität, der Oberflächenspannung usw. verfolgen, wofür Lorentz Beispiele gibt. In neuerer Zeit sind z. B. magnetokalorische Vorgänge von Interesse geworden; man bekommt auf Grund des Ausdruckes für die Magnetisierungsarbeit die für sie gültigen Formeln leicht, wenn man nur in den Lorentzschen Ausdrücken $A_1 = -H$, $\alpha_1 = M$ setzt (H magnet. Feldstärke, M magnet. Moment der Substanz). Meissner[2]) hat dann wohl als erster auch auf das

[1]) H. A. Lorentz, Abhandlungen über Theoretische Physik I, Nr. XI, Leipzig 1907. — [2]) W. Meissner, ZS. d. VDI **65**, 845 u. 876, 1922.

Nernstsche Wärmetheorem die Gibbs-Lorentzsche Verallgemeinerung übertragen. Für die richtige Wahl der A und α gilt allgemein die Forderung, daß diese Größen so zu wählen sind, daß die bei einer Veränderung der α *vom* System geleistete äußere Arbeit gleich $A_1\,\mathrm{d}\alpha_1 + A_2\,\mathrm{d}\alpha_2 + \cdots$ ist. Für isotherme reversible Vorgänge ist dieser Ausdruck dann ein vollständiges Differential.

Ziel dieser Arbeit ist nur, diese verallgemeinerte Betrachtungsweise auch in der Theorie der durch den zweiten Hauptsatz bedingten statistischen Schwankungen, denen ja die A und α ebenso wie p und v unterliegen, durchzuführen. Wenn man dementsprechend die statistischen Schwankungen aus dem Gleichgewichtszustand heraus in einem System allgemein, d. h. die Schwankungen der Größen α, A, berechnen will, so erinnert man sich zunächst daran, daß die speziellen Schwankungsformeln für die thermodynamischen Größen (spez. Volumen, Druck usw.) natürlich durch Anwendung des Boltzmannschen Prinzips, indem dieses die Thermodynamik mit der Wahrscheinlichkeit verknüpft, erhalten worden sind. Die für den jetzigen Zweck nötige allgemeinere Formulierung dieses Prinzips ist nun in einem bereits von Einstein abgeleiteten bekannten Satz enthalten[1]). Denken wir uns nämlich die obigen allgemeinen phänomenologischen Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des Systems so normiert, daß für den Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts (Normalzustand) $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ wird, so ist nach diesem Satz die Wahrscheinlichkeit dafür, daß α_1 zwischen α_1 und $\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_1$, α_2 zwischen α_2 und $\alpha_2 + \mathrm{d}\alpha_2$ usw. liegt, gegeben durch

$$\mathrm{d}W = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{\mathfrak{A}}{kT}} \cdot \mathrm{d}\alpha_1 \cdot \mathrm{d}\alpha_2 \ldots \qquad (1)$$

(k Boltzmann-Konstante, T abs. Temperatur).

Dabei ist $\mathfrak{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ die Arbeit, die man nach der Thermodynamik aufwenden müßte, um das System in umkehrbarer Weise und isotherm aus dem Gleichgewichtszustand in den Zustand mit den Werten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ überzuführen. Berücksichtigen wir nun mit $\alpha = \alpha_1$ nur diejenige Schwankung, deren Größe wir bestimmen wollen, so ist (1) nach allen sonstigen α zu integrieren, und man erhält

$$\mathrm{d}W = W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{e^{-\frac{\mathfrak{A}(\alpha)}{kT}} \cdot \mathrm{d}\alpha}{\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\mathfrak{A}(\alpha)}{kT}} \cdot \mathrm{d}\alpha}, \qquad (2)$$

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275, 1910, § 1 u. 2.

indem die Konstante dadurch bestimmt ist, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 1$. Da im Exponenten von (2) die Größe $\mathfrak{A}$ mit dem sehr großen Faktor $1/kT$ multipliziert wird, so kann $W(\alpha)$ nur für sehr kleine $\mathfrak{A}$ (Größenordnung kT) und α von Null verschieden sein, wie schon Einstein bemerkt; also kann man $\mathfrak{A}(\alpha)$ in eine Potenzreihe nach der Schwankung α entwickeln.

Um dies durchzuführen, bedenken wir, daß die während des als reversibel und isotherm[1]) vorausgesetzten Übergangs von $\alpha = 0$ nach α *am* System geleistete äußere Arbeit[2]) wegen $\mathrm{d}\mathfrak{A} = -A\,\mathrm{d}\alpha$ gleich $\mathfrak{A} = -\int_{\alpha=0}^{\alpha} A\,\mathrm{d}\alpha$ ist, und deshalb die Schwankungen so erfolgen, als ob das System eine potentielle Energie des Betrages $\mathfrak{A}$ hätte. Wenn man also unter Vernachlässigung höherer als zweiter Potenzen entwickelt:

$$\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}'(0)\,\alpha + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}''(0)\,\alpha^2 + \cdots. \tag{3}$$

so verschwindet das erste Glied rechts, da nach Obigem $\alpha = 0$ dem Minimum der potentiellen Energie (Gleichgewichtszustand) entspricht. Da ferner das mittlere Schwankungsquadrat durch

$$\overline{\alpha^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha)\cdot\alpha^2\cdot\mathrm{d}\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}$$

allgemein definiert ist, so erhält man dafür mit (2) und (3) den gesuchten allgemeinen Ausdruck

$$\overline{\alpha^2} = \frac{kT}{\mathfrak{A}''(0)} = -\frac{kT}{\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_{T,\,\alpha=0}} \left(\begin{matrix} \text{bzw. bei beliebiger Normierung} \end{matrix} \overline{(\Delta\alpha)^2} = -\frac{k\cdot T}{\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_T} \right). \tag{4}$$

Diese einfache Formel[3]) läßt sich sehr anschaulich deuten; die Schwankungen α eines Zustandsparameters sind nach ihr um so größer, je geringer die Stabilität des Gleichgewichts bezüglich dieses Parameters ist, weil ja das wesentlich positive $\mathfrak{A}''(0)$ die Krümmung der Potentialkurve $\mathfrak{A}(\alpha)$ im Gleichgewicht $\alpha = 0$ (bei konstantem T) bedingt.

Aus (4) erhält man natürlich durch die entsprechende Spezialisierung von A und α sofort die bekannte Formel für die spez. Volumen- bzw. Dichte-

---

[1]) Die Kleinheit der Schwankungen erlaubt diese Annahme; anderenfalls denke man sich das System in einen Thermostaten gesteckt. — [2]) Eventuell durch die Einwirkung des Thermostaten. — [3]) Wegen $\overline{\mathfrak{A}(\alpha)} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}''(0)\cdot\overline{\alpha^2}$ ist in ihr auch der bekannte Satz enthalten, daß die „mittlere Abweichungsarbeit" stets den Wert $\frac{1}{2}kT$ hat.

schwankung in der Masseneinheit, ebenso aber auch nach dem eingangs Gesagten Formeln für die Schwankung der Magnetisierung usw. Bestimmen wir den Zustand des Systems durch die Zustandsparameter und die Temperatur, so ist bekanntlich bei reversiblen isothermen Änderungen die am System geleistete Arbeit gleich der Zunahme der freien Energie F des (als isotherm angenommenen) Systems. An Stelle von $\mathfrak{A}(\alpha)$ tritt also in diesem Falle $F(\alpha) - F(0)$, also an Stelle von $\mathfrak{A}''(0)$ nun $F''(0)$, so daß folgt

$$\overline{\alpha^2} = \frac{kT}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0}} \tag{5}$$

mit der entsprechenden Deutung durch $F''(0)$ als Maß der Stabilität. Wählt man aber statt der Temperatur die Energie E des Systems als unabhängige Variable, so ist nur statt $\mathfrak{A}(\alpha)$ jetzt $T[S(0) - S(\alpha)]$ zu setzen (S Entropie), indem nach der Thermodynamik $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\mathfrak{A} + T\,\mathrm{d}S = 0$ ist, da nur Zustände gleicher Gesamtenergie verglichen werden. Damit folgt aus (4)

$$\overline{\alpha^2} = -\frac{k}{\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=0}} \tag{6}$$

wieder mit der entsprechenden Deutung.

Wollen wir weiter statt der Schwankungen der Parameter α bei konstanter Energie E die Schwankungen der Energie ε bei konstanten Parametern bestimmen, so ist wegen des Verschwindens der äußeren Arbeit $\mathrm{d}E = T\,\mathrm{d}S$ und daher eine Energieänderung ε aus dem Gleichgewichtszustand ($E = E_0$) heraus eindeutig verknüpft mit einer zugehörigen Entropieänderung $S - S_0$. Die Wahrscheinlichkeit der Energieschwankung ε ist daher ebenso groß wie diejenige dafür, daß das System die Entropie S annimmt. Also kann man das Boltzmannsche Prinzip in seiner ursprünglichen Form $S = k \ln W + \text{const}$ anwenden und erhält daraus

$$W(\varepsilon) = \text{const}\, e^{\frac{S - S_0}{k}}.$$

Auch hier bedingt der sehr große Faktor $1/k$, daß $W(\varepsilon)$ nur für sehr kleine Werte von $S - S_0$ (< 0) und also auch ε merkliche Beträge haben kann. Daher kann man entwickeln

$$S - S_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{E=E_0} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}\right)_{E=E_0} \cdot \varepsilon^2 + \cdots,$$

wo das erste Glied rechts verschwindet, indem $E = E_0$ dem Gleichgewichtszustand (Entropiemaximum) entspricht. Also ist

$$W(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \text{const}\, e^{\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2k}} \cdot \mathrm{d}\varepsilon,$$

woraus auf demselben Weg wie früher bei $\alpha\left(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}\right.$ ist wesentlich negativ$\Big)$ sich die mittlere quadratische Abweichung ergibt

$$\overline{\varepsilon^2} = -\frac{k}{\left(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}\right)_{E=E_0}}. \tag{7}$$

Da nun allgemein bei konstanten Zustandsparametern nach der Thermodynamik $\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -1/T^2 \cdot C_\alpha$ (C_α Wärmekapazität des Systems) ist, so folgt

$$\overline{\varepsilon^2} = k T^2 \cdot C_\alpha. \tag{8}$$

Wegen $\varepsilon = C_\alpha \cdot \tau$ folgt hieraus für die Temperaturschwankungen τ:

$$\overline{\tau^2} = k T^2 / C_\alpha. \tag{9}$$

Die Formeln (8) und (9) sind schon aus der Literatur bekannt. Man findet sie und die Formeln für die Schwankungen der Dichte und des Druckes z. B. in den Zusammenstellungen von Fürth[1]).

Ist schließlich $\omega = \omega(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)$ eine beliebige von der Temperatur T und den Zustandsparametern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ abhängige Größe, so ist, da die Schwankungen dieser voneinander unabhängigen Zustandsvariablen unabhängig voneinander erfolgen, ihr mittleres Schwankungsquadrat wegen der Kleinheit der Schwankungen

$$\overline{(\Delta\omega)^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i}\right)_T^2 \cdot \overline{(\Delta \alpha_i)^2} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial T}\right)_{\alpha_i}^2 \cdot \overline{\tau^2}.$$

Nun ist nach (4) bei konstanter Temperatur $\overline{(\Delta\alpha_i)^2} = -kT \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_i}\right)_T$ und nach (9) bei konstanten Parametern $\overline{\tau^2} = k T^2 / C_{\alpha_i}$, also

$$\overline{(\Delta\omega)^2} = kT\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i}\right)_T^2 \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_i}\right)_T + \left(\frac{\partial \omega}{\partial T}\right)_{\alpha_i}^2 \cdot \frac{T}{C_{\alpha_i}}\right\}. \tag{10}$$

Setzen wir $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = \text{const}$, so folgt hieraus die Schwankung der zu α gehörigen allgemeinen Kraftkomponente $A = A(\alpha, T)$, indem wir $\omega = A$ setzen:

$$\overline{(\Delta A)^2} = kT\left\{-\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)_T + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_\alpha^2 \cdot \frac{T}{C_\alpha}\right\}, \tag{11}$$

woraus z. B. mit $A = p$ (Druck) und $\alpha = v$ (spez. Volumen), und also $C_\alpha = c_v$ = spez. Wärme sofort die aus der Literatur bekannte Formel für die Druckschwankung in der Masseneinheit folgt, ebenso aber auch mit $A = -H$ und $\alpha = \sigma$ eine Formel für die Schwankung der Oberflächenspannung H einer ebenen Flüssigkeitsschicht der Fläche σ usw.

[1]) R. Fürth, Schwankungserscheinungen in der Physik, Braunschweig 1920; R. Fürth, Phys. ZS. **20**, 350, 1919.

Die Formeln (4), (10), (11)[1], *in denen die Größen rechts sich natürlich sämtlich auf den Gleichgewichtszustand beziehen, stellen die eingangs gesuchte Übertragung der verallgemeinerten thermodynamischen Betrachtungsweise auf die Theorie der statistischen Schwankungen dar.* Meistens hat man nur einen Zustandsparameter[2] $\alpha = \alpha_1$, und bei bekannter „Zustandsgleichung" (im allgemeinen Sinne) $A = A(\alpha, T)$ des jeweils betrachteten Vorgangs erhält man aus (4) und (11) die Schwankungen des Zustandsparameters und der zugehörigen Kraftkomponente, aus (10) die Schwankung einer beliebigen durch den Zustand bestimmten Größe, z. B. der Energie (wenn auch α veränderlich ist), des Brechungsindex usw.

Für den speziellen thermodynamischen Fall im engeren Sinne, daß $A = p$ und $\alpha = v$ ist, hat bereits Lorentz[3] die Formel für das mittlere Schwankungsquadrat einer beliebigen vom Druck p und spez. Volumen v (bzw. Dichte) abhängigen Größe gegeben. Sie ist, wie es sein muß, als Spezialfall in (10) enthalten, denn hieraus folgt (bezogen auf die Masseneinheit):

$$(\Delta\omega)^2 = k\left\{-\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)_T^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \cdot T + \left(\frac{\partial\omega}{\partial T}\right)_v^2 \cdot \frac{T^2}{c_v}\right\}, \qquad (12)$$

wie Lorentz auf anderem Wege fand. (Bei uns wird mit $\alpha = v$ stets eine Masseneinheit Substanz zugrunde gelegt: betrachtet man mit $\alpha = dv = v \cdot dm$ eine Masse dm des Volumens dv, so erhalten die Schwankungsformeln rechts noch den Faktor v/dv, wie in der Literatur üblich). Spezialisierung des ω in (12) ergibt natürlich wieder die einzelnen in der Literatur angegebenen Schwankungsformeln der thermodynamischen Größen, u. a. diejenige für die Energie, wenn nicht nur die Temperatur, sondern auch die Dichte schwankt[4].

Es sollen nun die Schwankungen bei den von v. Laue und Justi[5] untersuchten „Phasengleichgewichten dritter Art" betrachtet werden. Diese Gleichgewichte sind dadurch gekennzeichnet, daß im Berührungspunkt der Phasen nicht nur (wie bei den sonstigen Phasengleichgewichten) Gleichheit der thermodynamischen Potentiale Φ ($\equiv E - TS + pv$) der beiden Phasen, sondern auch Gleichheit ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten (nach Druck und Temperatur genommen) vorhanden sein soll. Daraus folgt zunächst nach bekannten thermodynamischen

[1]) Natürlich prinzipiell (10) allein, da darin alle anderen Formeln enthalten sind. — [2]) Oder man betrachtet die Vorgänge bei Konstanz der sonstigen Parameter. — [3]) H. A. Lorentz, Les Theories statistiques en thermodynamique. Note add. V, p. 94, Leipzig 1916. — [4]) M. v. Laue, Phys. ZS. **18**, 542, 1917. — [5]) E. Justi u. M. v. Laue, Berliner Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. 1934, S. 237; E. Justi u. M. v. Laue, ZS. f. techn. Phys. **12**, 66, 1934.

Formeln — wie schon die erwähnten Autoren angeben — daß beide Phasen übereinstimmende Werte nicht nur des Druckes und der Temperatur, sondern auch des spez. Volumens, der spez. Entropie, der spez. Wärme, des Ausdehnungs- und Kompressibilitätskoeffizienten und damit auch des Spannungskoeffizienten und der spez. Energie haben. Aus unseren Formeln (4) und (11) mit $A = p$ und $\alpha = v$ folgt aber deshalb weiter, daß in beiden Phasen die Dichte und Druckschwankungen, und aus (10) mit $\omega = T$, daß auch die Temperaturschwankungen in ihnen gleich sind; weiter ergibt sich aus dieser Formel mit $\omega = E$ wegen $\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$ auch die Gleichheit der Energieschwankungen. Es sind also im Berührungspunkt der beiden Phasen nicht nur die sämtlichen thermischen Zustandsgrößen, sondern auch deren statistische Schwankungen gleich, so daß man es *im Berührungspunkt* mit einem einheitlichen System zu tun hat. Denselben Schluß kann man natürlich aus (10) oder (12) allein ziehen.

Wenn zwei koexistierende Phasen, die (anders als bei den eben betrachteten Gleichgewichten) *dieselbe* Zustandsgleichung haben, miteinander identisch werden, so ist das bekanntlich nur im „kritischen Punkt" möglich. Über die Schwankungen in ihm können aber unsere Entwicklungen, wie das Folgende zeigt, keine bestimmte Aussage geben. Denn aus seiner Definition folgen für ihn die bekannten Bedingungen $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$; mit der entsprechenden Spezialisierung $\alpha = \Delta v$ (Volumenschwankung) und $A = p$ (Druck) besagen sie wegen $p = -\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial v}\right)$, daß in der Entwicklung (3) nicht nur $\mathfrak{A}(0)$ und $\mathfrak{A}'(0)$, sondern auch $\mathfrak{A}''(0)$ und $\mathfrak{A}'''(0)$ verschwinden. Denkt man sich also das wesentlich positive $\mathfrak{A}$ als (symmetrische) Funktion von α aufgetragen, so schmiegt sich in diesem Falle die Kurve $\mathfrak{A}(\alpha)$ der α-Achse in $\alpha = 0$ außerordentlich stark an (Berührung dritter Ordnung, $\alpha = 0$ ist ein „Flachpunkt"). Infolge dieser innigen Berührung *können* nun — entgegen unseren bisherigen Voraussetzungen — die Volumenschwankungen $\alpha = \Delta v$ so groß sein[1]), daß eine Entwicklung von $\mathfrak{A}$ in der Form (3) auch unter Berücksichtigung höherer Potenzen nicht möglich ist, ohne daß deshalb die aus (2) fließende Folgerung, daß $\mathfrak{A}(\alpha)$ stets nur von der Größenordnung kT sein kann, verletzt wird. Solange man sich wie hier auf den allgemeinen Standpunkt stellt — d. h. $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\Delta v)$ oder die Zustandsgleichung im kritischen Punkt nicht kennt — ist also die Möglichkeit einer Entwicklung nach Potenzen von Δv, die hier jedenfalls erst mit

[1]) Die experimentellen Ergebnisse (Opaleszenzstrahlung) sprechen bekanntlich für große Dichteschwankungen im krit. Punkt.

dem Glied $-\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T (\Delta v)^4$ beginnen könnte, nicht gesichert, und man kann deshalb keine den Formeln (4) usw. entsprechende Formeln aufstellen. Nach Ornstein und Zernike[1]) ist eine solche Entwicklung sogar unmöglich, wenn man die tatsächlichen physikalischen Verhältnisse im kritischen Punkt (starke Anziehung und Schwarmbildung der Moleküle) berücksichtigt.

Unseren Betrachtungen ist — wegen ihrer großen Bedeutung — ausschließlich die klassische Boltzmann-Statistik zugrunde gelegt. Im nächstwichtigen Fall der Fermi-Statistik und *vollständiger* Entartung existieren keine Schwankungen, denn bei ihr — entsprechend ihrem Wesen — „ist für Wahrscheinlichkeit kein Raum" [Sommerfeld[2])].

Herrn Prof. v. Laue bin ich für Durchsicht des Manuskripts sehr dankbar.

---

[1]) L. S. Ornstein u. F. Zernike, Phys. ZS. **19**, 134, 1918. — [2]) A. Sommerfeld, ZS. f. Phys. **47**, 17, 1928; vgl. auch R. Fürth, ebenda **48**, 323, 1928.

Die Verteilungs- und Auslösekurven der Ultrastrahlungsstöße beim Übergang von Luft nach Blei, Eisen, Aluminium.

Von **Hans Schmid** in Freiburg i. Br.

Mit 16 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Januar 1941.)

Mit einer dünnwandigen Druckionisationskammer und einem Röhrenelektrometer wurden die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven für Stöße > 136000 EQ (etwa > 10 Korpuskeln entsprechend) für die Stoßstrahler Blei, Eisen und Aluminium aufgenommen. Für die Stoßauslösekurven von Fe und Al ergaben sich jeweils zwei Maxima; für diejenigen von Pb stellte sich in dem erfaßten Bereich nur ein Maximum heraus, jedoch deutet sich bei den größten erfaßten Stößen die Ausbildung eines zweiten Maximums an. (Lagen der Maxima: 2,25 cm Pb; 4,5 cm Fe; etwa 10 cm Fe; etwa 6,5 cm Al; etwa 35 cm Al). Das erste Maximum tritt besonders im Gebiet der kleinen Stöße hervor, das zweite im Gebiet der größeren. Eine kontinuierliche Verlagerung des Maximums in Abhängigkeit von der Stoßgröße ist nicht vorhanden. Eine Deutung wird mit der Überlagerung zweier Prozesse versucht. Der eine verursacht das erste Maximum und besteht in einer Multiplikation der Luftschauer, der zweite ist als eigentlicher Stoßprozeß anzusehen und ist wahrscheinlich durch Mesotronen hervorgerufen.

Problemstellung. Nach den neueren theoretischen Anschauungen läßt sich die Ausbildung der Ultrastrahlungsstöße (Hoffmannschen Stöße) durch drei verschiedene Prozesse erklären, nach welchen man sie als Kaskadenstöße, Bhabhasche Ionisationsstöße und Explosionsstöße bezeichnet. Von diesen fordert der Prozeß des Kaskadenbildung für die Stoßauslösekurve ein Maximum, dessen Lage von dem Auslösermaterial und von dem Stoßgrößenbereich abhängt. Es liegt, wenn man in der kaskadentheoretischen Längeneinheit, der sogenannten Strahlungseinheit, rechnet, für eine bestimmte Stoßgrößenklasse für alle Auslösermaterialien bei der gleichen Dicke und verschiebt sich mit zunehmender Stoßgröße kontinuierlich zu größeren Schichtdicken.

Experimentelle Untersuchungen zur Aufstellung der Stoßverteilungs- und Stoßauslösekurven wurden besonders von Nie (1), Boggild (2), Young (3) und Carmichael (4) für die Stoßstrahlermaterialien Blei, Eisen und Aluminium durchgeführt. Dabei zeigte die Stoßauslösekurve jeweils ein Maximum, dessen Lage von dem Panzermaterial und dem erfaßten Stoßgrößenbereich abhing. Besonders nach den Messungen von Boggield und Young veränderte sich für dasselbe Auslösermaterial die Form der Auslösekurve systematisch mit dem Stoßgrößenbereich, was sich

vor allem in einer kontinuierlichen Verschiebung des Maximums für größere Stöße zu größeren Auslöserdicken auszuprägen schien.

Trotz der Unsicherheit eines Vergleichs wurde das kaskadentheoretisch berechnete Maximum mit den in den erwähnten Arbeiten von Young, Boggild und Nie gefundenen Maxima identifiziert und mit der nur groben zahlenmäßigen Übereinstimmung die Kaskadennatur der Stöße beim Maximum argumentiert (5). Der Vergleich einer theoretisch berechneten Stoßgröße mit einer experimentell gemessenen bringt aber gewisse Unsicherheiten mit sich, einmal weil die zur Berechnung der Korpuskelzahl nötige Abhängigkeit der Stoßgröße vom Gasdruck noch nicht genügend bekannt ist, vor allem aber weil man den von der Kammer erfaßten Anteil des Stoßes dem ganzen Stoß gleichsetzt. Außerdem sind die erwähnten, experimentell gefundenen Werte unter so verschiedenartigen, nicht ineinander umrechenbaren Bedingungen ermittelt worden und besitzen so unterschiedliche Grade der Genauigkeit, daß zu einem Vergleich zwischen Theorie und Experiment Messungen unter denselben Bedingungen für alle Stoßgrößenbereiche wünschenswert schienen.

Die vorliegende Arbeit hatte deshalb folgende Ziele: 1. mit der gleichen Apparatur die Stoßgrößenverteilungs- und Stoßauslösekurven aus Blei, Eisen und Aluminium für einen möglichst großen Stoßgrößenbereich zu ermitteln und 2. durch Vergleich der Meßergebnisse mit der Theorie, besonders mit der Kaskadentheorie, Einblick zu gewinnen in die Bildungsprozesse der beobachteten Stöße und, wenn möglich, die strittigen Fragen über die Grenzen zwischen Schauer und Stoß zu klären.

Zu diesen Messungen wurde eine Spezialapparatur verwendet, die im wesentlichen aus einer dünnwandigen Druckionisationskammer mit Elektrometerröhre, Hochohmwiderstand und schnellschwingendem Galvanometer bestand[1]).

Orientierende Messungen. Im Hinblick auf die späteren Stoßregistrierungen wurden die Druckkurve und die Sättigungskurve aufgenommen und Messungen über die Ionenabscheidungszeit durchgeführt. Dies diente

1. zu einer günstigen Wahl von Gasdruck und Netzspannung für eine genügende Verstärkung bei genügend kurzer Ionenabscheidungszeit;

2. zu einer Abschätzung der Effekte, die, durch α-Teilchen und α-Teilchenkoinzidenzen des Restganges hervorgerufen, Stöße vortäuschen könnten und

[1]) Genaue Angaben über die Apparatur siehe Vorveröffentlichung: E. G. Steinke u. H. Schmid, ZS. f. Phys. **115**, 741, 1940.

3. zu einer Abschätzung des Sättigungsdefizits, dessen Kenntnis für die Berechnung der Stoßgröße aus der gemessenen Ionenmenge erforderlich war.

Dabei ergab sich bei Beschickung der Kammer mit Stickstoff der Dichte $\varrho = 9{,}61$ und einer beschleunigenden Spannung von 1350 Volt am Netz (Druck und Spannung bei den Stoßregistrierungen) gegenüber Normalluft ein Verstärkungsfaktor von 7,9[1]) für gefilterte Radiumstrahlung und damit auch für Ultrastrahlung. Dies entsprach einer Sättigung von 85%.

Messungen mit stoßweise einfallender Ra-γ-Strahlung zeigten, daß in der Galvanometereinstellzeit von 0,6 sec bei 1350 Volt und $\varrho = 9{,}61$ die in der Kammer gebildeten Ionen bis auf wenige Prozent abgeschieden wurden.

Zur Methodik der Stoßmessungen. Die Eichung der Apparatur auf Ladung wurde mit Hilfe eines Influenzierungskondensators (0,909 $\mu\mu$F) und bekannter Spannung ausgeführt[2]).

Die Ausmessung der Stöße auf den Stoßregistrierungen erfolgte mit einer Visolettlupe mit aufgelegter Halbmillimeterskala in Intervallen von 0,5 mm[3]).

Die graphischen Darstellungen und Tabellen enthalten jedoch die Stöße nicht in dieser Feinunterteilung, sondern es wurden wegen der Übersichtlichkeit durch Zusammenfassung Stoßgrößenbereiche gebildet. Die Grenze der Erkennbarkeit der kleinen Stöße ist hauptsächlich durch die statistische Schwankung der Ultrastrahlungsintensität bedingt. Eine Ultrastrahlungsintensität von $2\,I$ entspricht einem Durchgang von $\frac{2 \cdot 20000 \cdot 7{,}9 \cdot 0{,}6}{14200} = 13{,}3$ Korpuskeln durch das Meßvolumen pro 0,6 sec (0,6 sec = Einstellzeit bzw. Ionenabscheidungszeit; 20000 cm³ = Meßvolumen; 7,9 = Verstärkungsfaktor; 14200 = Ionenmenge/Korpuskel. Die doppelte statistische Schwankung = doppelte Quadratwurzel für diese Zeit beträgt demnach etwa 7 Korpuskeln oder 100000 Ionenpaare. Dazu addiert sich noch die Schwankung des Restganges und der Umgebungs-

[1]) Nach genaueren Abschätzungen muß der in ZS. f. Phys. **115**, 741, 1940 angegebene Wert von 7,7 auf 7,9 geändert werden. — [2]) Da Laufzeit der Ionen und Einstellzeit des Galvanometers bereits vergleichbar sind, beträgt die zur Wirksamkeit kommende Ionenmenge nur noch etwa 90% der gebildeten. Im Gegensatz zu den plötzlichen Eichungen durch Influenzierung sind deshalb die gemessenen Ladungsmengen der Stöße um etwa 10% zu erhöhen. Hiervon wurde in dieser Arbeit zunächst Abstand genommen. — [3]) Beispiele von Stoßregistrierungen siehe ZS. f. Phys. **115**, 742, 1940.

strahlung, jedoch sind diese wesentlich kleiner (6). Bei gepanzerter Kammer ist infolge der geringeren Intensität auch die Intensitätsschwankung geringer.

Aus dieser Schwankungsabschätzung heraus wurden alle Registrierungen nur bis $^4/_2$ mm = 136000 Ionenpaare herunter ausgewertet. Es war bis zu dieser Grenze ein Unterschied zwischen den Stoßausschlägen, die nur nach einer Richtung gingen, und etwa gleich großen, nach beiden Richtungen vorkommenden Schwankungsausschlägen zu erkennen. Diese Unterschiede wurden geringer, je dünner der verwendete Panzer, d. h. je größer die einfallende Ultrastrahlungsintensität war.

Als Meßunsicherheit wurde in den folgenden Kurven jeweils die doppelte statistische Schwankung aus der Anzahl a der ausgemessenen Stöße eingezeichnet.

Die kleinen Stöße, die sehr viel häufiger sind als die großen, wurden nicht über die ganzen Filme, sondern nur über Stücke, verteilt über die Registrierzeit, ausgemessen. Dies erfolgte so weit, bis die statistische Schwankung nur noch wenige Prozent betrug, weil die weniger kontrollierbaren Fehler sicher mindestens von dieser Größe waren.

Die größte Unsicherheit haben wohl die Angaben über die Korpuskelzahl eines Stoßes. Das ist der Hauptgrund für die Schwierigkeit, Ergebnisse über Stoßmessungen, die mit verschiedenen Apparaturen gewonnen wurden, miteinander oder mit theoretisch berechneten Stoßgrößen zu vergleichen. Die hier aufgeführten Angaben über Stoßkorpuskelzahlen enthalten folgende vereinfachende und zum Teil der Wirklichkeit nicht ganz entsprechende Voraussetzungen:

1. Die Kammer erfaßt nicht nur einen Teil, sondern alle Korpuskeln der Stöße.

2. Die spezifische Ionisation beträgt im Mittel für alle Teilchen 50 Ionenpaare/cm LÄ. (7).

3. Die mittlere Weglänge einer Korpuskel in der Kammer ist gleich der Höhe des Meßvolumens. (Bei der verwendeten Ionisationskammer 36 cm.)

4. Die Druckabhängigkeit der von einem Stoß erzeugten Ionenmenge ist die gleiche wie die der normalen Ultrastrahlung. (Für die Stoßmessungen wird also ebenfalls mit einem Verstärkungsfaktor von 7,9 gerechnet.)

Nach diesen Voraussetzungen bildet jede durch die Kammer gehende Korpuskel im Mittel $36 \cdot 7{,}9 \cdot 50 = 14200$ Ionenpaare. Die Figuren ent-

halten als Stoßgrößenangaben meistens die direkt gemessene Ionenmenge, sonst die mit Hilfe dieses Faktors berechneten Korpuskelzahlen.

Vortäuschungen von Stößen durch α-Teilchen und α-Teilchenkoinzidenzen können in den vorliegenden Stoßauslösekurven nur geringfügige Fehler verursachen. Aus der Annahme, daß bei der angegebenen Dichte und Feldstärke die durch die α-Teilchen hervorgerufene Ionisation im Mittel 50000 Ionen (8) nicht übersteigt und daß der α-Teilchenanteil oberhalb eines bestimmten Druckes konstant bleibt, ließ sich aus der Druckkurve des Restganges die Zahl der α-Teilchen zu etwa 1600/Stunde berechnen. Da die kleinste ausgemessene Stoßgröße 136000 Ionenpaare betrug, ist zu einer Stoßvortäuschung mindestens eine dreifache α-Teilchenkoinzidenz innerhalb 0,6 sec nötig. Danach wäre pro Stunde mit etwa vier Stoßvortäuschungen zu rechnen.

β- und γ-Strahlung zeigen wesentlich geringere Schwankung als die Ultrastrahlung. Deshalb können hiervon keine Fehler herrühren.

Für die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven wurde meist die integrale Darstellung gewählt. Als Ordinate ist dabei die Häufigkeit aller Stöße größer als eine Stoßgröße G aufgetragen, bei den ersteren als Funktion der Stoßgröße G, bei den letzteren als Funktion der Panzerdicke.

Die Neigungsangaben der Stoßverteilungskurven stützen sich jeweils auf das mittlere Kurvenstück. Bei den meisten der folgenden Kurven ist ein mittleres längeres Kurvenstück vorhanden, das in erster Näherung geradlinig verläuft.

Die Stoßverteilung des Nullganges. Der Nullgang wurde als einzige Stoßmessung außer an der sonst üblichen Stelle im Dachgeschoß zunächst in einem Zimmer im ersten Stockwerk des Instituts aufgenommen.

Die integrale Stoßverteilungskurve (Fig. 1) ergab sich in ihrem mittleren Teil in erster Näherung als eine Gerade mit der Neigung 3,3. Für die kleinen Stöße biegt die Kurve nach unten und für die größeren Stöße etwas nach oben von der Geraden ab. Die Stoßhäufigkeit mit 151 Stößen/Stunde schien sehr groß zu sein. Für die Untersuchungen der Stoßhäufigkeit und Stoßgrößenveränderung durch Panzermaterial und Panzerdicke wäre das Vorhandensein eines möglichst kleinen Nullganges wünschenswert, damit die bei Anwendung eines Panzers auftretenden Stöße mit Sicherheit der Auslösung im Panzer hätten zugeschrieben werden können. Allein die Kenntnis der Größe des Nullganges genügt nicht, um ihn aus den Ergebnissen über Stoßauslöseeffekte zu eliminieren, da er sich im Panzer verändert, indem

1. er teilweise absorbiert wird,

2. seine Stöße als solche erhalten und im Panzer verändert werden,

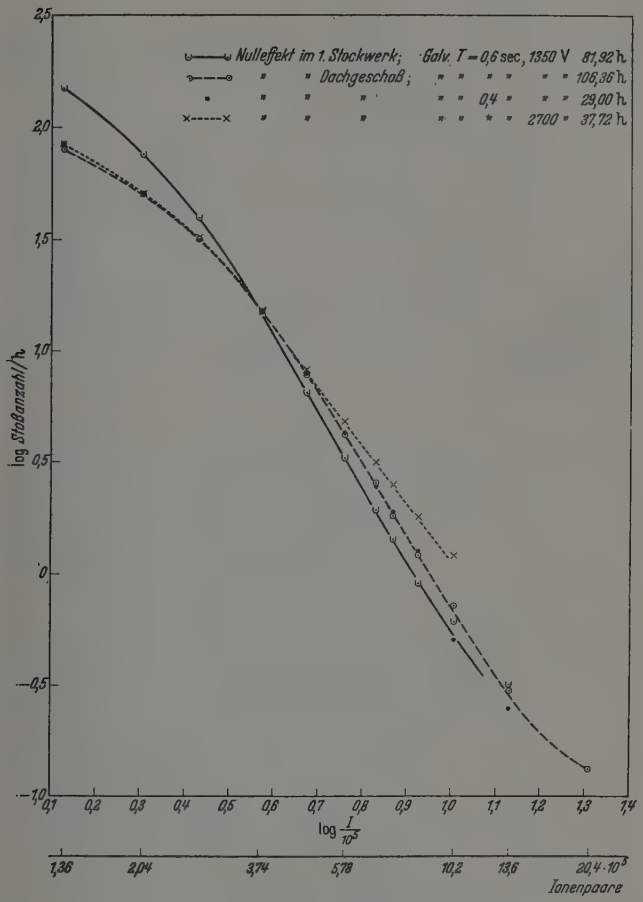


Fig. 1. Integrale Stoßverteilung des Nullganges.

3. seine Einzelkorpuskeln im Panzer Stöße auslösen und diese Effekte sich in nicht quantitativ erfaßbarer Weise mit den eigentlichen Stoßauslösevorgängen vermischen.

Aus diesem Grunde wurden alle folgenden Stoßverteilungs- und Stoßauslösekurven in einem unter dem Glasdach des Instituts befindlichen, aus Pappe gebauten Meßraum aufgenommen.

Wider Erwarten war, obwohl sich kein schweres Material über oder seitlich der Kammer befand, auch hier der Nullgang sehr groß, sogar bei den großen Stößen etwas größer als im ersten Meßraum (ebenfalls in Fig. 1). Dies ist wohl durch die Absorption zu erklären, die die Stoßkorpuskeln beim Durchgang durch die Decke des ersten Stockwerkes erfahren. Die kleinen Stöße dagegen entsprachen der Erwartung und waren unter dem Dach erheblich seltener. Dies zeigt für die ersten Stoßgrößenklassen folgende Tabelle (differentiell):

Stoßgrößenklasse in 10^5 EQ	1,36—2,04	2,04—2,72	2,72—3,74	3,74—4,76
Stöße/h · 34000 EQ im 1. Stockwerk	37,0	18,8	8,22	2,81
Stöße/h · 34000 EQ unter dem Dach....	14,6	9,50	5,48	2,24

Ein großer Teil der kleinen Stöße war also bei der ersten Aufstellung der Apparatur in der Decke und den Wänden des Zimmers entstanden. Die Neigung des geradlinigen Teiles bei der zweiten Kammeraufstellung beträgt 3,2, also fast übereinstimmend mit der im 1. Stockwerk gefundenen, so daß in diesem Bereich durch die Zimmerwände die Stoßgrößenverteilung nicht wesentlich geändert worden war. Für die großen Stöße biegt die Kurve ebenfalls etwas nach kleinerer Neigung um, jedoch war die Zahl der gemessenen großen Stöße noch zu gering, um dieses Abbiegen sicherzustellen. Das Abbiegen bei kleinen Stößen trat bei allen folgenden Stoßverteilungskurven auf, jedoch beim Nulleffekt ist es besonders stark. Es ist wohl ausgeschlossen, daß die Nullgangskurve mit der Neigung 3,2 bis zu den kleinsten Stößen weiterläuft, denn dies würde, bis zu der in allen folgenden Kurven kleinsten Stoßgröße von $1{,}36 \cdot 10^5$ EQ gerechnet, eine Häufigkeit von 425 Stößen/Stunde ergeben im Gegensatz zu den gemessenen 80 Stößen pro Stunde. Es erscheint unmöglich, daß so viele Stöße infolge mangelnder Erkennbarkeit verlorengegangen sein sollten.

Ebenso zeigt die Berechnung der durch die Stöße bewirkten Ionisation, daß die Nulleffektskurve bei kleinen Stößen abbiegen muß[1]).

[1]) Nimmt man die Stoßverteilungsfunktion über den ganzen Bereich von 1 Korpuskel = 14200 Ionenpaare bis ∞ an in der Form $H = A \cdot G^{-3{,}23}$ und ermittelt den Faktor A aus einem gemessenen, auf dem geradlinigen Teil der

Trotzdem bleibt die Frage, ob nicht ein Teil des Abbiegens durch mangelndes Erfassen vorgetäuscht ist. Es ist bei den mit Panzern aufgenommenen Kurven auffallend, daß mit abnehmender Panzerdicke die Kurven im allgemeinen stärker abbiegen. Dies läßt vermuten, daß immer mehr kleine Stöße von den Schwankungen nicht mehr unterschieden werden, je größer die Strahlungsintensität und damit die Intensitätsschwankung ist.

Diese Vermutung sollte experimentell geprüft werden. Die Verluste von Stößen müßten nämlich bei geringerer mittlerer Intensitätsschwankung kleiner sein. Diese kann verringert werden durch Verkürzung der Galvanometereinstellzeit bzw. der Ionenabscheidungszeit. Es wurde deshalb eine Nullgangsregistrierung mit einem Galvanometer von $T/2 = 0{,}2$ sec aufgenommen. Die Netzspannung war die gleiche, und ebenso wurde die Empfindlichkeit auf den gleichen Wert gebracht. Überraschenderweise deckte sich die erhaltene Kurve (ebenfalls in Fig. 1) sehr genau mit der schon vorhandenen. Ein weiterer Versuch, bei welchem außerdem noch die Netzspannung verdoppelt wurde, ergab für die kleinen Stöße auch nur geringfügige Abweichungen[1]) (ebenfalls in Fig. 1).

Die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven für Deckenpanzer aus Blei. Bei den Registrierungen mit gepanzerter Kammer wurden zur Orientierung zunächst Deckenpanzer aus Blei verwendet.

Die erhaltenen Stoßverteilungskurven verlaufen flacher als der Nulleffekt und haben die Neigungen

cm Pb....	0	2	5	10	20
tg α	$3{,}2_3$	$2{,}7_2$	$2{,}3_9$	$2{,}4_8$	$2{,}4_7$

Auch das Abbiegen bei kleineren Stößen ist schwächer. Die 2 cm-Pb-Deckenkurve zeigt über den ganzen erfaßten Stoßgrößenbereich die größte Häufigkeit mit dem etwa dreifachen Wert des Nulleffektes.

Kurve liegenden Punkt (z. B. aus $H = 1{,}815$ Stöße/Std. und $G = 748000$ EQ), so erhält man die gesamte

$$\frac{\text{Ionisation durch Stöße}}{\text{Stunde} \cdot \text{Meßvolumen}} = \int_{14200}^{\infty} G \cdot \mathrm{d}H = \int_{14200}^{\infty} G \cdot A \cdot 3{,}23 \cdot G^{-4{,}23}\,\mathrm{d}G$$

$$= 1{,}36 \cdot 10^{10} \frac{\text{Ionenpaare}}{\text{Stunde} \cdot \text{Meßvolumen}} = 24\,I.$$

Da dieser Betrag wesentlich größer ist als die bekannte Gesamtionisation durch Ultrastrahlung (2 I), kann die logarithmische Stoßverteilungskurve nicht bis zu den kleinsten Stößen geradlinig verlaufen, sondern muß zu geringerer Neigung abbiegen.

[1]) Differentiell aufgetragen ergibt sich bei den kleinsten Stößen fast völlige Übereinstimmung. Die Unterschiede in der integralen Darstellung rühren von Differenzen bei den großen Stößen her.

Die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven aus allseitigen Bleipanzern. Um die direkte seitliche Einstrahlung des Nullganges zu verhindern, wurden zur Aufnahme aller folgenden Kurven allseitige Panzer verwendet.

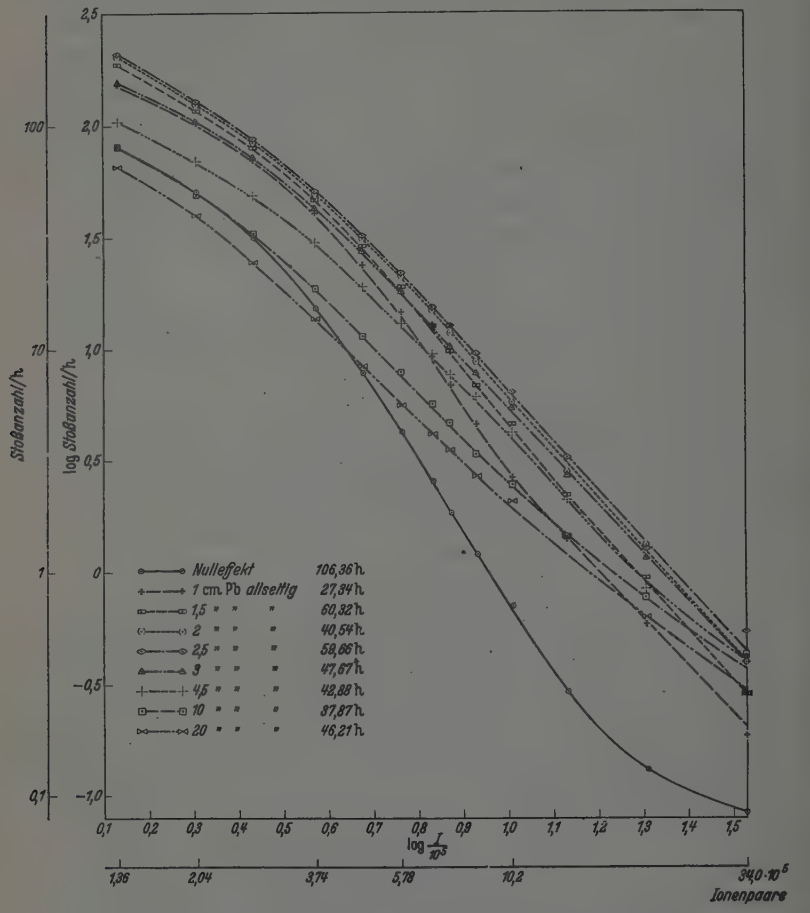


Fig. 2. Integrale Stoßverteilungskurven beim Übergang von Luft nach Blei.

Die integralen Stoßverteilungskurven (Fig. 2) für Pb-Vollpanzer ergaben eine weitere beträchtliche Vergrößerung der Stoßhäufigkeit beim Übergang von Deckenpanzern zu allseitigen Panzern. Die Stoßverteilungskurven lassen sich sauber voneiander trennen. In ihrem mittleren Teile

verlaufen sie ziemlich geradlinig und zeigen für die kleinen und auch teilweise für die großen Stöße die besprochenen Abbiegungen. Die Neigungen der geradlinigen Teile sind verschieden und werden mit zunehmender

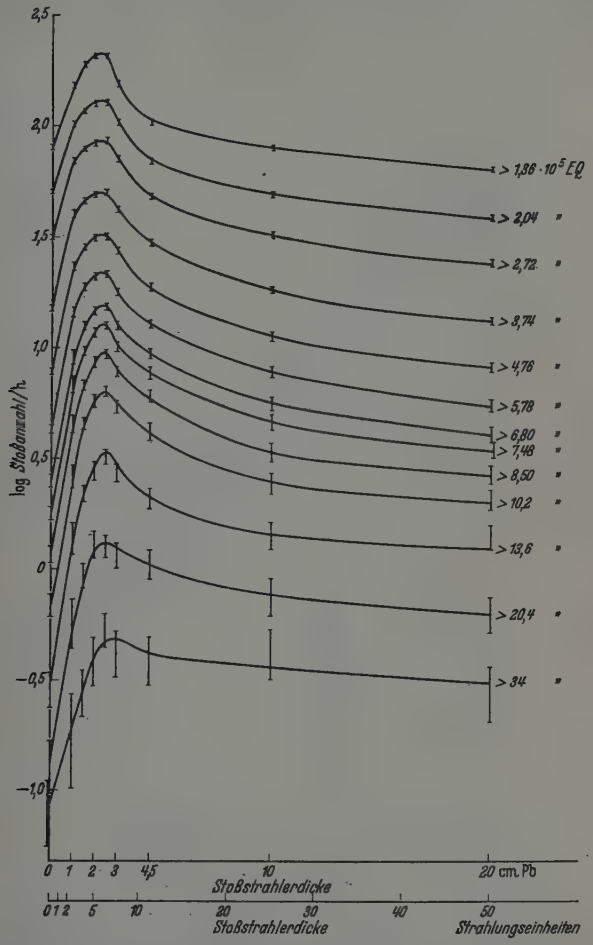


Fig. 3. Integrale Stoßauslösekurven beim Übergang von Luft nach Blei.

Panzerdicke systematisch kleiner. Die größte Neigung hat der Nulleffekt mit $3{,}2_3$, die kleinste ergab sich für 20 cm-Pb-Vollpanzer zu $1{,}9_6$.

cm Pb....	0	1	1,5	2	2,5	3	4,5	10	20
tg α	$3{,}2_3$	$2{,}9_7$	$2{,}4_3$	$2{,}2_4$	$2{,}2_1$	$2{,}1_5$	$2{,}1_9$	$2{,}0_6$	$1{,}9_6$

Die außerordentlich starke Neigungsänderung bei geringen Schichtdicken im Vergleich zu den größeren scheint einen Vorgang anzuzeigen, der schon nach den ersten Zentimetern Pb abgeklungen ist, dagegen in diesen ersten Zentimetern die Stoßverteilung wesentlich bestimmt. Der annähernd

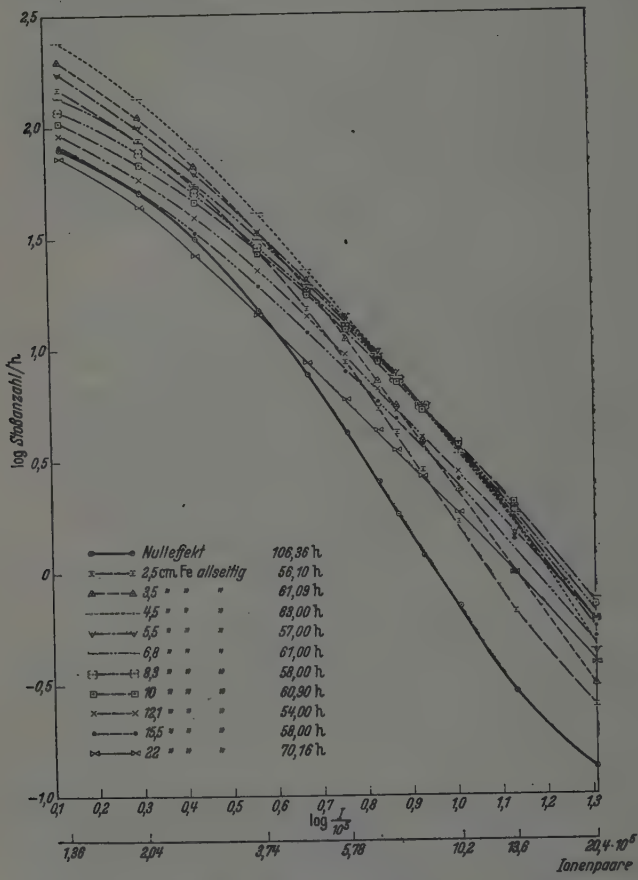


Fig. 4. Integrale Stoßverteilungskurven beim Übergang von Luft nach Eisen.

parallele Verlauf der 1 cm-Pb-Kurve mit der Nulleffektskurve läßt vermuten, daß dieser Vorgang eine Multiplikation des Nullganges in den ersten Bleischichten ist. Das schon bei den Bleideckenpanzern aufgetretene Maximum tritt bei Bleivollpanzern noch deutlicher hervor (Fig. 3). Für

den größten Teil des erfaßten Stoßgrößenbereiches liegt es bei der gleichen Bleidicke, nämlich bei 2,25 cm Pb. Für die größten Stöße scheint das Maximum bei etwas größerer Dicke zu liegen. Da mit zunehmender Stoßgröße die Häufigkeit für größere Dicken im Vergleich zum Nulleffekt stark zu-

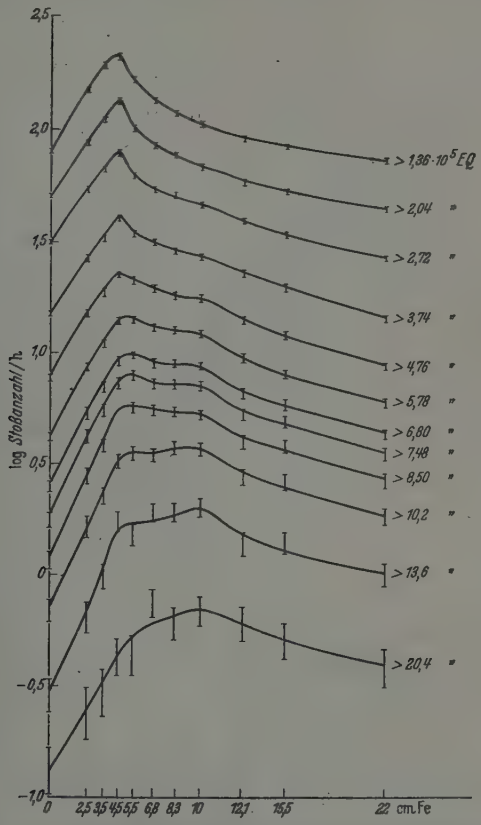


Fig. 5. Integrale Stoßauslösekurven beim Übergang von Luft nach Eisen.

nimmt, und da für die größten Stöße die Meßgenauigkeit der Häufigkeiten geringer ist, ist die Verlagerung des Maximums nicht gesichert, sondern sie kann durch die Änderung des Intensitätsverhältnisses zweier verschiedenartiger stoßbildender Vorgänge in Verbindung mit Meßunsicherheit vorgetäuscht sein.

Die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven für allseitige Eisenpanzer. Die Stoßverteilungskurven für allseitige Eisenpanzer (Fig. 4) zeigen einen ähnlichen Verlauf wie die Stoßverteilungskurven für Blei.

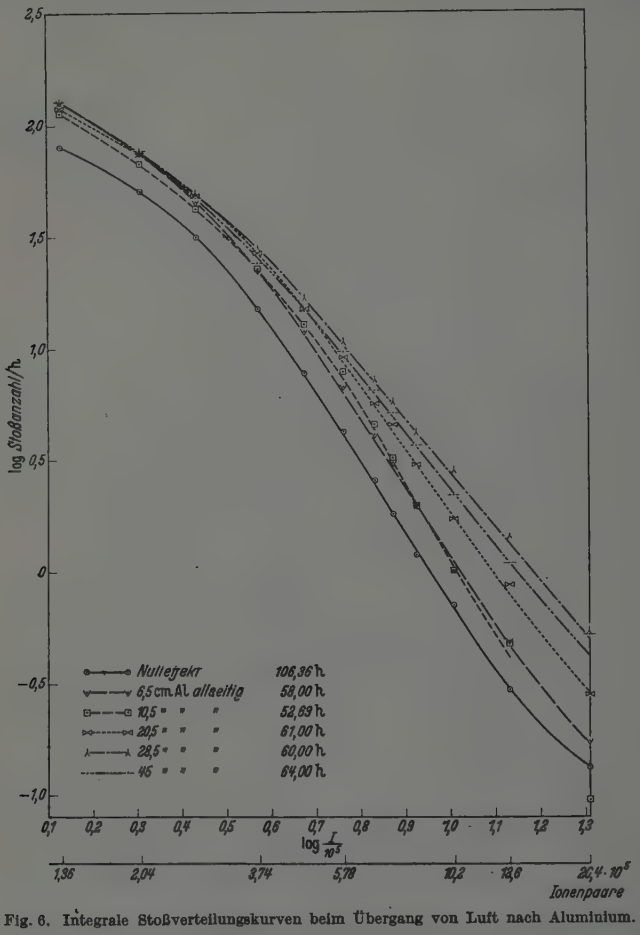


Fig. 6. Integrale Stoßverteilungskurven beim Übergang von Luft nach Aluminium.

Die Neigungen nehmen nach folgender Tabelle mit zunehmender Panzerdicke wieder kontinuierlich ab:

cm Fe...	0	2,5	3,5	4,5	5,5	6,8	8,3	10	12,1	15,5	22
tg α.....	$3{,}2_3$	$3{,}0_6$	$2{,}8_3$	$2{,}5_1$	$2{,}4_0$	$2{,}3_0$	$2{,}2_7$	$2{,}1_0$	$2{,}1_6$	$2{,}0_8$	$2{,}0_4$

Entsprechend den Ergebnissen aus Blei verläuft die Kurve für die geringste Dicke (2,5 cm Fe) der Nullgangskurve weitgehend parallel und biegt bei größeren Stößen zu geringerer Neigung um[1]). Das erstere, wenn auch weniger ausgeprägt, zeigt auch die 3,5 cm-Kurve. Die Stoßauslösekurven (Fig. 5) für Eisen besitzen deutlich zwei Maxima, das eine liegt bei 4,5 cm, das zweite bei etwa 10 cm. Beide Maxima bleiben an der gleichen Stelle liegen. Das erstere, das bei kleinen Stößen sehr stark hervortritt, verschwindet mit zunehmender Stoßgröße mehr und mehr, während das zweite erst bei mittleren Stoßgrößen in Erscheinung tritt und sich mit zunehmender Stoßgröße immer stärker ausbildet. Die Überlagerung zweier stoßbildender Prozesse, die sich beim Blei nur angedeutet hat, prägt sich beim Eisen schon in der Mitte des erfaßten Stoßgrößenbereiches deutlich aus.

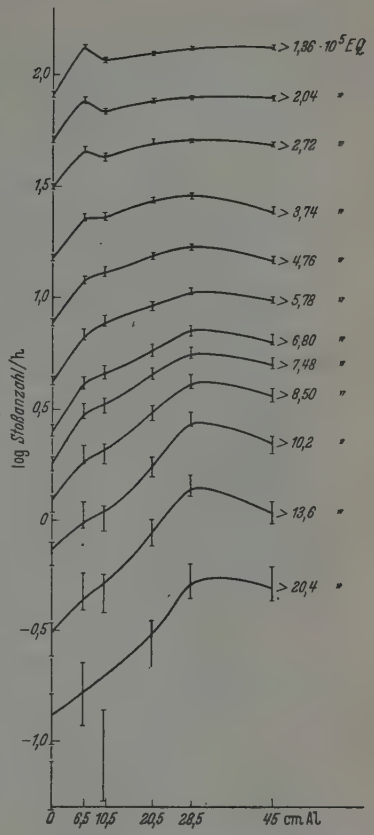


Fig. 7. Integrale Stoßauslösekurven beim Übergang von Luft nach Aluminium.

Die Stoßverteilungskurven und Stoßauslösekurven für allseitige Aluminiumpanzer. Fig. 6 und die hier folgende Tabelle geben die Stoßverteilungskurven für Aluminiumvollpanzer und deren Neigungen wieder.

cm Al.....	0	6,5	10,5	20,5	28,5	45
tg α.....	$3{,}2_3$	$3{,}0_6$		$2{,}8_0$	$2{,}4_0$	$2{,}5_1$

[1]) Während diese Messungen im Gange waren, wurde mir die Arbeit von C. G. Montgomery und D. D. Montgomery (13) bekannt, die mit einer 15 Liter fassenden Kammer von 2,5 cm Fe Wandstärke den „Nullgang" aufgenommen und dabei einen im wesentlichen geradlinigen Verlauf bis zu kleinsten Stößen von etwa 10 Korpuskeln gefunden haben. Es ist mir zunächst mangels näherer Angaben unmöglich, diese Unterschiede des Kurvenverlaufs zu erklären.

(Die Neigungsangabe für 10,5 cm Al fehlt, weil das mittlere Kurvenstück nicht genügend geradlinig ist.) Aus den Stoßauslösekurven von Fig. 7 sind wieder zwei Maxima zu erkennen, die, soweit die Meßunsicherheit ent-

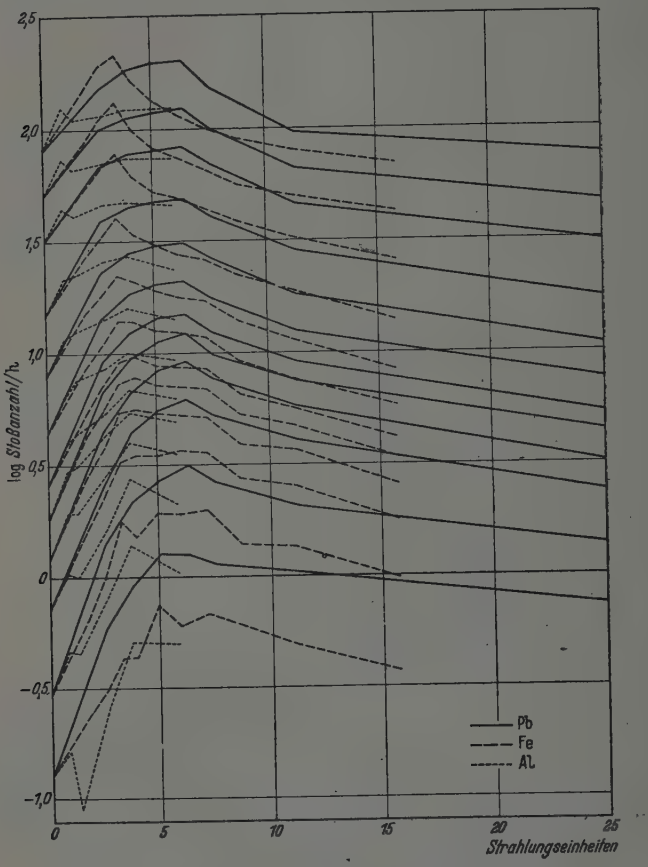


Fig. 8. Integrale Stoßauslösekurven für Pb, Fe, Al. Stoßstrahlerdicke in Strahlungseinheiten.

scheiden läßt, für alle Stoßgrößen an der gleichen Stelle liegen. Das erste liegt bei etwa 6,5 cm Al, das zweite bei etwa 35 cm. Mit zunehmender Stoßgröße verschwindet das erste Maximum allmählich und das zweite tritt mehr und mehr hervor.

Zum Vergleich der Auslösekurven für Pb, Fe und Al miteinander wurden die Abszissenmaßstäbe in Fig. 3, 5, 7 massenproportional gewählt und in Fig. 8 wurden die Auslösekurven der drei Materialien gemeinsam gezeichnet (außer der 13. Kurve von Fig. 3), wobei auf der Abszissenachse die Stoßstrahlerdicke in Strahlungseinheiten (bis 25 Str.E.) aufgetragen ist (0,4 cm Pb = 1,4 cm Fe = 7,8 cm Al).

Es ist aus Fig. 8 deutlich ersichtlich, daß die aufsteigenden Äste bis zur Maximumsdicke des Al weitgehend zusammenfallen[1]), während sie von dort ab divergieren.

In Fig. 9 ist für Pb, Fe und Al die Abhängigkeit der Neigungen der Stoßverteilungskurven von der Panzerdicke dargestellt. Trägt man die Panzerdicke in Strahlungseinheiten auf, so fallen die Punkte für Pb, Fe und Al bis zu etwa 5 Strahlungseinheiten annähernd auf eine gemeinsame steil abfallende Kurve. Von dort ab verläuft die Kurve wesentlich flacher.

In allen drei untersuchten Materialien scheinen sich die beiden gleichen Vorgänge zu überlagern, die sich in Eisen und Aluminium durch die beiden Maxima deutlich ausprägen, in Blei weniger deutlich, vermutlich weil dort das zweite sich ausbildende Maximum nahe beim ersten liegt und weil wegen der noch zu kurzen Registrierzeit die Auslösekurven nicht noch für größere Stöße haben gewonnen werden können.

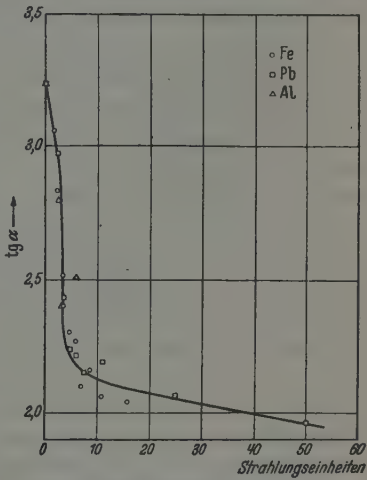


Fig. 9. Abhängigkeit der Neigung der Stoßverteilungskurve von der Panzerdicke.

Diskussion.

Vergleich der Ergebnisse mit den Messungen anderer Autoren. Mit den Nieschen Messungen (1) hat die vorliegende Arbeit, die bis zu Stößen von

[1]) Da nach Bhabha die Strahlungseinheit $X_0 \sim \text{const} \cdot \frac{A}{\varrho} \cdot \frac{1}{Z^2}$, so entspricht die Gemeinsamkeit dieses Anstiegs dem von Nie (1) angegebenen, als vom Material unabhängig gefundenen Wert σ/Z^2.

etwa 145 Korpuskeln[1]) reicht, nur einen kleinen Teil des Meßbereichs gemeinsam. In diesem sind die Nieschen Messungen teilweise unsicher, weil dort bei 1,5 Me die Grenze der sicheren Erkennbarkeit der Stöße schon überschritten ist; die Unsicherheit der vorliegenden Messungen in diesem Gebiet liegt in der noch nicht genügend langen Registrierzeit.

Die Nieschen Stoßauslösekurven haben Maxima bei 4,5 cm Pb, 10 bis 15 cm Fe und $>$ 50 cm Al. Die vorliegenden Messungen haben mit ihnen das Fe-Maximum gemeinsam. Das Maximum bei 4,5 cm Pb hat sich dagegen nicht ergeben, jedoch ist es sehr wohl möglich, daß die erwähnte starke Häufigkeitszunahme der großen Stöße bei größeren Pb-Dicken gegenüber dem Nullgang bei weiterer Ausdehnung des Stoßgrößenbereiches sich zu einem Maximum gestaltet, das mit dem Nieschen übereinstimmen kann. Die Angaben über die Lage des Maximums bei Al sind, wenn man die große Breite dieses Maximums und die großen Meßunsicherheiten beider Arbeiten dafür berücksichtigt, wohl nicht widersprechend.

Die in den vorliegenden Untersuchungen gefundenen ersten Maxima (2,25 cm Pb; 4,5 cm Fe; etwa 6 cm Al) haben sich bei den Nieschen Messungen nicht ergeben. Der Grund dafür liegt wohl darin, daß sie nur bei kleinen Stößen vorhanden sind und in dem von Nie erfaßten Bereich nicht mehr in Erscheinung treten.

Nie betont ausdrücklich, daß sich die von ihm gefundenen Maxima mit sich ändernder Stoßgröße nicht verlagern, sondern für alle Stoßgrößen bei der gleichen Schichtdicke liegen.

Die Messungen von Boggild (2) über die Stoßauslösekurven aus Blei und Eisen haben mit den vorliegenden einen Teil des Meßbereichs gemeinsam.

In der Boggildschen Stoßauslösekurve für Blei liegt das Maximum bei etwa 2,3 cm, also recht genau an der gleichen Stelle wie das hier gefundene. Jedoch ist bei ihm die Meßunsicherheit der Punkte dieser Kurve sehr groß. Die Boggildsche Stoßauslösekurve für Blei entspricht ungefähr der achten der hier angegebenen Pb-Stoßauslösekurven (Fig. 3)[2]). In Fig. 10a ist

[1]) Die Korpuskelzahlenangaben anderer Autoren wurden hier einheitlich auf die spezifische Ionisation von 50 Ionenpaare/cm umgerechnet.

[2]) Mit Volumenverhältnis umgerechnet: Bei Boggild

$$81\ \text{Korp.} \rightarrow \frac{20\ \text{Liter}}{30\ \text{Liter}} \cdot 81 = 54\ \text{Korp.} = 8.\ \text{Kurve}.$$

Durch die volumenproportionale Umrechnung ist versucht, die mit den verschiedenen Apparaturen gewonnenen Kurven einander so zuzuordnen, daß sie nicht zu Stößen gleicher erfaßter, sondern möglichst zu Stößen gleicher Gesamt-Korpuskelzahl gehören. Die Umrechnung gilt allerdings nur für den

die Boggildsche Pb-Kurve in den Maßstab der Auslösekurven dieser Arbeit zusammen mit der achten der von mir aufgenommenen Pb-Deckenkurven (nicht angeführt) gezeichnet. Die Lage der Maxima und der Abfall der beiden Kurven stimmen ungefähr überein; der Anstieg der Boggildschen Kurve

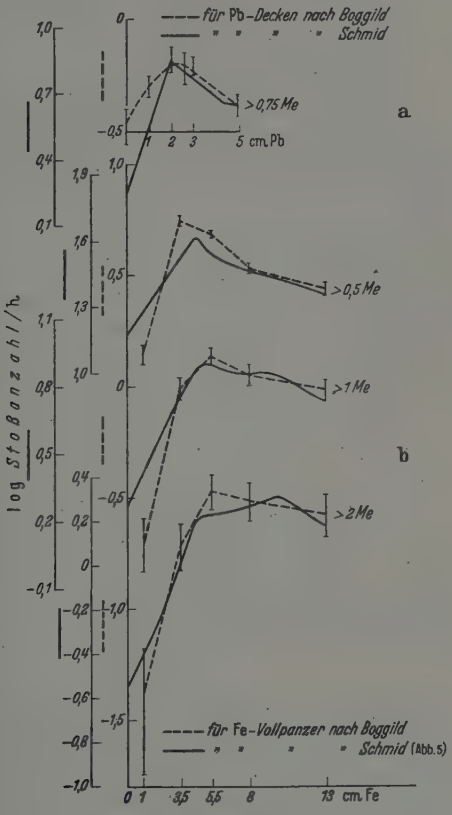


Fig. 10. Integrale Stoßauslösekurven nach Boggild.

vom Nulleffekt bis zum Maxima dagegen ist wesentlich flacher. Dies ist jedoch nach anderen Messungen von Boggild (Fe-Kurven) durch die Aufstellung der Apparatur im Keller zu erklären.

Fall, daß das Stoßzentrum relativ weit von der Kammer entfernt ist und die Kammer deshalb nur einen Teil der gesamten Garbe erfaßt.

Die Boggildschen Stoßauslösekurven für Fe (allseitige Eisenpanzer) unterscheiden sich von den Fe-Vollpanzerkurven der Fig. 5 vor allem dadurch, daß bei ihnen das Maximum für die verschiedenen Stoßgrößen bei verschiedenen Schichtdicken eingezeichnet ist. Sie sind bei Boggild differentiell aufgetragen. Zum Vergleich mit den hier aufgenommenen

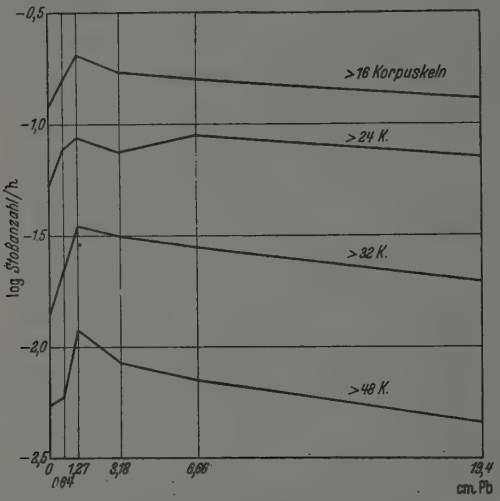


Fig. 11. Integrale Auslösekurven für Pb von Young (aufgenommen in Meereshöhe, Cambridge).

wurden die Boggildschen Fe-Kurven mit ihrer Unsicherheit in Fig. 10b integral und zusammen mit den entsprechenden Kurven der Fig. 5 gezeichnet.

Die letzte seiner drei Kurven (Stöße > 2 Me) entspricht in bezug auf die Stoßgröße etwa der elften Fe-Kurve[1]). Sie hat wie diese recht große Meßunsicherheit, so daß das von Boggild in seine Kurven eingezeichnete Maximum bei 7 cm willkürlich gelegt ist und eine Unsicherheit von einigen Zentimetern hat. Auf keinen Fall kann sie zur Begründung einer Maximumsverlagerung für größere Stöße zu größeren Schichten benutzt werden. Aber auch seine zweite und erste Kurve, die nach ihrer kleinsten Stoßgröße der achten bzw. vierten Fe-Kurve zu vergleichen wären, sind keine Argu-

[1]) Boggilds 3. Kurve: $>$ 154 Korp. $\rightarrow 154 \cdot 20/30 = 102$ Korp. = 11. Kurve,
„ 2. „ $>$ 77 „ $\rightarrow 77 \cdot 20/30 = 51$ „ = 8. „ „
„ 1. „ $>$ 38,5 „ $\rightarrow 38{,}5 \cdot 20/30 = 26$ „ = 4. „ .

mente für eine Maximumsverlagerung, denn da nur bei 3,5 und 5,5 cm Fe gemessen und das Maximum nicht mehr eingeengt wurde und außerdem die gemessenen Punkte beträchtliche Unsicherheiten haben, ist die Lage ihrer Maxima sicher nicht genauer als auf 1 cm definiert, und sie können deshalb sehr wohl übereinstimmend mit den hier angegebenen an der gleichen Stelle liegen.

Young (3) hat die Stoßverteilungskurven für Blei in dem Gebiet der kleinen Stöße untersucht. Die von ihm in verschiedenen Höhenlagen ermittelten und jeweils alle gemessenen Stöße enthaltenden Auslösekurven haben ein Maximum etwas unterhalb 2 cm Pb. Für die auf Mt. Evans durchgeführten Messungen wurden von Young die Stoßverteilungskurven für vier Stoßklassengrößen getrennt angegeben. Bei der ersten dieser differentiellen Kurven liegt das Maximum zwischen 0,64 und 1,27 cm, bei den drei anderen zwischen 1,27 und 3,18 cm Pb. Da zwischen 1,27 und 3,18 cm nicht weiter gemessen wurde, ist die durch die eingezeichneten Kurven angedeutete kontinuierliche Verlagerung des Maximums mit der Stoßgröße nicht genügend begründet.

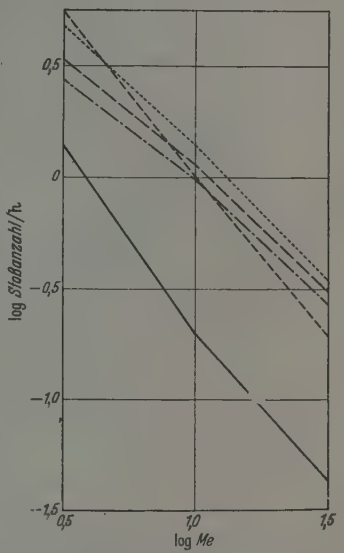


Fig. 12. Integrale Stoßverteilungskurven für Fe von Boggild.

——— 1 cm Fe allseitig,
– – – 3,5 „ „ „ „
– – – – 5,5 „ „ „ „
— — — 8,0 „ „ „ „
——— 13,0 „ „ „ „

In Fig. 11 wurde die von Young in Meereshöhe (Cambridge) aufgenommene Kurve von mir für die einzelnen Stoßgrößenbereiche (integral und im Maßstab der Auslösekurven dieser Arbeit) getrennt gezeichnet. In ihr ist von einer Maximumsverlagerung nichts zu ersehen.

Auch die Arbeit von Carmichael (4) kann zu einem Vergleich über die Lage des Maximums für Blei nicht herangezogen werden, da in der Nähe des Maximums zwischen 1,52 cm und 4,3 cm Pb nicht gemessen wurde.

Zum Vergleich der Neigungen wurden in Fig. 12 die integralen Stoßverteilungskurven der Boggildschen Messungen mit Fe und in Fig. 13 die von Young in Cambridge und auf Mt. Evans aufgenommenen ge-

zeichnet. Fig. 14 enthält eine Zusammenstellung von C. G. Montgomery und D. D. Montgomery angegebener Stoßverteilungskurven

Die Boggildschen Stoßverteilungskurven sind nur durch drei Punkte bestimmt. Da der dritte sehr unsicher ist, wurde als Neigung die Richtung der Verbindungsgeraden des ersten und zweiten Punktes genommen. Die

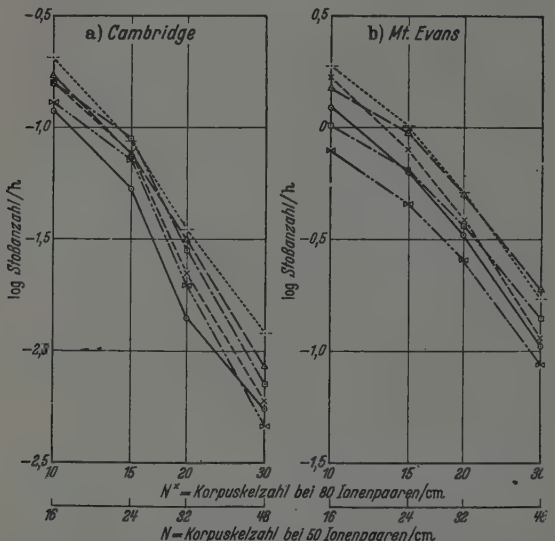


Fig. 13. Integrale Stoßverteilungskurven für Pb von Young.

Neigungen nehmen bei Boggild nach folgender Tabelle mit zunehmender Panzerdicke ebenfalls kontinuierlich ab, jedoch sind sie geringer als die entsprechenden in dieser Arbeit gefundenen.

Boggild-Fe-Vollpanzer (im Schuppen)

cm Fe	1	3,5	5,5	8,0	13
tg α (integr.)....	2,81	2,48	1,81	1,59	1,49 [1].

[1]) Es sei darauf hingewiesen, daß die Autoren diese Neigungen aus ihren Messungen nicht ermittelt haben.

Die Youngschen Stoßverteilungskurven biegen bei kleinen Stößen zu geringerer Neigung um, merkwürdigerweise bei dicken Panzerdecken manchmal stärker als bei dünnen. Ihre Neigung wurde deshalb zwischen dem zweiten und letzten Punkt bestimmt. Die Neigungen der Youngschen Kurven (folgende Tabellen) ändern sich nicht systematisch mit zunehmender Panzerdicke, und auffallenderweise hat von den in Cambridge aufgenommenen Kurven diejenige des dicksten Stoßstrahlers (19,4 cm Pb) die größte Neigung. Die Neigungen der in Meereshöhe aufgenommenen Kurven (Cambridge) sind erheblich größer als die entsprechenden in größerer Höhe (Mt. Evans) gefundenen.

C. G. Montgomery und D. D. Montgomery haben mit einer 50 Liter-Mg-Kammer (9) in verschiedenen Höhenlagen und mit einer Fe-Kammer von 2,5 cm Wandstärke (9) die Nullgänge gemessen. Nach diesen Messungen ändert sich die Neigung der Stoßverteilungskurven mit der Höhe nicht wesentlich und ergab sich jeweils zu etwa 3,2 (diff.). Außerdem stimmen diese Neigungen innerhalb der Meßgenauigkeit mit der mittels der Fe-Kammer gefundenen Neigung von 2,15 (integral) überein. Im Gegensatz hierzu ergab sich bei weiteren mit der Mg-Kammer ausgeführten Messungen (10) in einem Holzschuppen eine Nullgangsneigung von etwa 5,3 (diff.).

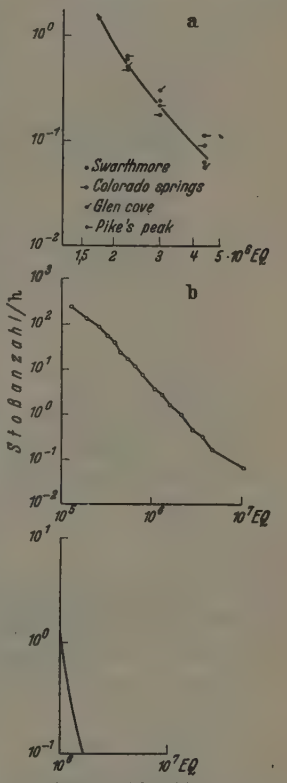


Fig. 14. Nulleffektskurven von C. G. Montgomery und D. D. Montgomery.

Young (Cambridge)

cm Pb (Decke)...	0	0,64	1,27	3,18	6,66	19,4
tg α (integr.).....	3,28	3,68	2,86	3,15	3,67	3,96 [1]),

Young (Mt. Evans)

cm Pb (Decke)...	0	0,64	1,27	3,18	6,66	19,4
tg α (integr.).....	2,60	2,79	2,57	2,33	2,21	2,41 [1]).

[1]) Siehe Fußnote auf S. 472.

Noch verschiedenartiger als die von den verschiedenen Autoren gefundenen Stoßauslösekurven sind die entsprechenden Ergebnisse der

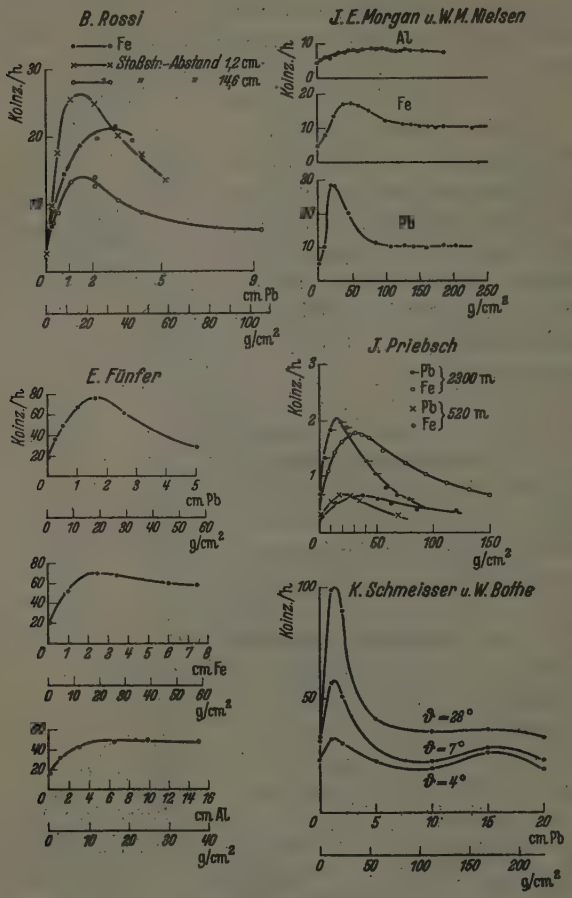


Fig. 15. Rossi-Kurven.

Zählrohrmessungen, nämlich der Rossi-Kurven, von welchen Fig. 15 einige zeigt.

Die Lagen der Maxima sind aus Tabelle 1 zu ersehen.

Demnach stimmen die in den vorliegenden eigenen Messungen gefundenen Lagen der ersten Maxima (2,25 cm Pb; 4,5 cm Fe; 6 cm Al) für Pb

ungefähr überein mit den Koinzidenzmessungen von Morgan und Nielsen, für Fe mit jenen von Rossi und Priebsch und für Al mit jenen von Fünfer. Vielleicht ist die Verschiedenheit der übrigen, bei etwa 1,8 cm liegenden Pb-Maxima aus Zählrohrmessungen mit den hier gefundenen bei 2,25 cm liegenden durch die verschiedene Stoßerfassung durch Zählrohr und Ionisationskammer bedingt.

Tabelle 1.

	cm Pb	cm Fe	cm Al
Rossi	1,8	4,1	
Fünfer	1,6	2,5	7
Morgan und Nielsen	3,2	6,4	32
Priebsch	1,2 1,6	4,1 4,5	
Schmeisser und Bothe	1,7 17		

Keine der obigen Arbeiten gibt für Fe ein Maximum bei 10 cm an, dagegen Maxima bei 2,5 und 6 cm, die sich in der vorliegenden Ionisationskammermessung nicht ergaben. Das zweite hier gefundene Maximum für Al ist mit dem der Messungen von Morgan und Nielsen in Übereinstimmung.

Vergleich mit der Theorie. Nach den theoretischen Anschauungen unterteilt man die Stöße nach dem Bildungsprozeß, durch den sie entstanden sein können, hauptsächlich in 1. Kaskadenstöße, 2. Bhabhasche Ionisationsstöße, 3. Explosionsstöße (5). Auf Grund von Annahmen über die Art der Korpuskeln und über das Energiespektrum der einfallenden Ultrastrahlung lassen sich die Anteile dieser verschiedenen Stoßarten in den gemessenen Stößen berechnen.

Die Kaskadenstöße treten hauptsächlich auf hinter Materialschichten, die eine bestimmte Dicke haben, um die volle Entwicklung des Stoßes zu ermöglichen. Sie werden im schweren Material stärker ausgeprägt sein als im leichten, da in diesem die Grenzenergie E_j, bis zu der das den Kaskadenprozeß verursachende Elektron abgebaut wird, niedriger ist als im leichten. Bei Schichten verschiedenen Materials ist bei genügend großer Anfangsenergie die Multiplikation der Teilchen dieselbe, wenn die Schichten dieselbe Anzahl von sogenannten Strahlungseinheiten betragen. Der Anstieg der Stoßauslösekurven in den ersten Schichten bis zum Maximum muß wegen der mehrmaligen Multiplikation der Teilchenzahl stärker als linear

sein. Das Maximum entspricht der Reichweite der bei dem Kaskadenprozeß erzeugten Elektronen. Nach dem Maximum fällt die Auslösekurve der Kaskadenstöße rasch ab, da die bei Kaskadenstößen gebildeten weichen Elektronen starker Absorption unterliegen.

Die Bhabhaschen Ionisationsstöße, die beim Durchgang eines schweren Elektrons durch Materie infolge der Ionisation der getroffenen Atome entstehen, treten hauptsächlich hinter dicken Schichten auf. Die Zahl der kleinen Ionisationsstöße ist vom Material fast unabhängig, die Zahl der großen dagegen ist bei leichtem Material geringer als bei schwerem.

Die Explosionsstöße entstehen beim Zusammenstoß eines Mesotrons mit einer Energie $\gg 10^8$ e-Volt mit einem Proton oder Neutron. Dabei wird durch die zur Verfügung stehende Energie in einem einzigen Akt eine Reihe von Teilchen erzeugt, vor allem wieder schwere Elektronen, Protonen und Neutronen und mit geringerer Wahrscheinlichkeit Elektronen und Lichtquanten. Die Häufigkeit solcher Explosionen hängt nur von der Anzahl der pro Längeneinheit liegenden Atomkerne ab, nimmt deshalb für die ersten Schichten linear mit deren Dicke zu und ist für verschiedene Materialien massenproportional. Bei der Schichtdicke, die der Reichweite der bei dem Explosionsstoß erzeugten Teilchen entspricht, erreicht die Häufigkeit den Sättigungswert. Bei noch größeren Schichten nimmt die Häufigkeit langsam ab, entsprechend der Absorption der sie verursachenden energiereichen Mesotronen.

Die angeführten und weitere daraus zu folgernde Eigenschaften der durch die einzelnen Prozesse entstandenen Stöße wurden als Kriterien benutzt (5), um die Gesamtheit der beobachteten Stöße in Gruppen ihrem Wesen nach gleicher Stöße zu teilen.

Von den größeren Stößen hat man diejenigen aus wesentlich dünneren oder dickeren Schichten als der Schichtdicke des Maximums als Explosionen gedeutet, die übrigen, nämlich diejenigen, welche die in den verschiedenen Messungen gefundenen Häufigkeitsmaxima verursachten, als Kaskadenstöße angesehen. Als Kriterien zur Untersuchung der Kaskadennatur dieser Stöße wurden kaskadentheoretisch berechenbare Eigenschaften des Maximums der Stoßauslösekurven verwendet, und zwar

1. die Lage l_m des Maximums. Dieses muß sich nach der Kaskadentheorie für größere Stöße kontinuierlich zu größeren Schichtdicken verschieben nach der Beziehung $l_m = 3 \cdot \log N + 2{,}7$ [1]),

2. die Breite des Maximums,

[1]) Neuere Gleichung: 1 cm Pb $= 1{,}21 \cdot \log N + 0{,}68$.

3. das Verhältnis der Maxima der Stoßauslösekurven für die verschiedenen Stoßgrößenbereiche,

4. die Höhenabhängigkeit der Stöße beim Maximum der Bleiauslösekurve.

Zur Bestätigung der Übereinstimmung zwischen Theorie und experimentellen Ergebnissen dienten die besprochenen Messungen von Young, Boggild, Nie und Carmichael. Dabei konnten bei der Verschiedenheit der Apparaturen und Versuchsbedingungen die Stoßgrößen kaum miteinander verglichen werden. Nach den Messungen von Stuhlinger über die spezifische Ionsisation würden sich die errechneten Stoßgrößen beträchtlich ändern und die gefundenen Maximumslagen sich gegen die theoretisch geforderten ungünstig verschieben. Außerdem war in den meisten verwendeten Messungen das Maximum nicht genügend eingeengt und dadurch weder seine Lage noch seine Breite hinreichend bestimmt. Ferner ergaben die Intensitätsverhältnisse beim Bleimaximum aus den verschiedenen Messungen keine zusammenhängende Kurve.

Nach den vorliegenden Messungen, die einen großen Teil des dort in Betracht gezogenen Stoßgrößenbereichs umfassen und mit der gleichen Apparatur durchgeführt sind, stimmen die Eigenschaften des erwähnten kaskadentheoretisch geforderten Maximums mit den experimentell gefundenen nicht überein. Die theoretisch verlangte Maximumsverschiebung ist nicht vorhanden. Die in ZS. f. Phys. 115, 745, 1940 wiedergegebene Fig. 4 zeigt für Blei die theoretisch geforderte, sich verschiebende Maximumslage und die experimentell gefundene. Diese stimmen nicht überein. Dasselbe gilt auch für Fe und Al. Außerdem liegen für verschiedene Materialien die Maxima nicht bei der gleichen Anzahl von Strahlungseinheiten (Fig. 8). Vor allem aber zeigen die Stoßauslösekurven zwei Maxima, eines bei kleinen Stößen und eines bei großen. So darf wohl das von Nie gefundene Maximum der großen Stöße nicht als durch Verschiebung des von Young gefundenen Maximums der kleinen Stöße angesehen werden, sondern es sind wahrscheinlich zwei Maxima, die ganz verschiedenen Prozessen angehören.

Versuch einer Deutung der Meßergebnisse. Die Maxima bei 2,25 cm Pb. 4,5 cm Fe und etwa 6 cm Al treten besonders bei kleinen Stößen stark hervor und verschwinden allmählich mit zunehmender Stoßgröße. Bei Eisen und Aluminium sind in dem beobachteten Meßbereich die zweiten Maxima schon ausgeprägt und liegen bei etwa 10 cm Fe und etwa 35 cm Al. Bei Blei ist nach den erhaltenen Kurven bei Ausdehnung des Meßbereichs ein zweites Maximum zu erwarten.

Das Zustandekommen des ersten Maximums kann wohl kaum auf Explosionsstöße oder Ionisationsstöße zurückgeführt werden. Die ersteren würden nämlich einen linearen Anstieg der Auslösekurve bis zum Maximum bei nicht-logarithmischer Darstellung und für verschiedene Auslösermaterialien bei massenproportionalen Schichten gleiche Stoßhäufigkeit verlangen. Nach den Fig. 3, 5, 7 sind beide Bedingungen nicht erfüllt. Die Bhabhaschen Ionisationsstöße dagegen können in den geringen Schichtdicken nicht in der beobachteten Häufigkeit auftreten, da der Wirkungsquerschnitt der Mesotronen dafür zu gering sein wird.

Trotz der Verschiedenheit der kaskadentheoretischen Forderungen und der experimentell gefundenen Ergebnisse (Fig. 8) glauben wir in den das erste Maximum hervorbringenden Stößen Kaskadenstöße zu erblicken, und zwar aus folgenden Gründen: Auffallend ist bei der Darstellung von Fig. 8 (Panzerdicke in Strahlungseinheiten) der für alle drei Materialien gemeinsame Anstieg vom Nulleffekt bis gegen das Maximum. Vergleicht man die Stoßverteilungskurven der drei Materialien jeweils für die Schichtdicke des ersten Maximums, so liegt die Pb-Kurve am höchsten, niedriger die Fe-Kurve und noch niedriger die Al-Kurve. Dies bedeutet, daß die von denselben Teilchen hervorgerufenen Stöße, d. h. diejenigen der gleichen Häufigkeit bei Blei am größten sind, bei Eisen kleiner und bei Aluminium noch kleiner. Außerdem weisen die Tatsachen, daß es sich vorwiegend um kleine Stöße handelt, daß diese in den ersten Materialschichten entstehen und daß der Anstieg mit der Schichtdicke zunächst stärker als linear geht, auf deren Kaskadennatur hin. Die Schwierigkeit, den experimentellen Befund mit den Forderungen der Kaskadentheorie über die Lage und Verschiebung des Maximums in Einklang zu bringen, fällt fort bei der Annahme, daß die das erste Maximum verursachenden Stöße ziemlich einheitliche, und zwar verhältnismäßig geringe Energie besitzen.

Die Strecke, über welche der Anstieg der Auslösekurven für die drei Materialien gemeinsam ist, beträgt in Blei etwa 4 bis 5 Strahlungseinheiten, in Eisen etwa 2 und in Aluminium nur 1 Strahlungseinheit. Nach Durchlaufen dieser Strecke müßten bei Annahme des Kaskadenprozesses die Korpuskeln jeweils die Grenzenergie des betreffenden Materials, also $1 \cdot 10^7$ bzw. $3 \cdot 10^7$ bzw. $6 \cdot 10^7$ e-Volt erreicht haben. Da beim Kaskadenprozeß in jeder Strahlungseinheit die Energie einer Korpuskel im Mittel sich etwa halbiert, müßte das in die 5 Strahlungseinheiten dicke Bleischicht eintretende Teilchen eine Energie von etwa $16 \cdot 10^7$ e-Volt gehabt haben. Entsprechend ergibt sich als Energie E_0 für ein 3 Strahlungseinheiten Fe durchsetzendes und ebenso für ein 1 Strahlungseinheit Al durchsetzendes

Teilchen jeweils $12 \cdot 10^7$ e-Volt. Dies ist aber in allen drei Fällen innerhalb der Unsicherheitsgrenzen die Grenzenergie für Luft. Da ferner dieses erste Maximum z. B. in Blei noch für Stöße mit 100 Korpuskeln vorhanden ist, können diese Stöße bei nur vier- bis fünfmaliger Multiplikation nicht durch ein einzelnes, die Bleischicht durchsetzendes Teilchen erzeugt, sondern müssen von einem Schauer hervorgerufen sein.

Aus diesen Gründen ist man veranlaßt anzunehmen, daß die Stöße, welche die ersten Maxima in den Auslösekurven von Pb, Fe, Al hervorbringen, durch Multiplikation der Luftschauer entstanden sind, deren Korpuskeln die Grenzenergie der Luft hatten.

Nun bleibt noch die Annahme zu begründen, warum man allen die Stöße verursachenden Luftschauerkorpuskeln die gleiche Energie, nämlich die Grenzenergie für Luft, zuschreiben darf. Selbstverständlich sind auch Luftschauer mit härteren Korpuskeln vorhanden, und diese erzeugen auch Kaskadenstöße, aber die Luftschauer mit der niedrigsten Energie, und das ist die Grenzenergie der Luft, sind ungleich viel häufiger als alle anderen.

Das zweite Maximum der Stoßauslösekurven liegt bei größeren Schichtdicken und ist nur im Bereich der größeren Stöße ausgeprägt. Korpuskelzahl dieser Stöße und Schichtdicke weisen darauf hin, daß der im zweiten Maximum sich abbildende Stoßprozeß von einem energiereichen Teilchen größerer Masse, also wahrscheinlich von einem Mesotron verursacht ist. Fig. 16 zeigt die Stoßauslösekurven der drei untersuchten Materialien für vier Stoßgrößenbereiche (den Fig. 8, 5, 7 entnommen). Es ist daraus zu ersehen, daß mit zunehmender Stoßgröße das besprochene Kaskadenmaximum mit dem Steilabfall mehr und mehr verschwindet, während das zweite Maximum stärker hervortritt. Dieses liegt für Eisen und Aluminium ungefähr bei der gleichen Schichtdicke, etwa 70 g/cm². Wenn bei Ausdehnung der Messungen für Blei auf noch größere Stöße das einerzeit von Nie gefundene Maximum bei 4 bis 5 cm Blei sich auch mit der hier verwendeten Apparatur bestätigen sollte, fällt die Maximumslage für Blei auch ungefähr mit der für Eisen und Aluminium gemeinsamen zusammen. Ferner geht aus Fig. 16 hervor, daß im Bereich der großen Stöße und bei großen Schichtdicken die Stoßhäufigkeiten bei den drei Materialien sich sehr wenig unterscheiden, so daß man in erster Näherung von einer Materialunabhängigkeit der Stoßhäufigkeit sprechen kann. Ob die Abweichungen der letzten Kurven von Fig. 16 hiervon reell sind, muß wegen ihrer großen Meßunsicherheit zunächst dahingestellt bleiben. Da die Theorie für die Bhabhaschen Ionisationsstöße bei schwerem Material eine größere Stoßhäufigkeit als bei leichtem ergibt, schließt die gefundene materialunabhängige Stoß-

häufigkeit entweder Ionisationsstöße als Ursache des zweiten Maximums aus oder sie muß durch das Zusammenwirken von Ionisationsstößen mit einem Stoßprozeß von umgekehrter Materialabhängigkeit erklärt werden.

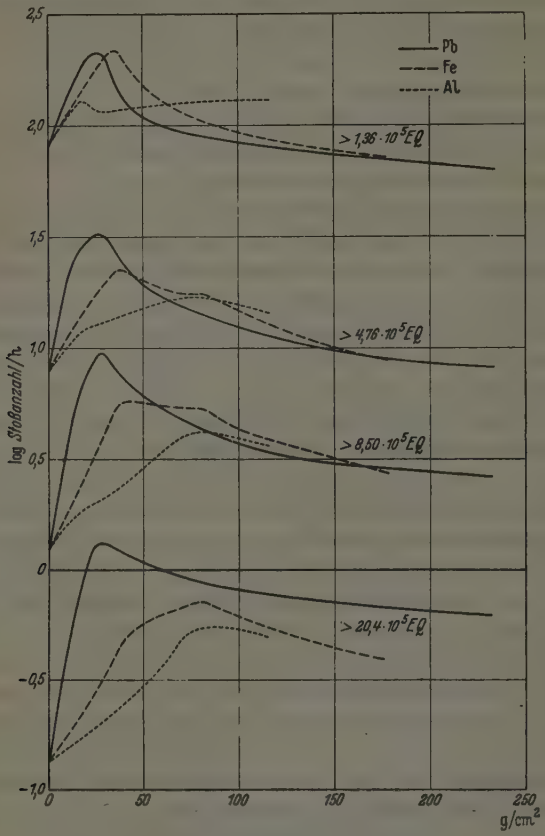


Fig. 16. Integrale Stoßauslösekurven für Pb, Fe, Al.

Wahrscheinlich schließen sich an diese Stoßprozesse Multiplikationen an. Deshalb ist es wegen der unterschiedlichen Grenzenergien der verschiedenen Materialien zweifelhaft, ob der Vergleich von Kurven gleicher Stoßgröße ein richtiges Bild gibt. Hier können erst Messungen der Übergangseffekte mit mehreren Materialien Klarheit bringen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Dr. E. G. Steinke im Physikalischen Institut der Universität Freiburg i. B. ausgeführt.

In besonderem Maße schulde ich Herrn Prof. Dr. E. G Steinke Dank für seine beständige Anteilnahme am Verlaufe dieser Messungen und für die vielen wertvollen Besprechungen und Vorschläge, durch welche diese Arbeit sehr gefördert wurde. Auch Herrn Dr. A. Sittkus danke ich für sein stetes Interesse an dieser Arbeit, für viele Anregungen und für mancherlei Unterstützungen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Überlassung der Apparate zu Dank verpflichtet. Dem Aluminiumwerk Tscheulin-Teningen sei für das zur Verfügung gestellte Aluminium gedankt.

Die Messungen wurden im Frühjahr 1940 beendet. Aus äußeren Gründen aber konnte diese Arbeit erst jetzt druckfertig gemacht werden

Literaturverzeichnis.

1) H. Nie, ZS. f. Phys. **99**, 453, 1936. — 2) J. K. Boggild, Diss. Kopenhagen 1937. — 3) R. T. Young, Phys. Rev. **52**, 559, 1937. — 4) H. Carmichael, Proc. Roy. Soc. London (A) **154**, 223, 1936. — 5) H. Euler u. W. Heisenberg, Erg. exakt. Naturwiss. **17**, 1, 1938. — 6) G. Hoffmann u. W. S. Pforte, Phys. ZS. **31**, 347, 1930. — 7) E. Stuhlinger, ZS. f. Phys. **108**, 444, 1938. — 8) E Körner, ebenda **85**, 442, 1933. — 9) C. G. Montgomery u. D. D. Montgomery, Rev. mod. Phys. **11**, 255, 1939. — 10) C. G. Montgomery u. D. D. Montgomery, Phys. Rev. **56**, 640, 1939. — 11) B. Rossi, ZS. f. Phys. **82**, 151, 1933. — 12) E. Fünfer, ebenda **83**, 92, 1933. — 13) J. E. Morgan u. W. M. Nielsen, Phys. Rev. **50**, 882, 1936. — 14) J. A. Priebsch, ZS. f. Phys. **95**, 102, 1935. — 15) K. Schmeisser u. W. Bothe, Ann. d. Phys. **32**, 161, 1938.

Freiburg i. Br., Weihnachten 1940.

Röntgenuntersuchungen an unterkühltem Äthylalkohol *).

Von A. Prietzschk, Halle a. d. S.

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Februar 1941.)

Die Röntgenstreukurve des unterkühlten Äthylalkohols ($t = -150^0$ C) wird über einen großen Winkelbereich gemessen und aus ihr durch Fourier-Analyse die radiale Dichteverteilungsfunktion berechnet. Es ergibt sich, daß die Alkoholmoleküle bei tiefen Temperaturen Ketten von beträchtlicher Länge bilden, die die Ursache der starken Viskositätszunahme sind. Die bekannte Erscheinung, daß der wasserhaltige Alkohol bei starker Unterkühlung in den glasartigen Zustand übergeht, läßt sich durch eine Verknüpfung der Alkoholketten durch Wassermoleküle deuten.

I. Einleitung.

Die Beugungserscheinungen von Röntgenstrahlen an Flüssigkeiten werden schon seit vielen Jahren experimentell untersucht, aber erst die Arbeiten von Zernike-Prins [1]) und Debye-Menke [2]) haben den allgemeinen Weg gezeigt, wie man aus den an Flüssigkeiten beobachteten Interferenzen zu Aussagen über ihre molekulare Struktur gelangt. Danach ist es unmöglich, allein aus der Intensität und Lage der Interferenzmaxima eindeutige Schlüsse zu ziehen, wie man das früher versucht hat. Vielmehr ist es nötig, den gesamten Verlauf der Streuintensität über einen möglichst großen Winkelbereich exakt zu messen. Durch eine Fourier-Analyse der Streukurve erhält man dann eine Funktion, welche die durchschnittliche Verteilung der Atome um ein herausgegriffenes Atom herum darstellt, die sogenannte radiale Dichteverteilungsfunktion. Dieses Verfahren ist zum ersten Male mit Erfolg von Debye und Menke [3]) auf das flüssige Quecksilber und später von anderen Autoren auf weitere atomare Flüssigkeiten angewandt worden.

Unter bestimmten Voraussetzungen läßt sich das direkte Verfahren der Fourier-Analyse auch auf molekulare Flüssigkeiten übertragen. Bei diesen ist der Verlauf der Streukurve nicht nur durch die zwischenmolekularen, sondern auch durch die innermolekularen Interferenzen bedingt, abgesehen von den Fällen, bei welchen das Streuvermögen der einen Atomart gegenüber dem der anderen Atomart sehr klein ist, wie es

*) D. 3.

[1]) F. Zernike u. J. A. Prins, ZS. f. Phys. **41**, 188, 1927. — [2]) P. Debye u. H. Menke, Ergebn. d. techn. Röntgenkde. II, 1, 1931. — [3]) P. Debye u. H. Menke, Phys. ZS. **31**, 797, 1930.

beispielsweise für Wasser zutrifft. Eine allgemeine theoretische Behandlung der Streuung an molekularen Flüssigkeiten durch Zachariasen[1]) zeigt, daß eine Fourier-Analyse dann möglich ist, wenn die Atomabstände und die Streufaktoren der Atome des Moleküls bekannt sind. Die Theorie ist durch amerikanische Autoren, insbesondere durch Warren[2]), weiterentwickelt worden. Die Ergebnisse einer Reihe von Untersuchungen an organischen Flüssigkeiten, vor allem an Alkoholen, lassen erkennen, daß die Fourier-Methode auch bei molekularen Flüssigkeiten weitgehende Aussagen gestattet und ein wertvolles Hilfsmittel zur Erforschung der Struktur darstellt.

Die vorliegende Arbeit enthält die Ergebnisse einer Röntgenuntersuchung des gewöhnlichen 96%igen Äthylalkohols im unterkühlten Zustand. Die gemessene Streukurve wurde mit Hilfe der verallgemeinerten Fourier-Methode nach Zachariasen und Warren analysiert. — Der Äthylalkohol ist bereits von Harvey[3]) bei Zimmertemperatur und -75^0 C nach derselben Methode untersucht worden, wobei aber nur die bei -75^0 C erhaltene Streukurve vollständig ausgewertet wurde, offenbar auf Grund der Überlegung, daß sich der Ordnungszustand einer Flüssigkeit um so deutlicher ausprägen muß, je tiefer die Temperatur ist, d. h. je näher man sich am Schmelzpunkt befindet. Nun ist bekannt, daß der Äthylalkohol, dessen Schmelzpunkt bei -114^0 C liegt, sich sehr stark unterkühlen läßt; die Viskosität nimmt unterhalb von etwa -120^0 C schnell zu, bei -150^0 C ist der Alkohol bereits sehr zähflüssig ($\eta = 10^3 - 10^4$ Poisen), und bei noch tieferen Temperaturen wird er schließlich glasartig-formbeständig. Nur durch langsames Erwärmen der unterkühlten Flüssigkeit bis in die Nähe des Schmelzpunktes kann der 96%ige Alkohol überhaupt zum Kristallisieren gebracht werden. Im Zusammenhang mit allgemeinen Fragen der Flüssigkeitsstruktur schien es von Interesse, den Alkohol im stark unterkühlten Zustand zu untersuchen. Es wurde eine Temperatur von -150^0 C gewählt, bei welcher die Zähigkeit des Alkohols schon so groß ist, daß er in Form eines freien Stäbchens untersucht werden konnte.

Die Ergebnisse der Untersuchung lassen durch Vergleich mit den Messungen von Harvey bei -75^0 C zunächst den Einfluß der Temperatur auf die molekulare Struktur des Alkohols erkennen. Sie erlauben weiterhin einige Aussagen zum Problem der Gläser und der unterkühlten Flüssigkeiten.

---

[1]) W. H. Zachariasen, Journ Chem. Phys. **3**, 158, 1935. — [2]) B. E. Warren, H. Krutter u. O. Morningstar, Journ. Amer. Ceramic Soc. **19**, 202, 1936. — [3]) G. G. Harvey, Journ. Chem. Phys. **7**, 878, 1939.

II. Experimentelles.

Die Voraussetzung für die Anwendung der Fourier-Methode ist eine sehr genaue Ermittlung der Streukurve von kleinen bis zu möglichst großen Werten von $\sin\Theta/\lambda$. Die Anforderungen an die Sauberkeit der Aufnahmebedingungen sind erheblich; dabei sind einige Punkte zu beachten, die bei Kristallstrukturuntersuchungen häufig nicht so sehr ins Gewicht fallen.

1. Monochromasie. Die bisherigen Erfahrungen bei den Röntgenuntersuchungen von Flüssigkeiten haben gezeigt, daß es unbedingt notwendig ist, mit streng monochromatischer Strahlung zu arbeiten, da bei Verwendung der direkten Antikathodenstrahlung durch die bekannte Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Spektrums zusätzliche Maxima vorgetäuscht werden können. Die Verwendung gefilterter Strahlung ist nicht zweckmäßig, da man, wie Gingrich und Gregg[1]) gezeigt haben, so starke Filter verwenden müßte, daß die Belichtungszeiten länger würden als mit Kristallmonochromatoren.

Die Strahlung der Röntgenröhre wurde daher mit einem Steinsalzkristall monochromatisiert. Zur Erhöhung der reflektierten Intensität wurde ein gebogener Kristall verwendet. Seine Abmessungen betrugen $0{,}2 \times 1 \times 1{,}5$ cm; die Biegung erfolgte in einer gesättigten Kochsalzlösung zwischen zwei Metallklötzen mit zylindrischen Flächen von 20 cm Krümmungsradius.

2. Ausblendung der Primärstrahlung. Da zur vollständigen Auswertung einer Flüssigkeitsaufnahme der Intensitätsverlauf der gestreuten Strahlung von möglichst kleinen Streuwinkeln an gemessen werden muß, ist weiter auf Sauberkeit des Diagramms am Durchstoßpunkt zu achten. Die in der Umgebung des Durchstoßpunktes häufig auftretenden unregelmäßigen Schwärzungen, die durch Sekundärerregung und Streuung an der Eintrittsblende entstehen, müssen vermieden werden.

Auf die Konstruktion der Eintrittsblende wurde daher besondere Sorgfalt verwandt. Die übliche zylindrische Blende wurde durch ein System von Blenden mit konischer Bohrung ersetzt. Die enge Öffnung war gegen die Antikathode der Röntgenröhre gerichtet, und die Steilheit der konischen Flächen wurde so gewählt, daß das direkte Strahlenbündel die Bohrungsflächen nicht mehr traf. Auf diese Weise wurden Sekundärerregung und Streuung auf ein Mindestmaß herabgedrückt. Um ein paralleles Strahlenbündel zu erhalten, und um den noch vorhandenen Rest von Streu- und Sekundärstrahlung auf einen möglichst kleinen Raumwinkel in der Um-

[1]) N. S. Gingrich u. K. Q. Gregg, Phys. Rev. **57**, 1055, 1940.

gebung des Primärstrahles zu beschränken, wurden mehrere solcher Blenden hintereinander gesetzt.

Der Bau der Eintrittsblende geht aus Fig. 1 hervor. In einem Messingrohr L von 7 cm Länge, das mit einem Bleimantel M umkleidet ist, sitzen mehrere 2 bis 5 mm lange Bleizylinder K, die eine konische Bohrung haben;

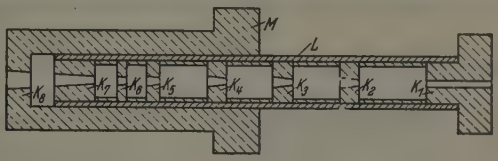


Fig. 1. Eintrittsblende. M Bleimantel, L Messingrohr, K_{1-8} Bleiblenden.

der Durchmesser der engen Öffnung der Bohrungen beträgt 1 mm. Bei K_7 und K_8 ist die Öffnung einige Zehntel Millimeter weiter, so daß diese beiden Blenden nicht mehr vom Primärstrahl getroffen werden.

Der Primärstrahl und die in seiner Umgebung noch vorhandene Streu- und Sekundärstrahlung wurden durch die Austrittsblende B (Fig. 2) von 15 mm Durchmesser aufgefangen. Die Austrittsblende wurde möglichst weit vom Präparat entfernt, damit sie den Film gegen die Streustrahlung des Präparates nicht abdeckte.

3. Kamera und Anordnung des Präparates. Die Aufnahmen wurden mit einer großen Debye-Scherrer-Kamera ($r = 11{,}6$ cm) gemacht. Die Anordnung zur Untersuchung des Alkohols im unterkühlten Zustand (— 150° C) war im einzelnen folgende (Fig. 2): Als Träger und zugleich als Kühlvorrichtung diente ein 1,6 cm starker und etwa 24 cm langer massiver Kupferstab C, der mittels Hartgummischeiben H durch den Boden der Kamera geführt war. Die untere Hälfte des Kupferstabes tauchte in ein Dewar-Gefäß mit flüssigem Stickstoff ein. Am oberen Ende des Kupferstabes war in der Höhe der Eintrittsblende eine Nut D eingefräst, in der oben und unten zwei Spitzen mit einem gegenseitigen Abstand von 5 mm saßen. Zwischen diesen beiden Spitzen, deren Verbindungslinie genau in der Achse der Kamera lag, wurde der Alkohol in Form eines freien Stäbchens angebracht. Die Temperatur des Alkoholstäbchens wurde mit Hilfe eines Thermoelementes bestimmt, dessen Lötstelle in der oberen Spitze saß. An dem in das Kältebad eintauchenden Teil des massiven Kupferstabes führte außen ein dünnwandiges Kupferrohr G entlang, das oben im Kupferstab selbst weiterlief und in der Nut gegenüber dem Alkoholstäbchen endigte. Durch dieses Rohr wurde Wasserstoff geleitet, der im flüssigen Stickstoff durch Ausfrieren getrocknet und auf tiefe Temperatur gebracht wurde.

Der Wasserstoff trat durch das Ansatzrohr I im Kameraboden wieder aus und wurde am Ende einer an I angeschlossenen Rohrleitung verbrannt. Während der ganzen Belichtungszeit wurde so ein langsamer Strom von trockenem kalten Wasserstoff durch die Kamera geleitet. Es wurde hierdurch zunächst eine zusätzliche Kühlung des Alkoholstäbchens erreicht. Vor allem aber diente der Wasserstoff zum Entfernen der Luft und der Alkoholdämpfe aus der Kamera. Dies erwies sich als nötig, da es sich gezeigt hatte, daß die Streuung der Röntgenstrahlen an der Luft und den Alkoholdämpfen so groß ist, daß sie das Streubild der Flüssigkeit fälscht. Die Streuung am Wasserstoff ist infolge des Vorhandenseins nur eines einzigen Elektrons im Atom vernachlässigbar.

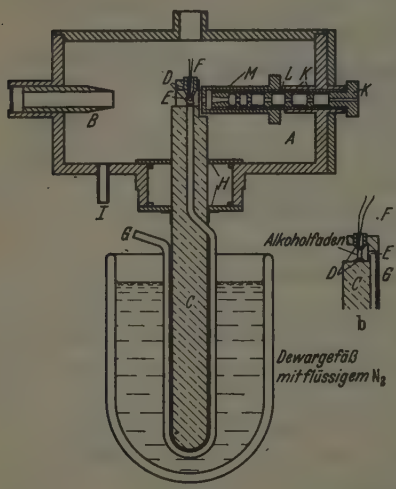


Fig. 2.
a) Debye-Scherrer-Kamera mit Anordnung zur Untersuchung des unterkühlten Äthylalkohols. *A* Eintrittsblende, *B* Austrittsblende, *C* Kupferstab, *D* Spitzen am Kupferstab, zwischen denen der Alkoholfaden ausgezogen wird, *E* Eintrittsöffnung für H_2, *G* Zuführungsrohr für H_2, *H* Hartgummischeiben, *I* Abflußöffnung für H_2. b) Oberer Teil des Kupferstabes, um 90° gedreht.

Das Alkoholstäbchen wurde folgendermaßen hergestellt: Nachdem der Kupferstab durch den flüssigen Stickstoff genügend abgekühlt worden war und der kalte Wasserstoff die Luft aus der Kamera verdrängt hatte, wurde mit einem dünnen Kupferstab tropfenweise Alkohol auf die Spitzen gebracht und zwischen ihnen zu einem etwa 1,5 mm dicken Stäbchen ausgezogen, nachdem die nötige Zähflüssigkeit erreicht war. Die Temperatur, die sich unter den gegebenen Bedingungen bei gut abgedichteter Kamera einstellte, betrug -150^0 C.

Die Aufnahmen wurden mit den K_α-Strahlungen von Kupfer und Molybdän gemacht. Da der große Intensitätsbereich der auszumessenden Streustrahlung mit einer einzigen Aufnahme nicht mit genügender Genauigkeit erfaßt werden kann, wurde das Gesamtstreubild des Alkohols in zwei Teilaufnahmen gewonnen. Die Teilaufnahme, welche die größeren Werte von $\sin\Theta/\lambda$ umfaßte, wurde mit Mo-Strahlung hergestellt. Da das Haupt-

maximum bei Verwendung von Mo-Strahlung sehr nahe an den Durchstoßpunkt zu liegen kommt, wurde für die zweite Teilaufnahme im Bereich kleiner sin Θ/λ-Werte Kupferstrahlung benutzt. Die Belichtungszeiten wurden jeweils so gewählt, daß sich gut photometrierbare Schwärzungen ergaben. Mit Molybdänstrahlung war die erforderliche Belichtungszeit 40 Stunden bei einer Röhrenbelastung von 13 mA und 50 kV, mit Kupferstrahlung 30 Stunden bei 15 mA und 50 kV. Mit jeder der beiden Strahlungen wurden zur Kontrolle mehrere Aufnahmen gemacht, die innerhalb der Genauigkeit des Photometers keine Abweichungen voneinander zeigten.

Daß unter den oben beschriebenen Bedingungen keine störende Streustrahlung mehr vorhanden ist, wurde durch eine Leeraufnahme ohne Präparat bei sonst unveränderter Anordnung sichergestellt. Bei 20 stündiger Belichtung zeigte der Film einen gleichmäßigen Schleier, der so schwach war, daß er vernachlässigt werden konnte, auch wenn die höhere Belichtungszeit bei der Aufnahme des Alkohols berücksichtigt wurde.

Als Filmmaterial wurde Agfa-Laue-Film benutzt. Die Aufnahmen wurden in Agfa-Röntgen-Rapid-Entwickler 6 Minuten bei 18° C entwickelt. Photometriert wurde mit dem Mollschen registrierenden Mikrophotometer Modell B.

III. Auswertung der Streukurve des unterkühlten Äthylalkohols unter Anwendung der Fourier-Analyse.

1. Umzeichnung der Photometerkurve in die Intensitätskurve. Der erste Schritt der Auswertung besteht darin, aus dem Schwärzungsverlauf bzw. aus der Photometerkurve der Aufnahme die Intensitätsverteilung der Streustrahlung zu ermitteln. Dazu muß man die Schwärzungskurve des photographischen Materials und die Abhängigkeit des Photometerausschlages von der Schwärzung kennen. Die direkte Bestimmung dieser Größen läßt sich jedoch auf folgende Weise umgehen. Mit jeder der beiden Strahlungen wird eine Schwärzungsskala hergestellt, indem ein Stück Film streifenweise 1, 2, 3, . . ., 15 Minuten lang exponiert wird. Man erhält so eine Anzahl Schwärzungsmarken, welche für die betreffende Wellenlänge die Abhängigkeit der Schwärzung von der auffallenden Intensität darstellt; die Intensitäten der verschiedenen Streifen verhalten sich wie die entsprechenden Belichtungszeiten.

Die Schwärzungsskala wurde zusammen mit der entsprechenden Alkoholaufnahme auf denselben Papierstreifen photometriert, wobei die Empfindlichkeit des Photometers natürlich für beide Photometrierungen dieselbe war. In Fig. 3 ist a die Photometerkurve der Schwärzungsmarken,

b die der Alkoholaufnahme derselben Wellenlänge (Mo K_α). Aus a und den entsprechenden Belichtungszeiten ergibt sich die Kurve c, welche die Abhängigkeit des Photometerausschlages von der Röntgenintensität (in willkürlichen Einheiten) darstellt. Mit Hilfe der Kurve c kann nunmehr die Photometerkurve b der Alkoholaufnahme in eine Intensitätskurve (relative Intensitäten) umgezeichnet werden. Da die Intensitätsverteilung der Streustrahlung in Abhängigkeit vom Beugungswinkel Θ darzustellen

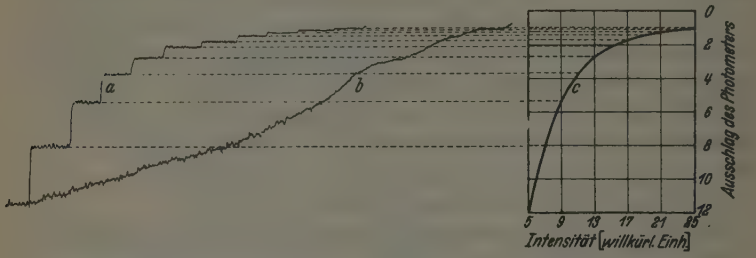


Fig. 3. a Photometerkurve des Stufenkeils, b Photometerkurve des Äthylalkohols (Mo K_α), c Abhängigkeit des Photometerausschlages von der Röntgenintensität.

ist, mußten die Werte des Beugungswinkels auf der Abszisse des Photogramms festgelegt werden. Diese Eichung erfolgte durch Photometrierung einer Pulveraufnahme von Steinsalz.

An den ermittelten Intensitätswerten sind wegen der Polarisation und Absorption der Röntgenstrahlen Korrekturen anzubringen.

Eine Polarisation des Röntgenlichtes erfolgt sowohl bei der Reflexion am Steinsalzmonochromator als auch bei der Streuung am Präparat. Der Polarisationsfaktor beträgt:

$$P = \frac{1 + 2\cos^2 2\Theta}{2}.$$

Für Kristall und Präparat ergibt sich der Polarisationsfaktor, wenn Θ_k der Glanzwinkel am Monochromatorkristall und Θ der Streuwinkel am Präparat ist, zu

$$P = \frac{\cos^2 2\Theta_k + \cos^2 2\Theta}{2},$$

da die beiden Ablenkungsebenen senkrecht zueinander stehen. Für Mo K_α-Strahlung ist

$$P_{\mathrm{Mo}} = \frac{0{,}984 + \cos^2 2\Theta}{2},$$

für Cu K_α-Strahlung

$$P_{\mathrm{Cu}} = \frac{0{,}723 + \cos^2 2\Theta}{2}$$

Der Einfluß der Absorption ist in dem in Frage kommenden Winkelbereich für beide Strahlungen so gering, daß er unberücksichtigt bleiben konnte.

In Kurve A der Fig. 4 ist die bereits korrigierte Intensitätskurve des unterkühlten Äthylalkohols wiedergegeben. Die Intensitäten sind wie üblich

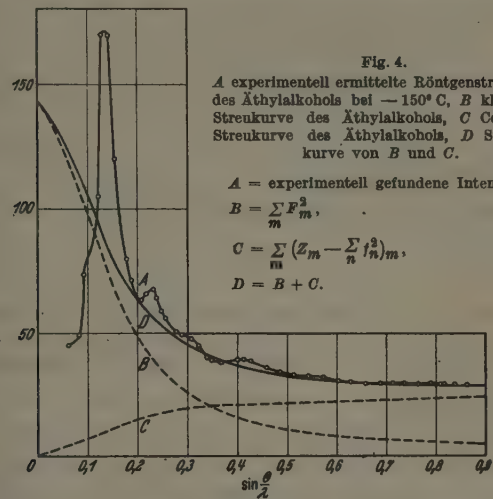


Fig. 4.
A experimentell ermittelte Röntgenstreukurve des Äthylalkohols bei — 150° C, B klassische Streukurve des Äthylalkohols, C Compton-Streukurve des Äthylalkohols, D Summenkurve von B und C.

A = experimentell gefundene Intensität,

$B = \sum_m F_m^2$,

$C = \sum_m (Z_m - \sum_n f_n^2)_m$,

$D = B + C$.

in Abhängigkeit von $\sin\Theta/\lambda$ dargestellt. Für die kleinen $\sin\Theta/\lambda$-Werte bis herauf zu $\sin\Theta/\lambda = 0{,}225$ wurden die Daten der Kupferaufnahme benutzt. Die Molybdänaufnahme wurde von $\sin\Theta/\lambda = 0{,}175$ an ausgewertet. Bei $\sin\Theta/\lambda = 0{,}225$ wurden die beiden Aufnahmen aneinander angeglichen. Die Intensitäten, die sich zwischen $\sin\Theta/\lambda = 0{,}175$ und $\sin\Theta/\lambda = 0{,}255$ aus beiden Aufnahmen ergaben, zeigten keinen nennenswerten Unterschied.

Für die weitere Auswertung ist es notwendig, die Intensitätswerte, die bisher in willkürlichen Einheiten ausgedrückt wurden (I^*), in den Einheiten der Atomformfaktoren, den sogenannten Elektroneneinheiten (I) anzugeben. Dies ist auf Grund der folgenden Überlegung möglich:

Die gemessene korrigierte Intensität I^* setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen:

$$I^* = I^*_{inn} + I^*_{zw} + I^*_{kl} + I^*_c.$$

Dabei bedeutet: I_{inn} die innermolekular gestreute Intensität, I_{zw} die zwischenmolekular gestreute Intensität, I_{kl} die durch die Flüssigkeit als Kontinuum klassisch gestreute Intensität, I_c die Compton-Streuung.

Die gesamte kohärente Intensität I_k^* ist:

$$I_k^* = I_{inn}^* + I_{zw}^* + I_{kl}^*,$$

also:

$$I^* = I_k^* + I_c^*.$$

Drücken wir in diesen Gleichungen die Intensitäten in Elektronen einheiten, bezogen auf ein Molekül, aus:

$$\begin{aligned} I &= I_{inn} + I_{zw} + I_{kl} + I_c, \\ I_k &= I_{inn} + I_{zw} + I_{kl}, \\ I &= I_k + I_c, \end{aligned}$$

so lassen sich die beiden Anteile I_{kl} und I_c aus den Streufaktoren von Kohlenstoff und Sauerstoff berechnen.

Die klassische Streuung I_{kl} hat den Betrag $\sum_m F_m^2$, wobei F_m der Atomstreufaktor des Atoms m ist.

Die Compton-Streuung I_c pro Molekül beträgt: $\sum_m (Z_m - \sum_n f_n^2)_m$, wobei $\sum_m$ die Summierung über das ganze Molekül, Z_m die Atomnummer der Atomart m und $\sum_n f_n^2$ die Summe der Quadrate der durchschnittlichen Streufaktoren der Elektronen für das Atom m bedeutet.

Für große Werte von $\sin\Theta/\lambda$ unterscheidet sich nun die gesamte kohärente Streuung kaum noch von der klassischen, da die Streuung dann nicht mehr von der Lage der Atome und Moleküle zueinander abhängig ist. Im Falle des unterkühlten Alkohols zeigt die Intensitätskurve keine Maxima und Minima für Werte von $\sin\Theta/\lambda > 0{,}81$. Infolgedessen kann oberhalb $\sin\Theta/\lambda = 0{,}81$ die experimentell gefundene Intensität

$$I = I_{kl} + I_c = \sum_m F_m^2 + \sum_m (Z_m - \sum_n f_n^2)_m$$

gesetzt werden.

Durch Angleichung der experimentellen Intensitätskurve (I^*) bei $\sin\Theta/\lambda = 0{,}81$ an die berechnete Kurve ($I_{kl} + I_c$) bekommen die Ordinaten (Intensitäten) die Bedeutung von Elektroneneinheiten^2, der Maßeinheit der Atomformfaktoren.

In Fig. 4 ist das Ergebnis der Rechnung wiedergegeben. Die Kurve B stellt die berechnete klassische Streuung I_{kl}, C die berechnete Compton-Streuung I_c des Alkoholmoleküls dar (die Werte von F_m und $\sum_n f_n^2$ wurden aus Tabellen entnommen). Kurve D ist die Summe von B und C; A ist die bei $\sin\Theta/\lambda = 0{,}81$ an D angeglichene experimentell gefundene Intensitätskurve. Die Differenz der Kurven A und D ist die Verteilung der Streu-

strahlung, wie sie durch Interferenz zwischen den Atomen desselben Moleküls und den Atomen benachbarter Moleküle gegeben ist.

In Fig. 5 ist die Intensitätskurve des unterkühlten Alkohols (Kurve *A*) der bei — 75° C von Harvey aufgenommenen (Kurve *B*) gegenübergestellt. Der allgemeine Verlauf ist bei beiden Kurven im wesentlichen derselbe. Im einzelnen zeigen sich jedoch folgende Unterschiede. Die Maxima der Kurve *A* sind stärker ausgeprägt als die der Kurve *B*. Das gilt insbesondere für das Maximum bei $\sin \Theta/\lambda = 0{,}225$. Dieses Verhalten entspricht durchaus den Erwartungen, da bei tieferen Temperaturen die Nahordnung in der Flüssigkeit vollständiger werden muß. Ferner zeigt Kurve *A* bei $\sin \Theta/\lambda = 0{,}3$ und $\sin \Theta/\lambda = 0{,}56$ zwei schwache Maxima, die auf Kurve *B* nicht hervortreten.

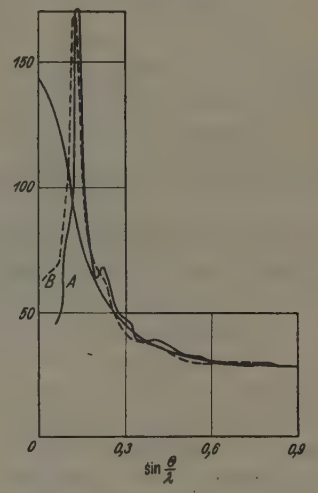


Fig. 5. *A* Röntgenstreukurve des Äthylalkohols bei — 150° C. *B* Röntgenstreukurve des Äthylalkohols bei — 75° C. (Harvey.)

2. Berechnung der radialen Verteilungsfunktion aus der Intensitätskurve mit Hilfe der Fourier-Analyse. Nach Warren ist die wahrscheinliche radiale Dichteverteilung gegeben durch folgende Beziehung:

$$\sum_m K_m \cdot 4\pi r^2 \varrho_m = \sum_m K_m \cdot 4\pi r^2 \varrho_0 + \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty s \cdot i(s) \cdot \sin(rs) \cdot \mathrm{d}s.$$

Darin bedeutet: $\sum_m$ die Summierung über das ganze Molekül; r den Abstand von einem herausgegriffenen Atom; K_m die effektive Zahl der Elektronen im Atom m, definiert durch die Beziehung $K_m = \frac{F_m}{f_e}$, wo F_m der Streufaktor des Atoms m und $f_e = \frac{\sum_m F_m}{\sum_m Z_m}$ der mittlere Streufaktor eines Elektrons ist; $4\pi r^2 \varrho_m \cdot \mathrm{d}r$ die Zahl der Atome multipliziert mit der effektiven Elektronenzahl im Abstand r bis $r + \mathrm{d}r$ von einem Atom; $\varrho_0 = \frac{\varrho \cdot N \cdot 10^{24}}{M} \cdot \sum_m K_m$ die durchschnittliche Elektronenzahl pro Å^3, wobei ϱ die Dichte des Alkohols bei — 150° C, N die Loschmidtsche Zahl

und M das Molekulargewicht ist; s die Abkürzung für $4\pi \cdot \sin\Theta/\lambda$; $i(s) = \dfrac{I_k - \sum_m F_m^2}{f_e^2}$ die durch Interferenz gegebene Verteilung der inner- und zwischenmolekularen Streustrahlung pro Molekül, dividiert durch das Quadrat des mittleren Streufaktors eines Elektrons. $I_k - \sum_m F_m^2$ ergibt sich als Differenz der Kurven A und D in Fig. 4.

Die Kurve $s \cdot i(s)$ wird direkt aus der ermittelten Streukurve erhalten. Die Lösung des Integrals $\frac{2r}{\pi} \int_0^\infty s \cdot i(s) \sin(rs) \cdot ds$ kann entweder graphisch oder mit Hilfe eines harmonischen Amalysators erhalten werden. Da die anderen Größen der obigen Gleichung bekannt sind, läßt sich aus ihr die gesuchte wahrscheinliche Dichteverteilung direkt berechnen.

Im einzelnen sei zu der Auswertung folgendes bemerkt: Die effektive Elektronenzahl $K_m = F_m/f_e$ ist keine konstante Größe, vielmehr ist der Wert von K_m infolge der Winkelabhängigkeit von F_m bzw. f_e etwas vom Winkel abhängig. Es muß daher ein Mittelwert benutzt werden. Dieser ergibt sich aus dem Verlauf von F_m in dem untersuchten Winkelbereich für Sauerstoff zu $K_0 = 9{,}56$, für Kohlenstoff zu $K_c = 6{,}8$.

Die durchschnittliche Elektronenzahl pro Å^3 beträgt 0,329, wobei für die Dichte des Alkohols bei -150^0 C der Wert $\varrho = 0{,}957$ benutzt wurde, der sich durch Interpolation aus den im Landolt-Börnstein angeführten Werten ergibt.

Aus K_m und ϱ_0 wurde die mittlere radiale Dichteverteilung $\sum_m K_m 4\pi r^2 \varrho_0$ berechnet und in Abhängigkeit von r (in Å) gezeichnet. (In Fig. 7 ist diese Funktion durch die Kurve B dargestellt.)

Die Bestimmung der Funktion $s \cdot i(s)$ ergibt sich aus ihrer Definition ohne weiteres: Durch Subtraktion der inkohärenten Intensität (Fig. 4, Kurve C) von der experimentell gefundenen (Kurve A) erhält man die kohärente Intensität I_k. Davon ist weiter die klassische Streuung $\sum_m F_m^2$ (Kurve B) abzuziehen. Die erhaltenen Werte sind durch den Streufaktor eines Elektrons f_e^2 zu dividieren. Die so berechnete Funktion $i(\sin\Theta/\lambda)$ wird mit $s = 4\pi \sin\Theta/\lambda$ multipliziert und in Abhängigkeit von s aufgezeichnet (Fig. 6).

Die Funktion $s \cdot i(s)$ wurde nun entsprechend der Formel

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^\infty s \cdot i(s) \sin(rs) \cdot ds$$

einer Fourier-Analyse unterworfen. Da die Funktion $s \cdot i(s)$ für größere Werte von s, hier $s = 10{,}3$, Null ist, ist das Integral lösbar. Die Integration wurde mit einem harmonischen Analysator nach Mader ausgeführt.

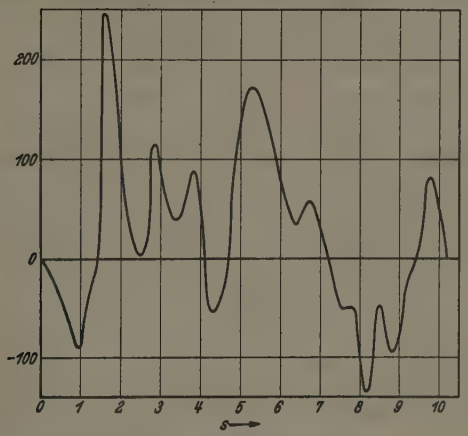


Fig. 6. Die Funktion $s \cdot i(s)$.

Der harmonische Analysator löst Integrale von der Form

$$J = C \cdot \frac{2}{a} \int_0^a y \cdot \sin\left(n \frac{2\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x.$$

Dabei bedeutet C eine Apparatkonstante, welche in unserem Falle 10 war, y die Funktion, die mit dem Analysator umfahren wird, x die Integrationsvariable, a der Bereich von x, über den die Integration ausgeführt wird, und n die Nummer des Zahnrades, das bei der Integration in den Analysator eingesetzt wird.

Um den Analysator auf das Integral $\frac{2}{\pi} \frac{r}{\pi} \int_0^\infty s \cdot i(s) \sin(rs) \cdot \mathrm{d}s$ anwenden zu können, wird $y = s \cdot i(s)$ gesetzt. Die Integrationsvariable x ist in unserem Falle s. Daraus folgt $r = n \frac{2\pi}{a}$ und der Integrationsbereich $a = n \frac{2\pi}{r}$. Die Integration soll von 0 bis ∞ ausgeführt werden. Da die Funktion $s \cdot i(s)$ für Werte von $s > 10{,}2$ aber Null ist, gibt die Integration über den Bereich von $s > 10{,}2$ hinaus keinen Beitrag mehr zum Werte des Integrals. Es ist deshalb nur notwendig, daß der Integrationsbereich von

Null bis $a = s = 10{,}2$ reicht. In der praktischen Durchführung der Rechnung wird deshalb a immer größer als $s = 10{,}2$ gewählt. Der am Analysator abgelesene Wert wird zuletzt noch mit $\frac{a \cdot r}{\pi}$ multipliziert. — Diese Rechnung ist für 47 verschiedene Werte von r durchgeführt worden.

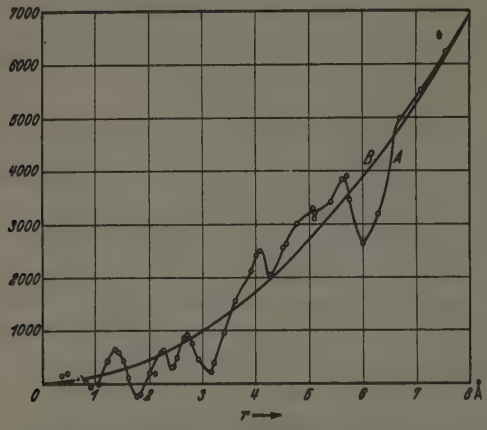


Fig. 7. A die aus der Röntgenstreukurve ermittelte wahrscheinliche radiale Dichteverteilung des Äthylalkohols bei — 150° C. B mittlere radiale Dichteverteilung.

$$A = \Sigma K_m 4\pi r^2 \varrho_m, \qquad B = \Sigma K_m 4\pi r^2 \varrho_e.$$

Das Ergebnis der Auswertung, die wahrscheinliche radiale Dichteverteilung des Äthylalkohols bei — 150° C, ist in der Fig. 7 durch die Kurve A wiedergegeben. Die Kurve B stellt, wie erwähnt, den Verlauf der mittleren Elektronendichte dar. — Die Einzelheiten der Kurve A werden im folgenden Abschnitt ausführlich besprochen.

Eine genauere Fehlerbetrachtung für die Kurve A läßt sich nur sehr schwer durchführen. Es wurde deshalb versucht, wenigstens einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit des Verfahrens zu bekommen. Dazu wurde die Funktion $s\,i\,(s)$ entsprechend der Fehlerbreite ihrer Werte geändert und aus der geänderten Funktion die Dichteverteilungskurve neu bestimmt. Es ergab sich, daß unter Verwendung der extremsten Werte die Verschiebungen der Maxima der Dichteverteilungskurve nicht mehr als etwa 0,1 Å betrugen; die Flächen unter den Maxima veränderten sich im äußersten Falle um 15%.

In Fig. 8 ist die Dichteverteilungskurve des unterkühlten Alkohols (A) zum Vergleich mit der von Harvey angegebenen Kurve (A') gezeichnet, die bei einer Temperatur von — 75° C gewonnen wurde. Der Unterschied

der beiden Kurven B und B', welche den Verlauf der mittleren Elektronendichte darstellen, entspricht dem Dichteunterschied des Alkohols bei — 150 und — 75° C. Die Kurven A und A' sind in ihrem allgemeinen Verlauf ähnlich, insbesondere bei kleineren Werten von r. Bei größeren Werten von r zeigt die Kurve A (— 150° C) sehr viel deutlicher ausgeprägte Maxima

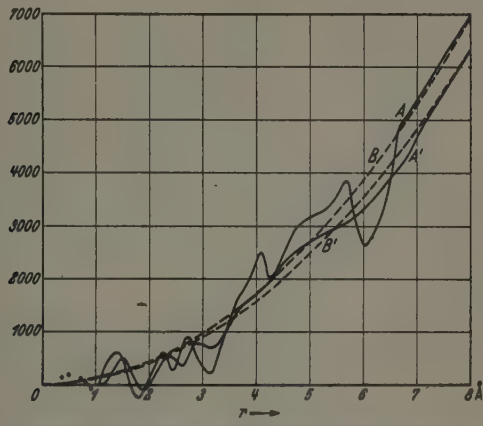


Fig. 8. A wahrscheinliche radiale Dichteverteilung des Äthylalkohols bei — 150° C. A' wahrscheinliche radiale Dichteverteilung des Äthylalkohols bei — 75° C, B und B' Verlauf der mittleren Elektronendichte bei — 150° C bzw. — 75° C.

und Minima als die Kurve A' (— 75° C). Die Verschiebung der auf beiden Kurven deutlich hervortretenden Maxima liegt innerhalb der Fehlergrenzen.

IV. Diskussion der Ergebnisse.

1. Abstände und Zahl der Nachbarn. Kettenbildung. Aus der Lage der Maxima der radialen Dichteverteilungskurve ergeben sich die inner- und zwischenmolekularen Abstände, während sich aus der Fläche unter jedem Maximum die Zahl der Atompaare bestimmen läßt, die den durch das Maximum gegebenen Abstand haben. Für die nachfolgende Diskussion der einzelnen Maxima und ihrer Zuordnung wird auf die Fig. 9 verwiesen.

Das erste Maximum bei 1,35 Å entspricht den aus anderen Untersuchungen bekannten innermolekularen Abständen C—O und C—C des Alkoholmoleküls (a und b in Fig. 9). Die Ausmessung der Fläche unter diesem Maximum ergibt 230 Elektronen². Rechnerisch erhält man

$$2\,K_c \cdot K_0 + 2\,K_c \cdot K_c = 2\,(65 + 46) = 222 \text{ Elektronen}^2.$$

Das Maximum bei 2,25 Å entspricht dem großen C—O-Abstand im Alkoholmolekül.

Das bei 2,7 Å gelegene Maximum kann nicht mehr als innermolekulare Interferenz gedeutet werden. Es entspricht nach Zachariasen (l. c.) dem Abstand zweier Sauerstoffatome benachbarter Moleküle, die durch die Wasserstoffaustauschbindung aneinandergeknüpft sind. Die Flächen unter beiden Maxima ergeben zusammen 500 Elektronen². Bringt man für den C—O-Abstand $2 \cdot K_c \cdot K_0 = 130$ Elektronen² in Abzug, so bleiben für den O—O-Abstand 370 Elektronen² übrig. Die Zahl der ein Sauerstoffatom in dieser Entfernung umgebenden Sauerstoffatome ergibt sich zu

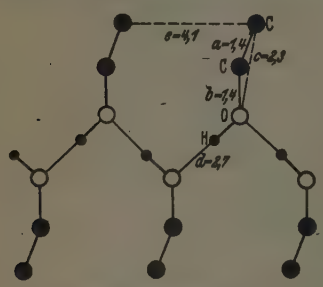


Fig. 9. Strukturbild der Äthylalkoholketten.

$$n = 370 : 2\,K_0 \cdot K_0 = 370 : 188 = 2.$$

Ein beliebig herausgegriffenes Sauerstoffatom hat demnach *zwei* Sauerstoff-Nachbaratome, an die es durch die Wasserstoffbrückenbindung geknüpft ist. Betrachtet man eines der beiden Nachbaratome, so ist auch dieses wieder an zwei Sauerstoffatome gebunden, nämlich an das zuerst betrachtete und an ein weiteres usf. Da diese Überlegung für jedes Sauerstoffatom gilt, muß man schließen, daß die Moleküle im unterkühlten Alkohol Ketten von beträchtlicher Länge bilden, die durch Wasserstoffbrückenbindung der alkoholischen OH-Gruppen bedingt sind. Es entstehen also, wie in Fig. 9 dargestellt ist, Zickzackketten von O-Atomen mit zwischengelagerten Wasserstoffatomen; die Äthylgruppen stehen senkrecht zu dieser Kette. — Aus der von Harvey bei — 75° C ermittelten Dichteverteilungskurve berechnet sich die Zahl der einem Sauerstoffatom benachbarten Sauerstoffatome zu 1,2. Daraus ist ersichtlich, daß die Assoziation der Alkoholmoleküle durch die Wasserstoffbrückenbindung mit abnehmender Temperatur stark zunimmt.

Das Maximum bei 4,05 Å entspricht dem Abstand benachbarter Äthylgruppen, d. h. dem C—C-Abstand verschiedener Moleküle (*e* in Fig. 9). Aus der Fläche unter diesem Maximum, die 2300 Elektronen² entspricht, ergibt sich die Zahl der einer Äthylgruppe benachbarten Äthylgruppen zu

$$n = 2300 : 2\,(2\,K_c \cdot 2\,K_c) = 6{,}2.$$

Zwei weitere Maxima, deren Zuordnung nicht ohne weiteres klar ist, liegen bei 5,1 und 5,6 Å. Sie zeigen, daß bis zu diesen Entfernungen be-

stimmte Abstände mit größerer Wahrscheinlichkeit vorkommen. Etwa von $r = 6{,}6$ Å an treten keine bevorzugten Abstände mehr auf; die Kurve nähert sich asymptotisch der Kurve der mittleren Dichteverteilung.

Die Lage der Wasserstoffatome im Molekül läßt sich wegen ihres geringen Streuvermögens durch Röntgenuntersuchungen nicht festlegen.

2. Vernetzung der Alkoholketten durch Wassermoleküle. Vergleicht man die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung mit denen von Harvey, so ergibt sich, daß die Verkettung der Alkoholmoleküle bei — 150° C wesentlich stärker ist als bei — 75° C. Es ist ein naheliegender Gedanke, die außerordentliche Unterkühlbarkeit des Äthylalkohols mit dieser Kettenbildung in Verbindung zu bringen. Die langen Ketten sind die Ursache der starken Viskositätszunahme, die schon oberhalb des Schmelzpunktes deutlich wird, und die ihrerseits die Kristallisationsgeschwindigkeit so stark herabsetzt, daß der Alkohol, wie einleitend bereits erwähnt wurde, durch einfaches Abkühlen überhaupt nicht zum Kristallisieren zu bringen ist, sondern schließlich bei — 190° C ein festes Glas bildet.

Fig. 10. Debye-Scherrer-Aufnahme des kristallisierten Äthylalkohols bei — 150° C.

Dies gilt indessen nur für den wasserhaltigen 96%igen Alkohol, wie er für die vorliegende Untersuchung verwandt wurde. Tammann und Hesse [1]) haben gezeigt, daß völlig wasserfreier Äthylalkohol sich zwar ebenfalls beträchtlich unterkühlen läßt, jedoch auch aus dem stark unterkühlten Zustand heraus in wenigen Minuten kristallisiert. In der Tat ergab sorgfältig getrockneter Alkohol in der oben beschriebenen Kamera bei gleicher Anordnung (— 150° C) einwandfreie Kristallinterferenzen, wie die Fig. 10 zeigt.

Offenbar steht also die extreme Unterkühlbarkeit des 96%igen Alkohols und seine Fähigkeit, ein festes Glas zu bilden, in einem ursächlichen Zusammenhang mit seinem Wassergehalt. Dieser Zusammenhang kommt auch in dem Einfluß des Wassergehaltes auf die Viskosität zum Ausdruck. Die Kurven der Fig. 11, die nach Messungen von Tammann und Hesse gezeichnet wurden, zeigen zunächst die starke Zunahme der Viskosität mit abnehmender Temperatur. Ferner erkennt man, daß bei gleicher Tem-

[1]) G. Tammann u. W. Hesse, ZS. f. anorg. Chem. **156**, 245, 1926.

peratur die Viskosität stark vom Wassergehalt abhängt; schon ein Wasserzusatz von 0,6% erhöht die Viskosität um etwa eine Größenordnung.

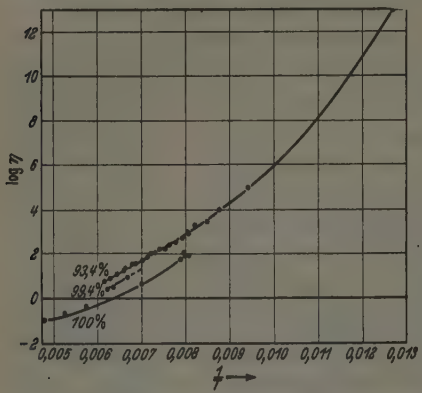


Fig. 11. Viskositätskurven des Äthylalkohols nach Messungen von Tammann und Hesse.

Es fragt sich, wie diese außerordentlich starke Erhöhung der Viskosität des Alkohols durch eine verhältnismäßig geringe Wassermenge zu verstehen ist. Die Antwort auf diese Frage ergibt sich zwanglos, wenn man sich an die Struktur des flüssigen Wassers erinnert, die von Bernal und Fowler[1]) durch eine ausführliche Diskussion der Röntgenstreukurve von Wasser aufgeklärt worden ist. Danach haben wir im Wasser eine tetraedrische Struktur in der Art, daß ein Wassermolekül vier andere Wassermoleküle gebunden hält, wobei die Sauerstoffatome durch die Wasserstoffaustauschbindung verknüpft sind. Denkt man sich nun ein Wassermolekül im unterkühlten Alkohol, in welchem die Alkoholmoleküle lange Ketten bilden, so sieht man ohne weiteres, daß das Wassermolekül bis zu vier Alkoholketten durch die Wasserstoffbrückenbindung verknüpfen kann, so wie es in reinem Wasser vier Wassermoleküle anlagert. Die Wassermoleküle bilden also Verzweigungspunkte, an denen sich drei oder vier Alkoholketten treffen. In Fig. 12 ist eine dreifache Verzweigung schematisch dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die

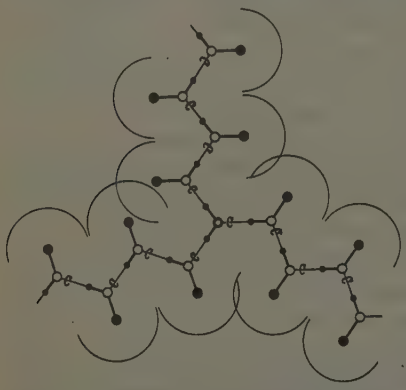


Fig. 12. Alkoholketten mit eingelagertem Wassermolekül. (O-Atom des Wassermoleküls ist durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet.)

[1]) J. D. Bernal u. R. H. Fowler, Journ. Chem. Phys. 1, 518, 1933.

Äthylgruppen durch Methylgruppen ersetzt, deren Wirkungssphäre durch Kreise angedeutet ist; ihre teilweise Überdeckung ist durch die Darstellung in der Ebene verursacht; am räumlichen Modell tritt keine Behinderung auf, da die Ketten um die O—H—O-Bindung als Achse frei drehbar sind.

Diese Verknüpfung von drei oder vier Ketten erklärt den starken Einfluß des Wassers auf die Viskosität des Alkohols. Gerade die zunächst merkwürdige Tatsache, daß so kleine Wassermengen die Viskosität sehr stark erhöhen, ist durch den Nachweis sehr langer Alkoholketten bei tiefen Temperaturen ohne weiteres verständlich.

Es liegt nahe, aus der Abhängigkeit der Viskosität des Alkohols vom Wassergehalt eine Abschätzung der Länge der Alkoholketten zu versuchen. Eine Erhöhung des Wassergehaltes sollte die Viskosität nicht mehr wesentlich beeinflussen, wenn alle Ketten durch Wassermoleküle verknüpft sind. Wenn man aus Fig. 11 die Viskositätswerte bei — 180° C als Funktion des Wassergehaltes aufträgt (Fig. 13), erkennt man, daß der Einfluß des Wassers von etwa 1,5% an merklich geringer wird. Obgleich die Kurve durch die drei Meßpunkte natürlich nicht ausreichend festgelegt ist, wird man immerhin annehmen dürfen, daß bei einem Wassergehalt von 1 bis 2% praktisch alle Alkoholketten durch Wassermoleküle verknüpft sind. Nimmt man also 1,5% Gewichtsprozente Wasser als diejenige Menge an, die für die Verknüpfung aller Ketten nötig ist, so bedeutet dies, daß etwa 25 ($\approx 4 \times 6$ bzw. 3×8) Alkoholmoleküle auf ein Molekül Wasser kommen; zwischen je zwei Wassermolekülen würde demnach eine Kette von 12 bis 16 Alkoholmolekülen liegen.

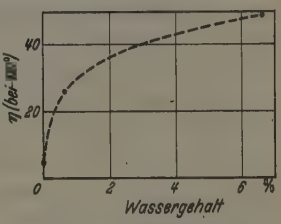


Fig. 13. Viskosität des Äthylalkohols in Abhängigkeit vom Wassergehalt bei — 130° C.

Auch die Fähigkeit zur Glasbildung, die den wasserhaltigen Alkohol auszeichnet, läßt sich nunmehr verstehen. Denkt man sich die Verknüpfung durch Wassermoleküle durch die ganze Flüssigkeit hindurch fortgesetzt, so sieht man, daß eine dreidimensionale fachwerkähnliche Vernetzung der Alkoholketten möglich ist, wodurch infolge der verschiedenen Kettenlänge ein fachwerkartiges, aber ungeordnetes Netzwerk entsteht. Ein derartiges dreidimensionales ungeordnetes Netzwerk ist aber nach den neueren Anschauungen das Bauprinzip der Silikat- und Oxydgläser. Im wasserfreien Alkohol sind die Bedingungen für eine solche Vernetzung der Alkoholketten nicht gegeben. Die beträchtliche Länge der Ketten bewirkt zwar eine große

Viskositätszunahme, die eine gewisse Unterkühlbarkeit zur Folge hat, trotzdem tritt aber nach mehr oder weniger langer Zeit die Kristallisation ein. Erst durch das Hinzukommen von Wassermolekülen, welche die langen Alkoholketten zu einem dreidimensionalen Netzwerk verknüpfen, sind die Bedingungen zur Glasbildung gegeben. Zwischen einer einfachen unterkühlten Flüssigkeit und einem Glas besteht demnach ein wesentlicher struktureller Unterschied.

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit enthält die Ergebnisse einer Röntgenuntersuchung an unterkühltem 96%igen Äthylalkohol bei einer Temperatur von — 150° C.

Die Apparatur, welche den Alkohol in Form eines freien Stäbchens zu untersuchen gestattet, wird ausführlich beschrieben.

Aus der gemessenen Streukurve des Alkohols wird nach der von Zachariasen und Warren verallgemeinerten Fourier-Methode die wahrscheinliche radiale Dichteverteilung berechnet.

Diese Dichteverteilungsfunktion wird mit der von Harvey bei — 75° C erhaltenen verglichen. Die beiden Kurven stimmen innerhalb der Fehlergrenzen in demjenigen Teil, welcher den innermolekularen Interferenzen entspricht, gut überein. Die zwischenmolekularen Interferenzen lassen einen deutlichen Einfluß der Temperatur auf die Flüssigkeitsstruktur erkennen. Die entsprechenden Maxima sind bei — 150° C wesentlich stärker ausgeprägt. Insbesondere ergibt sich die Zahl der Sauerstoffatome, die einem Sauerstoffatom benachbart und mit ihm durch Wasserstoffbrückenbindung verknüpft sind, zu 2, während bei — 75° C durchschnittlich nur 1,2 Sauerstoffatome gefunden werden.

Daraus ist zu schließen, daß im unterkühlten Alkohol die Moleküle lange Ketten bilden, die durch die Wasserstoffbrückenbindung der alkoholischen OH-Gruppe entstehen.

Die starke Verkettung der Alkoholmoleküle erklärt die hohe Viskosität des Alkohols bei tiefen Temperaturen und damit die auffällige Unterkühlbarkeit. Letztere ist besonders groß beim wasserhaltigen Alkohol, der beim Abkühlen überhaupt nicht kristallisiert, sondern bei — 190° C ein festes Glas bildet, während wasserfreier Alkohol sich zwar ebenfalls stark unterkühlen läßt, jedoch innerhalb kurzer Zeit kristallisiert.

Der starke Einfluß von geringen Wassergehalten auf die Viskosität des Alkohols wird durch Verknüpfung der Alkoholketten durch Wassermoleküle gedeutet. Aus der von Tammann und Hesse gemessenen Abhängigkeit der Viskosität vom Wassergehalt läßt sich die Zahl der Alkohol-

moleküle einer Kette abschätzen; bei — 130° C enthält die Kette etwa 12 bis 16 Moleküle.

Die Tatsache, daß nur der wasserhaltige Alkohol ein Glas bildet, läßt sich durch eine dreidimensionale Vernetzung der Alkoholketten durch die Wassermoleküle erklären. Damit ergibt sich für den glasigen Alkohol ein Bauprinzip, das nach neueren Anschauungen auch für die Silikat- und Oxydgläser charakteristisch ist.

Zwischen einer einfachen unterkühlten Flüssigkeit (absoluter Alkohol) und einem Glas (wasserhaltiger Alkohol) besteht demnach ein wesentlicher struktureller Unterschied.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Kast, bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes förderndes Interesse zu großem Dank verpflichtet. Desgleichen danke ich Herrn Dozent Dr. A. Faessler für viele Ratschläge und Weisungen. Das verwendete Röntgenrohr mit Cu-Anode ist Eigentum der Deutschen Forschungsgemeinschaft, der ich für diese Unterstützung ebenfalls danken möchte.

Halle a. d. S., Inst. f. experim. Physik der Martin-Luther-Universität, im Februar 1941.

Die Isotopenverteilung von Molybdän und die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes.

Von **H. Lichtblau** *) und **J. Mattauch.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 21. Februar 1941.)

Bei der photometrischen Messung von Isotopenverteilungen wurde bisher stets die Gültigkeit des $I \cdot t$-Gesetzes vorausgesetzt und für Ionenstrahlen auch allgemein für experimentell bestätigt gehalten. Ein Vergleich der von uns seinerzeit photometrisch bestimmten Isotopenverteilung von Molybdän mit den kürzlich von Valley hierfür elektrometrisch gemessenen Werten zeigt jedoch, daß das nicht für alle in der Massenspektrographie verwendeten Plattensorten zutrifft. Für die von uns beim Mo benutzten Q_1-Platten ergeben sich aber, da die Intensitätsschwankungen im allgemeinen gering waren, sehr gut übereinstimmende Schwarzschild-Exponenten, deren Mittel 0,86 beträgt. Die früher festgestellte Diskrepanz von 0,5 Promille mit dem von Hönigschmid und Wittmann sehr genau gemessenen Atomgewicht wird dadurch jedoch nur zu etwa zwei Fünftel behoben.

Bei der photometrischen Bestimmung der relativen Häufigkeit von Isotopen wird aus der Schwärzung oder Dichte D der photographischen Platte auf die Intensität I der Ionenstrahlen von der Massenzahl A geschlossen. Dabei wird die Gültigkeit des Bunsen-Roscoeschen Reziprozitätsgesetzes (R. G.) für Kanalstrahlen vorausgesetzt; dieses verlangt bekanntlich, daß die Schwärzung nur von der Gesamtzahl der die Platte treffenden Teilchen abhängt, aber nicht von der Zeit, die sie dazu brauchen. Unter sonst gleichen Umständen (konstanter Ionenstrom, gleiche Linienbreite usw.) muß die Schwärzung der photographischen Platte demnach als Funktion des Produktes $I \cdot t$ darstellbar sein, wo t die Expositionszeit bedeutet:

$$D = f(I \cdot t). \tag{1}$$

Um die Häufigkeitsverhältnisse zweier Isotope von den Massenzahlen A_1 und A_2 zu finden, braucht man daher im Prinzip nur zwei Aufnahmen von den Expositionszeiten t_1 und t_2 herzustellen, so daß D für beide Linien gleich ist. Dann muß in Gleichung (1) auch das Argument der Funktion f für beide Linien gleich sein und es ist:

$$I_1/I_2 = t_2/t_1. \tag{1a}$$

Da im Massenspektrographen alle die Platte treffenden Ionen die gleiche Energie besitzen und die Massen der Isotope eines Elements prozentuell nur wenig differieren, ist im allgemeinen eine Abhängigkeit der Schwärzung von den verschiedenen Isotopen nicht zu erwarten. Bei Bor allerdings

*) Zur Zeit im Felde.

korrigiert Aston[1]), da er dem leichteren Isotop wegen seiner höheren Geschwindigkeit eine größere Eindringtiefe und somit eine größere photographische Wirkung zuschreibt, indem er mangels genauerer Kenntnis die rohe Annahme macht, daß die Schwärzung der Geschwindigkeit der Ionen proportional ist. Es ist jedoch nicht einzusehen, warum für die Eindringtiefe verschiedener Isotope eines Elements (also Ionen gleichen Radius) die Geschwindigkeit allein maßgebend sein soll. Nimmt man etwa an, daß die Eindringtiefe mv^r, $r < 2$ proportional ist[2]), so ergibt sich die Korrektur gerade im umgekehrten Sinne wie früher. Nachdem für massenspektrographische Untersuchungen gegenwärtig nur Platten verwendet werden, bei denen die wirksame Silberhalogenidschicht auf der Gelatineschicht liegt, erübrigt sich eine solche Korrektur, wenn man annimmt, daß die photographische Wirkung isotoper Ionen gleicher Energie auf die Silberhalogenidkörner dieselbe ist.

Wie bekannt, gilt für Lichtquanten das R.G. nicht mehr streng. An Stelle von Gleichung (1) tritt hier die empirische Schwarzschildsche Beziehung:

$$D = f(I \cdot t^p). \tag{2}$$

Indem man zunächst wiederum zwei Aufnahmen gleicher Schwärzung herstellt, bei denen aber diesmal die Veränderung der Intensität anderweitig bekannt sein muß, kann man den Schwarzschild-Exponenten für die benutzte Plattensorte empirisch bestimmen:

$$p = \frac{\lg I_1/I_2}{\lg t_2/t_1}. \tag{2a}$$

Überzeugt man sich noch davon, daß p in dem benutzten Intensitätsintervall konstant ist, dann kann hier die photometrische Intensitätsmessung mit Hilfe von Gleichung (2a) geschehen.

Bei Kanalstrahlen wurde jedoch bisher Gleichung (1) allgemein für experimentell gesichert gehalten[3]). Wir hatten[4]) sie daher auch bei der

[1]) F. A. Aston, Mass-Spectra and Isotopes, London 1933, S. 124. — [2]) Siehe Handb. d. Phys., Bd. XXII/2, Berlin 1933, Artikel E. Rüchardt: Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie, S. 125. — [3]) Siehe z. B. F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 511, 1930 und Mass-Spectra and Isotopes, London 1933, S. 93. Bei der Besprechung des R.G. bemerkt Aston: „results so far have justified its validity". Ferner schreibt R. Wierl im Hand- und Lehrbuch der chemischen Physik Bd. 6/III B, Leipzig 1933, im Artikel „Kanalstrahlen und ihre Wechselwirkung mit Materie (einschließlich Massenspektrographie)" auf S. 178 folgendes: „Besonders einfach wird die Messung durch die gute Gültigkeit des Bunsen-Roscoe-Gesetzes (Proportionalität der Schwärzung mit dem Produkt Intensität mal Zeit) in einem großen Schwärzungsbereich". — [4]) J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. phys. Chem. B. **42**, 288, 1919.

Auswertung von Massenspektrogrammen des Molybdäns zugrunde gelegt, die wir auf den wegen ihrer außerordentlichen Schleierfreiheit für photometrische Zwecke hervorragend gut geeigneten Q_1-Platten der Ilford Co. erhalten hatten (s. Fig. 1). Die Höhe der Elektrometerausschläge x des selbstregistrierenden Photometers über dem konstanten Schleierwert konnte auf 0,1 bis 0,01 mm genau ausgemessen werden. Da auf jeder Platte 7 bis 14 Einzelaufnahmen mit bekannten Belichtungszeiten waren,

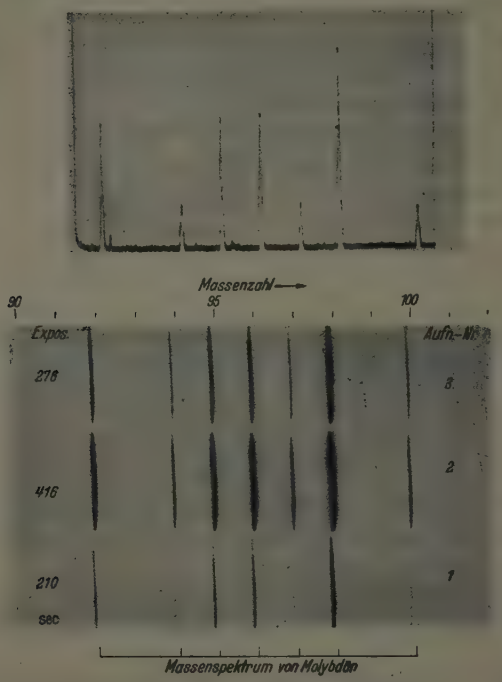


Fig. 1. Massenspektrum von Molybdän mit Photometerdiagramm von Aufnahme 1.

wurde für jede Platte eine eigene Schwärzungskurve [die Funktion f von Gleichung (1)] ohne irgendwelche Annahmen über die Isotopenverteilung ermittelt. Es ergab sich, daß x in einem hinreichend großen Bereich linear mit der Belichtungszeit wächst; die Neigung des geradlinigen Teiles wurde für jede Platte getrennt bestimmt. Damit konnte nun für zwei Linien nahezu gleicher Schwärzung, die beide in das geradlinige Stück fielen, das Intensitätsverhältnis gemessen werden. In der Tabelle 1 sind in Spalte 1 die Massenzahlen der ausgesuchten Linienpaare, in Spalte 3 die Anzahl n der Einzelwerte und in den Spalten 4 und 6 die Mittel der auf dem eben be-

Tabelle 1. Intensitätsverhältnisse der Mo-Isotope.

A_1/A_2	I_1/I_2 (elektrometrisch)	I_1/I_2 (photometrisch)				
	G. E. Valley	J. Mattauch und H. Lichtblau				F. W. Aston
		n	unkorrig.	korr. mit $\sqrt{A_1/A_2}$	wahrsch. Fehler	
1	2	3	4	5	6	7
95/92	$1{,}081 \pm 0{,}01_5$	31	1,050	1,067	$\pm 0{,}005$	1,10
96/95	$1{,}031 \pm 0{,}01_5$	31	1,035	1,041	$\pm 0{,}003$	1,15
94/97	$0{,}974 \pm 0{,}01_5$	26	0,996	0,981	$\pm 0{,}006$	1,05
97/100	$1{,}043 \pm 0{,}01_5$	22	1,022	1,007	$\pm 0{,}006$	0,98
98/96	$1{,}451 \pm 0{,}02$	24	1,510	1,526	$\pm 0{,}012$	1,29
96/94	$1{,}766 \pm 0{,}02_5$	32	1,936	1,957	$\pm 0{,}021$	1,78
98/94	$2{,}56 \pm 0{,}03_5$	13	2,97	3,03	$\pm 0{,}10$	2,30

Tabelle 2. Prozentuelle Häufigkeit der Mo-Isotope.

Massenzahl:	92	94	95	96	97	98	100	Atomgewicht
1. F. W. Aston	14,1	10,0	15,5	17,1	9,6	23,0	9,8	$95{,}94 \pm 0{,}06$
2. J. Mattauch u. (unkorr.)	15,5	8,7	16,3	16,8	8,7	25,4	8,6	$95{,}90 \pm 0{,}01$
3. H. Lichtblau (korr.) .	15,2	8,6	16,2	16,8	8,8	25,7	8,7	$95{,}92_5 \pm 0{,}01$
4. G. E. Valley	14,9	9,40	16,1	16,6	$9{,}6_5$	24,1	$9{,}2_5$	$95{,}92 \pm 0{,}01$

schriebenen Wege erhaltenen Werte von I_1/I_2 mit den berechneten wahrscheinlichen Fehlern wiederholt. Von den zur Berechnung der relativen Häufigkeiten der 7 Mo-Isotope notwendigen 6 Intensitätsverhältnissen liegen bei Mo glücklicherweise 4 (in Tabelle 1 die ersten 4) sehr nahe bei 1. Hier ist also das Ergebnis der Messungen, die immer auf der gleichen Einzelaufnahme (ohne Variation der Belichtungszeit) vorgenommen wurden, von der Gültigkeit des R. G. nahezu unabhängig. Anders bei den letzten beiden Verhältnissen $^{98}Mo/^{96}Mo$ und $^{96}Mo/^{94}Mo$; mit dem Produkt dieser beiden Werte stimmt sehr gut das zur Kontrolle ebenfalls gemessene Intensitätsverhältnis von $^{98}Mo/^{94}Mo$ überein. Tabelle 2 enthält in Zeile 2 die daraus berechneten Ergebnisse für die prozentuelle Häufigkeit und das chemische Atomgewicht, während in Zeile 1 die von Aston[1]) dafür als provisorisch angegebenen Werte aufgeführt sind. Für das Atomgewicht ergab sich bei uns eine außerhalb des Meßfehlers liegende Diskrepanz von 0,5 Promille zu dem von Hönigschmid und Wittmann[2]) auf chemischem Wege sehr genau bestimmten Wert von 95,95; die von diesen Autoren aufgeführten Einzelwerte zeigen Schwankungen erst in der dritten Dezimale.

[1]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London (A) **130**, 302, 1931. — [2]) O. Hönigschmid u. G. Wittmann, ZS. f. anorg. u. allg. Chem. **229**, 65, 1936.

Wir hatten seinerzeit unsere Werte nicht für die Änderung der Linienbreite mit der Lage der Linien auf der photographischen Platte korrigiert, da sich bei der Ausmessung der Photogramme eine solche für die verhältnismäßig eng beisammen liegenden Isotope nicht feststellen ließ. Doch ist es leicht denkbar, daß bei der großen Schärfe der Linien eine Änderung der Breite unter die Meßgenauigkeit fiel bzw. sich an der Basis der Maxima bemerkbar macht, wo die Meßgenauigkeit sehr gering ist. Vollständige Fokussierung vorausgesetzt, sollte im Mattauch-Herzogschen Massenspektrographen [1]) die theoretische Linienbreite $d\varrho$ proportional mit der Koordinate ϱ wachsen, die die Entfernung der Linie auf der Platte vom Eintrittspunkt der Strahlen in das Magnetfeld mißt; ϱ wiederum ist der Wurzel aus der Isotopenmasse proportional. Der theoretische Korrektionsfaktor für die Änderung der Linienbreite beträgt daher $\sqrt{A_1/A_2}$. Bei weit voneinander entfernten Linien kann man tatsächlich mit der Lupe leicht die Änderung der Linienbreite entlang der Platte verfolgen; wie wir ferner gelegentlich anderer Messungen immer wieder festgestellt haben, muß man, um etwa gleiche Schwärzung zu erhalten, der theoretischen Erwartung entsprechend die Expositionszeit verdoppeln, wenn man die gleiche Linie durch Änderung der Stärke des Magnetfeldes beim doppelten ϱ-Wert aufnimmt. Im Hinblick auf das folgende wollen wir also jetzt die an sich die Fehlergrenze kaum übersteigende Korrektur für die Linienbreite anbringen (s. Tabelle 1, Spalte 5). Tabelle 2 enthält in Zeile 3 die entsprechenden Ergebnisse für die prozentuellen Häufigkeiten und das Atomgewicht. Da die Korrektur systematisch die schweren auf Kosten der leichten Isotope begünstigt, wirkt sie sich im Atomgewicht verhältnismäßig stark aus.

Die Schwärzungskurven hatten jedoch für kleine Werte von t einen deutlichen Durchhang nach unten gezeigt und auch einen Schwellenwert angedeutet, beides typische Merkmale für die Lichtkurve [2]). Eine Durchsicht der Literatur ergab ferner, daß zwar für α-Strahlen [3]), β-Strahlen [4]), Kathoden- [5]) und Röntgenstrahlen [6]) in einer langen Reihe von sorgfältigen

---

[1]) J. Mattauch u. R. Herzog, ZS. f. Phys. **89**, 786, 1934. — [2]) Siehe z. B. W. Meidinger, Ergebnisse der angewandten physikalischen Chemie VI, Leipzig 1940, im Artikel „Röntgenphotographie" S. 477 ff. — [3]) S. Kinoshita. Proc. Roy. Soc. London (A) **83**, 432, 1909; T. R. Wilkins u. R. N. Wolfe, Journ. Opt. Soc. Amer. **23**, 324, 1933. — [4]) W. Bothe, ZS. f. Phys. **8**, 243, 1922; **13**, 106, 1923. — [5]) M. J. Nacken, Phys. ZS. **31**, 296, 1930; A. Becker u. E. Kipphan, Ann. d. Phys. (5) **10**, 15, 1931; V. Weidener, ebenda (5) **12**, 239, 1932; B. v. Borries u. M. Knoll, Phys. ZS. **35**, 279, 1934. — [6]) H. Krönke, Ann. d. Phys. **43**, 687, 1914; R. Glocker u. W. Traub, Phys. ZS. **22**, 351, 1921; A. Bouwers, Diss. Utrecht 1924; F. Luft, Fortschr. Röntgenstr. **46**, 55, 1932 und Agfa Ber. **3**, 245, 1933. Weitere Literatur siehe bei W. Meidinger, l. c.

Untersuchungen die Gültigkeit des R. G. über einen sehr großen Intensitäts- und Zeitbereich sowie für ein umfangreiches Plattenmaterial experimentell sichergestellt bzw. die Grenzen seiner Gültigkeit bei sehr langsamen Kathoden- und extrem weichen Röntgenstrahlen, ferner bei sehr verschiedenen Größenordnungen der Belichtungszeit untersucht worden waren, daß aber für rasche Kanalstrahlen[1]) nur eine einzige ältere Arbeit von Königsberger und Kutschewski[2]) sich mit dieser Frage beschäftigte. Nach diesen Autoren[3]) ist „die Schwärzung bei sonst gleichbleibenden Bedingungen der Teilchenzahl proportional. Sie verwandten photographisches Chlor-Bromsilber-Papier ‚Velox' der Kodak-Gesellschaft bei ihren Messungen". Daß diese Untersuchungen die bisher einzige experimentelle Stütze des R. G. bei Kanalstrahlen bilden, liegt wohl in der Schwierigkeit begründet, im Massenspektrographen anderweitig bekannte Veränderungen der Intensität der Ionenstrahlen vorzunehmen; bei anderen Strahlen dagegen kann das verhältnismäßig leicht durch Veränderung des Abstandes zwischen Strahlenquelle und Platte oder durch Zwischenschaltung bekannter Blenden geschehen.

Aus diesen Gründen wurde von dem einen von uns[4]) das photographische Verhalten der verwendeten Platten näher untersucht. Außer den Mo-Spektren auf den feinkörnigen, dafür aber wenig empfindlichen Q_1-Platten lagen Spektren von Nd[5]) und Cp[6]) auf den grobkörnigen, hochempfindlichen Q_3-Platten vor, die jedoch etwas zur Schleierbildung neigen. Ferner waren auf beiden Plattensorten Hg-Spektren vorhanden. Es zeigte sich, daß bei Q_3-Platten für schwere Ionen das gleiche einfache Schwärzungsgesetz gilt, das von Kinoshita (l. c.) für α-Strahlen aufgestellt worden war, während das bei Q_1-Platten nicht der Fall ist. Bei den Q_3-Platten reichte ferner das Material aus, um mit Hilfe der von Nier[7]) elektrometrisch gemessenen Isotopenverhältnisse bei Hg den Schwarzschild-Exponenten zu $p = 0{,}99 \pm 0{,}05$ zu bestimmen. Schwärzungskurven von Licht zeigten bei den Q_3-Platten Unähnlichkeit mit den entsprechenden Kurven für Kanalstrahlen, während sie bei den Q_1-Platten nahezu gleichartig verlaufen. Offenbar werden bei den ersteren in jedem von einem Ion getroffenen Korn der Schicht so viel neutrale Silberatome gebildet, als

---

[1]) Für Anodenstrahlen von Alkaliionen mit einer Energie von etwa 1000 e-Volt zeigte K. T. Bainbridge (Journ. Franklin Inst. **212**, 489, 1931) die Nichtgültigkeit des R. G. — [2]) J. Königsberger u. J. Kutschewski, Ann. d. Phys. **37**, 161, 1012. — [3]) Siehe Handb. d. Phys., Bd. XXII/2, Berlin 1933, Artikel E. Rüchardt: Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie, S. 88. — [4]) H. Lichtblau, Phys. ZS. **41**, 82, 1940. — [5]) J. Mattauch u. V. Hauk, Naturwissensch. **25**, 780, 1937. — [6]) J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. Phys. **111**, 514, 1939. — [7]) A. O. Nier, Phys. Rev. **52**, 933, 1937.

notwendig sind, um das Korn entwickelbar zu machen, ähnlich wie dies von α-Strahlen bekannt ist, während bei den letzteren hierzu mehrere Korntreffer erforderlich sind. Damit ist aber die strenge Gültigkeit des R.G. für Kanalstrahlen bei den Q_1-Platten in Frage gestellt. Denn die Mengen der bei den einzelnen Korntreffern gebildeten Silberatome brauchen durchaus nicht konstant zu bleiben und sich zu der für die Entwickelbarkeit nötigen Anzahl zu summieren, da Strukturänderungen im latenten Bild wie etwa Diffusions- und Rekombinationsvorgänge auftreten können; mit anderen Worten: es ist wahrscheinlich, daß es nicht gleichgültig ist, in welcher Zeit die für die Entwickelbarkeit des Korns notwendige Trefferanzahl erreicht wird.

Kürzlich hat nun Valley[1]) die Häufigkeiten der Mo-Isotope elektrometrisch gemessen (s. Tabelle 2, Zeile 4). Wie Valley bemerkt, liegen seine Werte, für die eine Genauigkeit von 1% beansprucht wird, zwischen denen von Aston und den unserigen. Ein Vergleich der Resultate ist aber nur möglich, wenn man aus den Angaben Valleys die Intensitätsverhältnisse der von uns gemessenen Isotopenpaare berechnet (s. Tabelle 1, Spalte 2). Wie man sieht, herrscht bei den in der Nähe von 1 liegenden und daher von der Gültigkeit des R.G. praktisch unabhängigen Intensitätsverhältnissen völlige Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen von Valley und von uns, besonders wenn man zum Vergleich die für die Linienbreite korrigierten Werte heranzieht; nur bei dem Verhältnis $^{97}Mo/^{100}Mo$ überschreitet die Abweichung etwas die Fehlergrenzen. Zum Unterschied davon zeigen die übrigen Intensitätsverhältnisse deutliche Unterschiede, die mit wachsendem I_1/I_2 merklich größer werden; wenn wir die elektrometrisch gemessenen Valleyschen Werte als richtig annehmen, haben wir immer die schwächere Komponente eines Linienpaares zu schwach gemessen, wie es sein muß, wenn das R.G. für Q_1-Platten nicht gilt und $p < 1$ ist. Das trifft für Licht bei Q-Platten, wie eine frühere Untersuchung zeigte[2]), wenigstens solange zu, als man sich in dem Schwärzungsintervall bewegt, das für die Messungen mit Kanalstrahlen benutzt worden war.

Wir können nun aus den Verhältnissen $^{98}Mo/^{96}Mo$, $^{96}Mo/^{94}Mo$ und $^{95}Mo/^{94}Mo$ nach Gleichung (2a) den Schwarzschild-Exponenten p berechnen, indem wir für I_1/I_2 die mit $\sqrt{A_2/A_1}$ multiplizierten Valleyschen Werte der Spalte 2 der Tabelle 1 benutzen und für t_2/t_1 die von Spalte 4 einsetzen; denn wir haben ja unsere Intensitätsverhältnisse unter Benutzung von Gleichung (1a) erhalten. Wir bekommen damit allerdings nur Durchschnitts-

[1]) G. E. Valley, Phys. Rev. 57, 945 A, 1940. — [2]) H. Lichtblau, l. c.

Tabelle 3. Intensitätsverhältnisse und prozentuelle Häufigkeit der Mo-Isotope. Neu berechnet mit Schwarzschild-Exponent $p = 0{,}86$.

A_1/A_2	95/92	96/95	94/97	97/100	98/96	96/94	(98 94) Kontr.
I_1/I_2	1,010	1,035	0,981	1,003	1,438	1,778	2,59 beob. 2,56 ber.

Massenzahl	92	94	95	96	97	98	100	Atomgewicht
Proz. Häufigkeit .	15,1	9,3	16,1	16,6	9,5	23,9	9,5	$95{,}01_5 \pm 0{,}01$

werte für p, da p von Platte zu Platte verschieden sein kann und die Intensität bei den einzelnen Aufnahmen variierte. Da aber Platten derselben Emulsionsnummer verwendet wurden und größere Intensitätsschwankungen selten waren, ist das Verfahren wohl berechtigt. Es ergeben sich so für p die Werte 0,88 (^{98}Mo/^{96}Mo), $0{,}84_5$ (^{96}Mo/^{94}Mo) und $0{,}84_5$ (^{98}Mo/^{94}Mo), die überraschend gut übereinstimmen. Es ist also anzunehmen, daß für das benutzte Intensitätsintervall die Schwarzschildsche Beziehung im Mittel recht gut erfüllt ist. Wir haben daher nach Gleichung (2a) sämtliche Verhältnisse I_1/I_2 neu berechnet, indem für p das mit Hilfe der Anzahl n der Einzelbeobachtungen gewichtete Mittel 0,86 eingesetzt wurde. Die so erhaltenen Intensitätsverhältnisse, sowie die prozentuellen Häufigkeiten der Mo-Isotope und das Atomgewicht sind in Tabelle 3 zusammengefaßt. Die Ergebnisse stimmen nun mit den Valleyschen gut überein, was aber nicht weiter verwundern kann, da wir ja mit Hilfe der elektrometrischen Werte übereinstimmende Schwarzschild-Exponenten erhalten haben. Obwohl durch die Ungültigkeit des R. G. und die Benutzung der Schwarzschildschen Beziehung sich die prozentuellen Häufigkeiten z. T. viel stärker geändert haben als durch die Korrektur für die Linienbreite, bleibt die Neuberechnung fast ohne Einfluß auf das Atomgewicht; denn diesmal wurden die Werte der selteneren Isotope auf Kosten der häufigen gehoben und es existiert keine monotone Beziehung zwischen Häufigkeit und Massenzahl. Ob man unsere neu berechneten oder die Valleyschen Werte zugrunde legt, die Diskrepanz mit dem chemisch bestimmten Atomgewicht wird nur zu etwa zwei Fünftel überbrückt. Sie erscheint noch immer zu groß, um auf Packungsanteil oder Umrechnungsfaktor geschoben werden zu können.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie.

Zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung. I.

Von **Nobutsugu Koyenuma** in Tokyo, z. Z. Berlin.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 6. Dezember 1940.)

Eine nähere Betrachtung des Wendepunktes der biologischen Strahlenschädigungskurve führt zur Aufstellung einer Funktion, aus der die Trefferzahl berechnet werden kann.

Wird ein biologisches Testobjekt mit der Dosis D bestrahlt, so kann bekanntlich die Strahlenschädigung des Objektes durch die folgende Formel[1]) dargestellt werden:

$$\frac{y}{y_0} = 1 - e^{-\sigma D}\left(1 + \sigma D + \frac{(\sigma D)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\sigma D)^{n-1}}{(n-1)!}\right). \qquad (1)$$

Hierbei bedeutet y_0 die Zahl der lebenden Individuen vor der Bestrahlung, y die Zahl der überlebenden Individuen und n die sogenannte Trefferzahl, welche besagt, daß ein Individuum dann geschädigt ist, wenn es wenigstens n-mal wirksam getroffen wurde. Es ist weiter $x = \sigma D$, wobei σ ein Maß für die Wirksamkeit[2]) der Strahlung ist. Wenn auch die Gleichung (1) auf Grund von ganz allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen aufgestellt werden kann, so wurde ihr Inhalt von verschiedenen Verfassern[3]) weiterhin doch vor allem für das Gebiet der Röntgenstrahlen weitgehend dadurch vertieft, daß der Begriff des biologischen Treffers und die ursprünglich allgemein gehaltene Einwirkungskonstante σ schärfer definiert wurden. Auch die Versuche, die unter verschiedenen Versuchsbedingungen erhaltenen experimentellen Schädigungskurven mit den entsprechenden theoretischen Kurven in Übereinstimmung zu bringen, führten zu einem weiteren Ausbau der Theorie der biologischen Strahlenschädigung. Eine gewisse Rolle spielte dabei die Frage, wie aus einer experimentellen Kurve die Trefferzahl erhalten werden kann. Es sind hierfür verschiedene Verfahren angegeben worden, die mehr oder weniger kompliziert und zuverlässig in ihrer Anwendung sind. Über eine relativ einfache Möglichkeit soll im folgenden berichtet werden.

---

[1]) M. Blau u. K. Altenburger, ZS. f. Phys. **12**, 315, 1924. — [2]) Diese wird in der Mitteilung 3 (im Druck) vollständig anders als die bis jetzt berichteten abgeleitet. — [3]) F. Dessauer, ZS. f. Phys. **12**, 38, 1923; R. Glocker, ebenda **77**, 653, 1932; R. Glocker u. A. Reuss, Strahlentherapie **46**, 137, 1933; H. u. M. Langendorff u. A. Reuss, ebenda **46**, 289, 1933; R. Glocker, H. Langendorff u. A. Reuss, ebenda **42**, 148, 1931; A. Zuppinger, ebenda **28**, 639, 1928; J. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. London (A) **96**, 207, 1924; usw.

Die erste Differentiation der Formel (1) in bezug auf x stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß mindestens n-mal getroffen wird. Sie ist gleich der Poissonschen Verteilung, deren Ableitung bekanntlich die Stelle gibt, wo der Wendepunkt der Kurve auf der Abszisse gemessen wird (siehe Fig. 1).

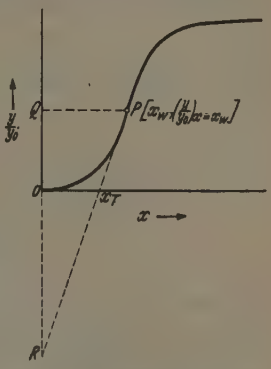


Fig. 1. Die Gleichung (1), wobei $QR = \bar{y}_w$, PR = Tangente.

Eine zweimalige Differentiation der Formel (1) ergibt

$$n - 1 = x_w = \sigma D_w.$$

σ, ein Maß für die Wirksamkeit der Strahlen kann auch als Trefferwahrscheinlichkeit angesehen werden. Wenn die Tangente der Kurve an den Wendepunkt gelegt und bis zum Schnittpunkt mit der Y-Achse verlängert wird, und wenn ferner von dem Wendepunkt aus eine zur Abszissenachse parallele Linie ebenfalls bis zum Schnittpunkt mit der Y-Achse gezogen wird, dann kann für den Abstand der beiden Schnittpunkte, der $\bar{y}_w$ genannt werde, die folgende Formel gewonnen werden:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)_{x=x_w} = \frac{\bar{y}_w}{x_w} = \left(\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{x=x_w}, \tag{2}$$

oder anders geschrieben:

$$\bar{y}_w = \frac{e^{-(n-1)}(n-1)^{n-2}}{(n-2)!}\cdot(n-1) = \frac{e^{-(n-1)}(n-1)^{n-1}}{(n-2)!}. \tag{2'}$$

Bei großem n kann dieser Ausdruck durch Benutzung der Stirlingschen Formel übergeführt werden in

$$\bar{y}_w = \sqrt{\frac{(n-1)}{2\pi}}. \tag{3}$$

Die Trefferzahl n läßt sich damit aus $\bar{y}_w$ leicht ermitteln. Einen etwas anderen Weg zur Bestimmung von n schlug Jordan[1]) ein.

Er berechnete unter Benutzung der Größe $\bar{y}_w$ die entsprechende Größe $\bar{y}_{x=x_{1/2}}$ für den der „Halbwertdosis" entsprechenden Kurvenpunkt und fand dafür den Ausdruck

$$(\bar{y})_{x=x_{1/2}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}. \tag{4}$$

[1]) P. Jordan, Funda. Radiol. 2, 166, 1938.

Auch aus dieser Beziehung läßt sich sehr leicht die Trefferzahl gewinnen. Ich möchte hier eine andere Methode darlegen, die dem gleichen Ziel gerecht wird. Wenn in der Formel (1) für x der Wert $x_w = n - 1$ eingesetzt wird, so gilt für den Wendepunkt der Kurve die Beziehung:

$$(y)_{x=x_w} = y_0\left(1 - e^{-(n-1)}\left(1 + \frac{n-1}{1!} + \frac{(n-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right), \quad (5)$$

oder

$$(y)_{x=x_w} = y_0\Big(1 - e^{-(n-1)}\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\Big(1 + \frac{n-1}{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)^2} + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(n-1)^{r-1}} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}\Big)\Big). \quad (6)$$

Das r-te Glied der Reihe sei $\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(n-1)^{r-1}}$. Wird nun n so groß angenommen, daß eine Taylorsche Entwicklung möglich ist, dann kann die Logarithmierung dieses Gliedes auch geschrieben werden als

$$\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(n-1)^{r-1}} = \ln\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{n-1}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{r-2}{n-1}\right).$$

Es ergibt sich damit weiterhin:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(n-1)^{r-1}} = \sum_{r=0}^{n-1} e^{-\frac{r(r-1)}{2(n-1)}} \quad \text{(1. Ordn.)}, \quad (7)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} e^{-\frac{r(r-1)}{2(n-1)}\left(1+\frac{2r-1}{3(n-1)}\right)} \quad \text{(bis 2. Ordn.)}. \quad (8)$$

Um die Trefferzahl zu berechnen, genügt hier die Abschätzung der ersten Ordnung (7). Es bleibt nur übrig, die Reihe (7) auszurechnen. Sie wird dazu in die folgende Integralform gebracht:

$$\sum_{r=0}^{n-1} e^{-\frac{r(r-1)}{2(n-1)}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r(r-1)}{2(n-1)}}\,\mathrm{d}r. \quad (9)$$

Wird statt r die neue Variable $r_1 = r - 1/2$ eingeführt, so gilt unter Berücksichtigung der neuen Grenzen

$$\int_{-1/2}^{\infty} = \int_0^{\infty} + \int_0^{1/2}.$$

Weiterhin ist bekanntlich

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Damit wird

$$e^{\frac{1}{8(n-1)}} \int_{-1/2}^{\infty} e^{-\frac{r_1^2}{2(n-1)}} dr_1 = e^{\frac{1}{8(n-1)}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{r_1^2}{2(n-1)}} dr_1 + \int_0^{1/2} e^{-\frac{r_1^2}{2(n-1)}} dr_1 \right\}.$$

Das erste Integral der rechten Seite ergibt $\frac{1}{2}\left(2\pi(n-1)\right)^{1/2}$; das zweite kann mittels Reihenentwicklung integriert werden. Man erhält so

$$\int_0^{1/2} e^{-\frac{r_1^2}{2(n-1)}} dr_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{48(n-1)} + \frac{1}{1280(n-1)^2} - \frac{1}{43008(n-1)^3} + \cdots.$$

Damit wird

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r(r-1)}{2(n-1)}} dr = e^{+\frac{1}{8(n-1)}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi(n-1)}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{48}(n-1)^{-1} + \frac{1}{1280}(n-1)^{-2} - \cdots \right\}. \quad (10)$$

Blicken wir auf die Formel (6) zurück, so erhalten wir endlich durch Kombination von (6), (7) und (10) und unter Anwendung der Stirlingschen Formel auf $e^{-(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$(y)_{x=x_w} = y_0 \left\{ 1 - e^{\frac{1}{8(n-1)}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2\pi(n-1)\right)^{-1/2} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{1}{48}(2\pi)^{-1/2}(n-1)^{-3/2} + \cdots \right) \right\}. \quad (11)$$

Wenn der Ausdruck $e^{\frac{1}{8(n-1)}}$ in (11) in eine Potenzreihe entwickelt wird, erhält man

$$(y)_{x=x_w} = y_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\pi(n-1)\right)^{-1/2} - \frac{1}{16}(n-1)^{-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{24}(2\pi)^{-1/2} \cdot (n-1)^{-3/2} - \cdots \right\}. \quad (12)$$

Es genügt, die vier ersten Entwicklungsterme zu berücksichtigen, die weiteren können bei großem n vernachlässigt werden. Aus der Beziehung (12) ist leicht einzusehen, daß sich der Wert von y_{x_w}/y_0 bei wachsendem n dem Wert $^1/_2$ nähern wird. Im allgemeinen ist jedoch $y_{x_{1/2}}/y_{x_w} > 1$.

Die Gleichung der Wendepunktstangente lautet

$$\frac{1}{y_0}\left(y - (y)_{x=x_w}\right) = \left(2\pi(n-1)\right)^{-1/2}(x - x_w). \quad (13)$$

Wenn $y = 0$ gesetzt wird, dann erhält man den gewünschten Abstand

$$\overline{O\,T_T} = n - 1 - \left(2\pi(n-1)\right)_{1/2} \times$$
$$\times \left(1 - e^{\frac{1}{8(n-1)}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2\pi(n-1)\right)^{-1/2} - \frac{1}{48}(2\pi)^{-1/2} \cdot (n-1)^{-3/2} + \cdots \right) \right),$$

oder approximativ

$$\overline{OX}_T = n - \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)^{1/2} + \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi}{(n-1)}\right)^{1/2} + \frac{1}{24(n-1)} - \cdots. \quad (14)$$

Der Abstand $\overline{OX}_T$ hängt also, wie die Beziehung (14) zeigt, nur von der Größe n, d. h. von der Trefferzahl ab. Letztere kann demnach aus einer experimentell gewonnenen Kurve mit Hilfe von (14) einfacherweise berechnet werden. Es ist dazu nur nötig, die Wendepunktstangente zu zeichnen und die Strecke $\overline{OX}_T$ zu messen. Es ist interessant, die hier vorgeschlagene Berechnungsmethode der Trefferzahl mit anderen in der Literatur vorgeschlagenen Methoden an Hand eines praktischen Beispiels miteinander zu vergleichen. Es werden dazu experimentelle Schädigungskurven benutzt, die Schreiber bei dem Testobjekt Saccharomyces turbidans Hansen erhalten hat[1]). Die folgende Tabelle zeigt: Die vom Verfasser berechneten Trefferzahlen stimmen mit den von den anderen Autoren ermittelten Werten gut überein.

Tabelle 1.

Methode nach	Trefferzahl für	
	254 mμ	230 mμ
Curie[2])	7	32
Jordan[3])	6	31
Furch[4])	6	24
Schreiber[1])	6	29
Verfasser	6	27

Der Verfasser erlaubt sich, der Alexander von Humboldt-Stiftung für das Forschungsstipendium herzlichst zu danken.

Berlin, Institut für Strahlenforschung der Universität, Dezember 1940.

[1]) H. Schreiber, Strahlentherapie **49**, 541, 1934. — [2]) P. Curie, C. R. hebd. Seances Acad. Sci. **188**, 202, 1929. — [3]) P. Jordan, l. c. — [4]) R. Furch, ZS. f. Phys. **112**, 92, 1939.

Elektronen-Übermikroskop mit wahlweise einschaltbarer Elektronensonde zur Herstellung von Elektronenbeugungsdiagrammen bestimmter kleiner Bezirke des Gesichtsfeldes.

Von **Manfred von Ardenne**, Berlin-Lichterfelde.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Januar 1941.)

Durch Einschaltung eines kurzbrennweitigen Kondensors in das normale Elektronen-Übermikroskop gelingt es, von bestimmten, sehr kleinen und einstellbaren Bereichen übermikroskopischer Präparate Beugungsdiagramme zu gewinnen. Die konstruktive und praktische Durchführung des Prinzips beim Universal-Elektronenmikroskop wird besprochen, mit dem ein Durchmesser des zu analysierenden Objektbereiches von 1 μ erreicht worden ist. Dieser Wert dürfte bereits die Deutung vieler Strukturen in übermikroskopischen Aufnahmen erlauben.

Die Mehrleistung der modernen Elektronen-Übermikroskope gegenüber den Lichtmikroskopen ist so groß, daß die Deutung der Bilder in der übermikroskopischen Forschung oft die allergrößten Schwierigkeiten bereitet. In vielen Fällen ist eine Klarstellung der gesehenen Einzelheiten zur Zeit überhaupt nicht möglich, d. h. man sieht zwar auf den Aufnahmen Substanzen mit charakteristischen Strukturen, kann jedoch über ihre Natur und ihre Bedeutung noch keine Auskunft erhalten. Ein Hilfsverfahren, mit dem möglichst punktweise das Gesichtsfeld des Übermikroskops abgetastet werden kann und das die an der Abtaststelle lokal gegebene Substanz zu analysieren gestatten würde, hat daher für die übermikroskopische Technik und Forschung grundsätzliche Bedeutung.

Das Verfahren der Substanzanalyse durch Aufnahme von Elektronenbeugungsdiagrammen läßt sich, wie im Rahmen dieser Mitteilung gezeigt werden soll, so variieren, daß die eben gestellte Aufgabe gut gelöst wird. Die Kombination von elektronenmikroskopischer Abbildung und Elektronenbeugung ist schon seit der ersten Mitteilung[1]) über die elektronenmikroskopische Abbildung zusammenhängender Objekte mit Durchstrahlung bekannt. Sie ist beispielsweise von O'Daniel[2]) und Ruska[3]) neuerdings erfolgreich zur Analyse der Objektsubstanzen angewandt worden. Stets ist jedoch bisher die Anordnung so gewählt worden, daß entweder die ganze Bohrung des Objektträgers oder doch das ganze Gesichtsfeld des hoch

[1]) B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. Phys. **83**, 187, 1933. — [2]) H. O'Daniel u. O. E. Radczewski, Naturwiss. **28**, H. 39, 628, 1940. — [3]) E. Ruska, Aufnahme von Elektronenbeugungsdiagrammen im Übermikroskop. Wiss. Veröff. aus den Siemens-Werken. Werkstoff-Sonderheft 1940.

vergrößerten Endbildes (Durchmesser etwa 10 μ) während der Aufnahme des Beugungsdiagramms durchstrahlt wird. Man hat daher, um zu guten Diagrammen zu gelangen, sich auf die Untersuchung möglichst gleichmäßig zusammengesetzter, das ganze Gesichtsfeld bedeckender Objektschichten beschränkt.

Auch die interessanten Beugungsversuche mit sehr feinen Elektronenstrahlen, die von Boersch [1]) beschrieben worden sind, bilden noch keine Lösung der oben formulierten Aufgabe, da auch bei ihnen der Durchmesser des Elektronenstrahles in der Objektebene noch Werte zwischen 5 und 10 μ aufweist und außerdem keine Objektabbildung mit übermikroskopischer Auflösung stattfindet. Das Ziel der Untersuchung von Boersch war eben ein anderes, nämlich höchste Auflösung im Beugungsdiagramm zu erreichen. In der zuletzt zitierten Arbeit ist bereits ein elektronenoptisches Verfahren zur Feststellung des Ursprungsortes des Beugungsdiagramms angegeben

Prinzip. Erst Elektronenstrahlen mit Durchmessern von etwa 1 μ und darunter ermöglichen die Analyse übermikroskopischer Präparate in kleinen Zonen und damit Untersuchungen an Objekten mit ungleichmäßiger Substanzverteilung im Gesichtsfeld. Die zur Lösung obiger Aufgabe getroffene *Kombination einer Feinstrahl-Elektronenbeugungseinrichtung (Strahldurchmesser 1 μ und darunter) mit einem magnetischen Elektronen-Übermikroskop* ist durch die drei Darstellungen Fig. 1 A, B und C eingehend erläutert. In diesem Zusammenhang sei ausdrücklich erwähnt, daß die gleiche Kombination auch beim elektrostatischen Übermikroskop leicht getroffen werden kann und dort wahrscheinlich aus konstruktiven Gründen sogar einfacher zu realisieren ist. Die zur Aufnahme der Feinstrahl-Beugungsdiagramme erforderliche Querschnittsverringerung in der Objektebene wird bei der Anordnung Fig. 1 ähnlich wie bei früher beschriebenen Anordnungen mit Elektronensonde [2]) durch elektronenoptische Verkleinerung der Elektronenquelle bewirkt. Diese Verkleinerung übernimmt ein *zusätzlicher und wahlweise einschaltbarer Kondensor kurzer Brennweite.*

Der Bedienungsablauf bis zur Aufnahme des Beugungsdiagramms führt über folgende Stadien:

a) Unter Anwendung des normalen (langbrennweitigen) Kondensors und Ausschaltung des Hilfskondensors kurzer Brennweite wird der ganze Gesichtsfeldausschnitt des Objektes im Übermikroskop betrachtet bzw.

[1]) H. Boersch, ZS. f. Phys. **116**, 469, 1940. — [2]) M. v. Ardenne, ebenda **109**, 553, 1938; vgl. ferner M. v. Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie, Verlag G. Springer, 1940, S. 70, wo auf die schon von P. Thiessen vorgeschlagene Anwendung der Elektronensonde des Verfassers für Elektronenbeugung an feinsten Partikeln und Fasern hingewiesen ist.

photographiert und diejenige Objektstelle bestimmt, die durch Elektronenbeugung analysiert werden soll (Fig. 1 A).

b) Nach Ausschaltung des normalen Kondensors und Einschaltung des kurzbrennweitigen (sehr genau zu zentrierenden) Kondensors wird

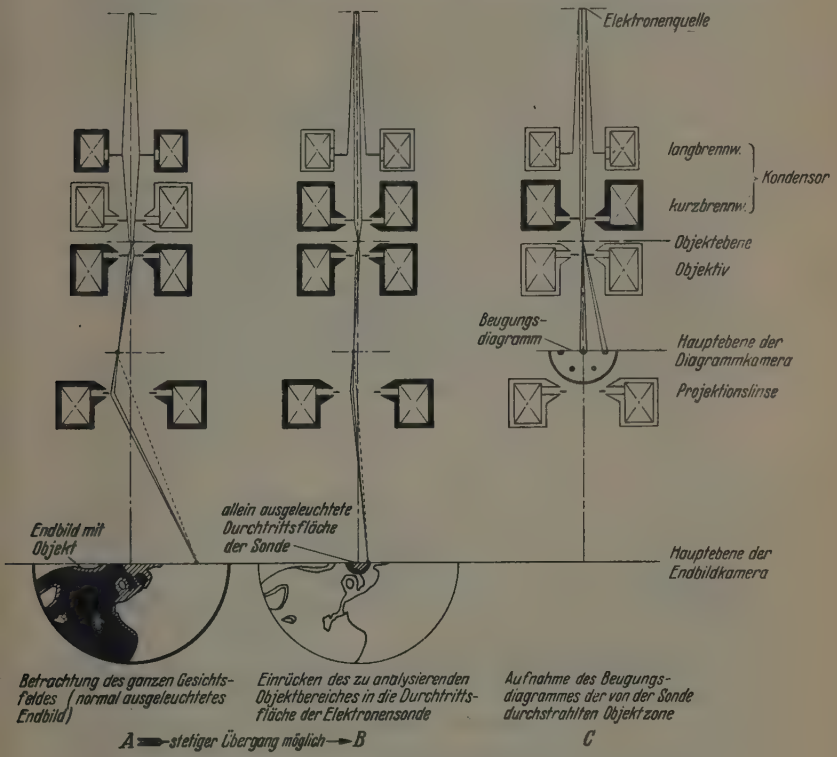


Fig. 1. Die drei charakteristischen Strahlengänge beim Elektronenmikroskop mit wahlweise einschaltbarem Kondensor kurzer Brennweite zur Herstellung von Beugungsdiagrammen bestimmter kleiner Bezirke des Gesichtsfeldes.

insbesondere unter Beobachtung des Endbildleuchtschirmes größte Sondenschärfe eingestellt und mit Hilfe der üblichen Objektbewegung die zu analysierende Objektstelle in die (allein ausgeleuchtete) Durchtrittsfläche der Elektronensonde eingerückt (Fig. 1 B).

c) Unmittelbar anschließend wird unter Konstanthaltung von Beschleunigungsspannung und Hilfskondensorstrom der Objektiv- (und Projektionslinsen-) Stromkreis unterbrochen und das Beugungsdiagramm in

der (aus Intensitätsgründen) zweckmäßig etwa 20 cm hinter dem Objekt liegenden Diagrammkamera aufgenommen (Fig. 1 C).

Selbstverständlich unterliegt diese Variation des Elektronenbeugungsverfahrens den bekannten Beschränkungen bei der Deutung der Diagramme, d. h. wenn die durchstrahlte Zone nur einen einzigen Einkristall erfaßt (und das ist bei dem kleinen Sondendurchmesser häufig der Fall), so gestattet

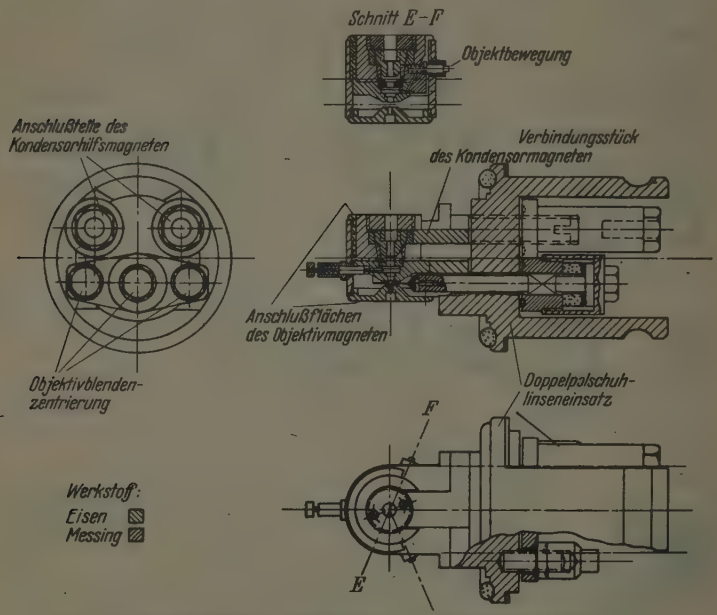


Fig. 2. Doppelpolschuhlinsen-Einsatz zum Universal-Elektronenmikroskop.

das Beugungsdiagramm wegen der im allgemeinen unbekannten Kristallorientierung nur die Entscheidung, daß die Substanz in kristalliner und nicht in amorpher Form vorliegt. Immerhin besteht bei vielen Kristallformen gerade für diese Einkristalle mit größeren Abmessungen die Möglichkeit, aus einer Stereoaufnahme oder zuweilen auch aus dem einfachen Elektronenbild die Orientierung zu ermitteln. — Sind dagegen in dem durchstrahlten Raume viele kleine Kristallite enthalten, so kommt ein mehr oder weniger ausgeprägtes Pulverdiagramm zustande, aus dem die üblichen Rückschlüsse gezogen werden können.

Konstruktive Durchführung beim Universal-Elektronenmikroskop. Die bequeme Auswechselbarkeit des ganzen Objektivsystems, die besonders weit getriebenen Zentriermöglichkeiten, ferner die zur Aufnahme von Dunkel-

feldbildern vorgesehene Konstanz aller Betriebsverhältnisse über Belichtungszeiten bis zu mehreren Minuten und schließlich die Geometrie des normalen Kondensorsystems ließen beim *Universal-Elektronenmikroskop*[1]) die praktische Durchführung des besprochenen Prinzips relativ einfach erscheinen. Der kurzbrennweitige Kondensor wurde durch Einfügung einer zusätzlichen Polschuhlinse nach Ruska und v. Borries in das Instrument eingebaut.

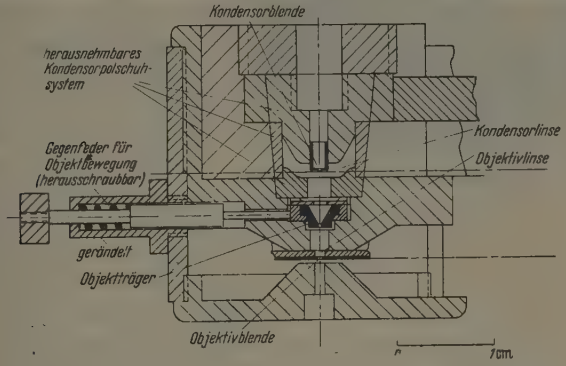


Fig. 3. Teilskizze der Doppelpolschuhlinse mit Sondenkondensor für Feinstrahl-Elektronenbeugung.

Bei dem in Fig. 2 dargestellten und in Fig. 3 z. T. vergrößert herausgezeichneten[2]) Doppelpolschuhlinsen-Einsatzes, der an Stelle des einfachen Objekt-Objektiveinsatzes seitlich in das Universal-Elektronenmikroskop eingesetzt werden kann, beträgt die Kondensorbrennweite etwa 5 mm. Die Kondensorblende hat den Wert von nur 5 μ, so daß ein Öffnungsverhältnis von 10^{-3} resultiert, d. h. ein Aperturwert, der auch bei normalen Elektronenbeugungsgeräten üblich ist. Schon mit dem normalen Abstand der Strahlenquelle von 45 cm erreicht die elektronenoptische Verkleinerung im Kondensorsystem fast den Wert 1 : 100 (gegenüber einem Abbildungsverhältnis 1 : 2 beim normal betriebenen Universal-Elektronenmikroskop und 1 : 1 bei anderen Übermikroskopen). Der Kondensor bildet den engsten Querschnitt des Strahlenbündels im Strahlenzeugungssystem ab. Dieser engste Querschnitt hat bei 60 bis 80 kV Strahlerzeugungsspannung und bei dem für beugungs- und elektronen-übermikroskopische Aufnahmen erforderlichen Strahlströmen von 20 bis 50 μA einen Durchmesser von etwa 50 μ. Bei dem vorerwähnten Verkleinerungsverhältnis ergibt sich daher theoretisch ein *Durchmesser des Elektronenstrahles in der Objektebene* von nur 0,5 μ.

[1]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **115**, 339, 1940. — [2]) Einige Abmessungen der Fig. 3 sind im Laufe der praktischen Versuche verändert worden.

Die Intensitätsverhältnisse bei der Aufnahme von Beugungsdiagrammen bedingen eine Grenze für die Verringerung des Sonderdurchmessers[1]). Um diese Grenze möglichst weit hinauszurücken, empfiehlt es sich, das Beugungsdiagramm nicht in der normalerweise weit entfernten Endbildkamera aufzunehmen, sondern den durch das Auflösungsvermögen der photographischen Schicht bedingten Mindestabstand anzuwenden. Bei Elektronengeschwindigkeiten von 60 bis 80 kV und bei Ausnutzung der bekannten Vorteile[2]) bindemittelfreier Schumann-Schichten sind Beugungslängen von unter 10 bis 20 cm vorteilhaft. Die Beugungskamera muß daher zwischen Objektiv und Projektionslinse angeordnet werden. Die Einschaltung an dieser Stelle bringt den weiteren Vorteil mit sich, daß schon auf kleinen Plattenformaten Diagrammreihen festgehalten werden können, daß ein Umbau des Projektionslinsensystems zur Aufnahme von Beugungsdiagrammen nicht erforderlich ist und daß die gleiche Kamera auch zur Ausnahme von Übersichtsbildern, insbesondere Dunkelfeldbildern mit besonders großem Gesichtsfeld verwendet werden kann. Nicht zuletzt auch dank des günstigen Richtstrahlwertes im Strahlerzeugungssystem ergeben sich für Sondendurchmesser von 0,5 μ noch vollkommen ausreichende Intensitätsverhältnisse (Belichtungszeiten < 1 Minute). Ein Beugungsstrahldurchmesser von 0,5 μ, der in Hinblick

Fig. 4. Die praktische Ausführung der kurzbrennweitigen Doppellinse.

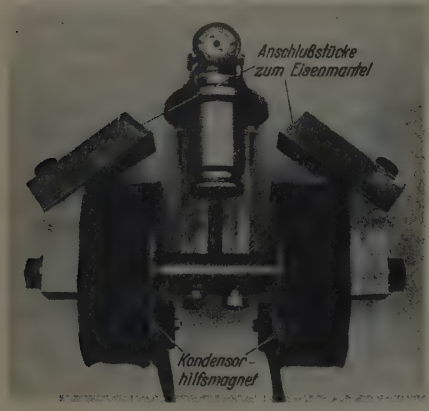


Fig. 5. Doppelpolschuhlinsen-Einsatz mit angesetztem Hilfsmagnet.

[1]) Über die Intensitätsverhältnisse bei der Sonde vgl. die Literatur der 5. Anmerkung. — [2]) M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **114**, 379, 1939.

auf die noch bestehende Intensitätsreserve leicht weiter herabgesetzt werden kann[1]), dürfte für die Untersuchung der meisten übermikroskopischen Präparate schon ausreichen.

Die eingangs gestellte Aufgabe wird nur gelöst bzw. die Bedienung der Anlage gestaltet sich nur dann einfach, wenn der einmal eingestellte und ermittelte Ort der Sonde bei der Umschaltung des Übermikroskops auf Beugung sich nicht kritisch verändert. Diese Forderung ist bei dem in Fig. 2 und 3 gezeichneten und in Fig. 4 photographierten Doppelpolschuhlinsen-Einsatz durch Verwendung voneinander unabhängiger magnetischer Kreise für die beiden konstruktiv miteinander vereinigten Linsensysteme erfüllt. Die magnetische Erregung der Polschuhe des kurzbrennweitigen Kondensors erfolgt durch den in Fig. 5 mit aufgenommenen kräftigen Elektromagneten, der nachträglich außen mit der Linseneinheit verbunden wird. Der Hilfskondensor ist so bemessen, daß die magnetischen Verhältnisse und damit das Leistungsvermögen des mit ihm kombinierten Mikroskopobjektivs nicht merklich gestört werden.

Praktische Ergebnisse. Bei der praktischen Erprobung waren nicht unerhebliche Schwierigkeiten zu überwinden. So gelang es beispielsweise erst nach viermaligem Umbau der Doppelpolschuhlinse, die magnetischen Widerstände der Zuleitungen zu den Kondensorpolschuhen so weit zu verringern, daß sich die erforderliche kurze Brennweite ergab. — Wesentlich für das Erreichen kleiner Sondendurchmesser war weiterhin die Vermeidung isolierender Flächen und Filme im Raume zwischen kurzbrennweitigem Kondensor und Elektronenquelle. Bei den relativ starken Strömen in diesem Raume bewirken beispielsweise Fettfilme im Innern der Abschirmröhren so heftige Schlieren im elektronenoptischen Strahlengang des Kondensorsystems, daß der Sondendurchmesser sehr viel größere Werte annimmt als theoretisch aus dem Verkleinerungsverhältnis sich ergibt. Für eine regelmäßige Anwendung des Verfahrens würde es sich empfehlen, eine Sonderkonstruktion des ganzen oberen Mikroskopteiles unter Anwendung der schon früher beschriebenen[2]) fettfreien Vakuumventile und sorgfältig bemessener Abschirmungen auszubilden. Auch die Verteilung der Verkleinerung im Kondensorsystem auf zwei Stufen erscheint zur Herabsetzung der Schlierenstörung nützlich. Hierzu kann der Hauptkondensor nach Umstellung auf kürzere Brennweite (größerer Linsenstrom, Polschuheinsatz) gleich mit herangezogen werden. Bereits mit dem normalen Universal-Elektronenmikroskop konnten die im folgenden Absatz beschriebenen Ergebnisse erzielt werden.

---

[1]) Z. B. auf 0,1 μ bei Diagrammbelichtungszeiten von einigen Minuten. — [2]) Elektronen-Übermikroskopie, l. c. Abb. 125.

Ein *Übersichtselektronenbild* von Zinkweiß-Kristallen zeigt Fig. 6. Fig. 7 bringt eine *Aufnahme mit Sonde aus dem gleichen Objektausschnitt.* Die Durchtrittsfläche der Sonde, die hier einen Durchmesser von 1 μ aufweist, ist in Fig. 6 mit eingezeichnet. Deutlich ist die charakteristische Struktur der erfaßten Kristallgruppe in Fig. 7 wiederzuerkennen. Daß der Sondendurchmesser in Fig. 7 nicht ganz den berechneten Wert von 0,5 μ

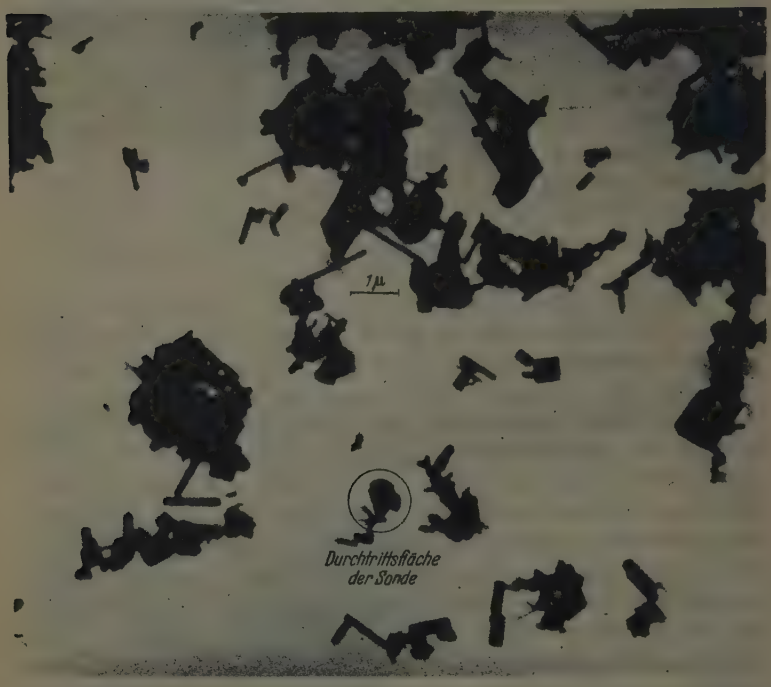


Fig. 6. Elektronenaufnahme (Übersichtsbild) von Zinkweiß auf Kollodiumfolie.

erreicht, dürfte auf Fettfilme zurückzuführen sein, die sich im Innern der Abschirmröhrchen des oberen Schleusenhahnes rasch neu bilden, und die bei dem normalen langbrennweitigen Kondensor noch nicht stören. Nicht immer zeigten die Sondenbilder den Objektausschnitt unverzerrt wie in Fig. 7. Zum Teil waren Verzerrungen durch Aufladeerscheinungen am Objekt zu beobachten. Offenbar spielen die Sekundäremulsionsverhältnisse am Objekt bei der Abbildung mit feinen Sonden eine sehr viel größere Rolle als bei der Abbildung mit großen Strahlquerschnitten.

Im Sinne des Themas dieser Mitteilung wurden auch Beugungsbilder mit bestimmten Sondenlagen eingestellt. Die Diagramme waren auf dem Zwischenbildleuchtschirm, da die Beobachtung durch die den Primärstrahl hindurchlassende Mittelbohrung des Schirmes sehr erleichtert war, noch leidlich erkennbar. Nach Erfahrungen an früheren Beugungsaufnahmen dürften die zur richtigen Durchbelichtung dieser Diagramme erforderlichen Zeiten bei etwa 30 Sekunden liegen. Leider war eine photographische Fixierung der *visuell beobachteten Feinstrahldiagramme* nicht möglich, da bei dem Universal-Elektronenmikroskop eine Kamera im Raume zwischen Objekt- und Projektionslinsensystem nicht vorgesehen ist und die gegebene, relativ enge Bohrung der Pole des Projektionslinsenmagneten die Aufnahme von Beugungsdiagrammen mit der normalen Endbildkamera nicht zuläßt. Die gebrachten Elektronenbilder und die mitgeteilten Beobachtungen dürften jedoch genügen, um zu zeigen, daß die experimentelle Verwirklichung des vorgeschlagenen Verfahrens gelingt.

Fig 7. Aufnahme mit Elektronensonde von einer Kristallgruppe aus dem Gesichtsfeld der Fig. 6.

Das Anwendungsgebiet der beschriebenen Feinstrahl-Elektronenbeugung mit elektronenoptischer Verringerung des Strahlquerschnitts in der Objektebene und ihrer Kombination mit einem Übermikroskop reicht recht weit. Nicht nur als Hilfe bei der Deutung unbekannter Strukturen in Elektronenaufnahmen z. B. aus biologischen, chemischen und metallurgischen Forschungen dürfte sie sich als nützlich erweisen, sondern auch dort, wo allein die *Elektronenbeugung mit extrem feinen Strahlen* als Forschungsmethode gewünscht wird. Schließlich ermöglicht die kombinierte Anordnung einen bequemen Einblick in die Wirkung der Elektronenbelastung auf die verschiedensten Objektarten durch zonenweise Beobachtung der sich ergebenden Wirkungen im Endbildleuchtschirm des Elektronenmikroskopes.

Dem Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie, Herrn Prof. Thiessen, dankt der Verfasser für die oben zitierte Anregung.

Der *Deutschen Forschungsgemeinschaft*, die den Bau der beschriebenen Anlage durch Bereitstellung von Mitteln unterstützte, ist Verfasser ebenfalls zu Dank verpflichtet.

Über den Aufbau von Gasentladungen. II[1]).

Von **H. Raether**, Jena.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Januar 1941.)

Nachdem in Teil I die grundlegenden Unterschiede zwischen Townsend- und Kanalaufbau auseinandergesetzt worden sind, werden im Teil II auf Grund dieser Einteilung diskutiert: 1. Die Berechnung der Ionisierungszahl γ aus der Zündbedingung und ihre Feldstärkeabhängigkeit: Die Berechnung von γ aus der Zündbedingung ist nur für kleine $p \cdot d$-Werte erlaubt und liefert hier Übereinstimmung mit den direkt gemessenen γ-Werten, während im Gebiet des Kanalaufbaues eine andere, γ nicht enthaltende Zündbedingung gültig ist. 2. Die Meßergebnisse des Entladeverzuges und der Aufbauzeit bei $pd < 1000$ Torr · cm und hohen Überspannungen: Es läßt sich die Abhängigkeit des Entladeverzuges von der Überspannung zum großen Teil auf die Verwendung des Kugelfeldes zurückführen. Die Aufbauzeit ergibt sich aus der Vorstellung des Kanalaufbaues in annähernder Übereinstimmung mit dem Experiment. 3. Die Frage der Senkung der Durchschlagfeldstärke mit der Bestrahlung: Die Experimente ergeben das „Wurzelgesetz" für große wie kleine $p \cdot d$-Werte. Theoretisch ergibt sich das „Wurzelgesetz" unter gewissen Zusatzannahmen aus den Townsendschen Ansätzen. Da aber bei großen $p \cdot d$-Werten die Townsendsche Theorie der Zündung nicht mehr gültig ist, hat man nach einer anderen Ursache für die Absenkung zu suchen: Solange der Aufbau in *einer* Elektronenlawine vor sich geht, ist sie nicht zu verstehen. Man muß die Wechselwirkung zeitlich rasch aufeinanderfolgender Lawinen berücksichtigen. Die Art der Wechselwirkung wird diskutiert. — Eine Bemerkung zur Geschichte der gasionisierenden Strahlung schließt die Arbeit ab.

In Teil I wurden die bezeichnenden Unterschiede der beiden Aufbauarten einer Gasentladung besprochen: des bei kleinen pd-Werten oder großen E/p-Zahlen auftretenden „Townsend-Aufbaues" sowie des für große $p \cdot d$-Werte oder kleine E/p-Zahlen wirksamen „Kanalaufbaues"[2]). Nach-

---

[1]) Teil I vgl. ZS. f. Phys. **117**, 375, 1941. — [2]) Statt das Produkt pd als charakteristische Zahl zu verwenden, kann man auch den Quotienten aus zugehöriger statischer Spannung und diesem pd-Wert, d. i. E/p, nehmen. Mit zunehmendem pd wird E/p kleiner; der Grund hierfür ist: Zunehmendes pd (z. B. d fest, p wird erhöht) bedeutet wachsende Zahl der freien Weglängen. Bliebe dabei E/p konstant, also auch γ, so würde in der Zündbedingung

$$\gamma\left(e^{\frac{\alpha}{p} \cdot pd} - 1\right) = 1$$

die linke Seite über den Wert 1 steigen. Daher kann E/p so weit gesenkt werden, daß $\gamma\,(e^{\alpha d} - 1)$ wieder gleich 1 wird. Wäre nun γ feldstärkeunabhängig, könnte E/p so stark absinken, daß $\frac{\alpha}{p} = \frac{\text{const}}{p \cdot d}$ gilt. Da γ in Wirklichkeit mit fallendem E/p abnimmt, kann E/p nicht so stark absinken, d. h. αd wächst mit pd so lange, bis schließlich die Eigenraumladung der Lawine von Bedeutung wird

dem sich das vorliegende Versuchsmaterial über den Entladungsaufbau zwanglos in diese beiden Schemata hat einordnen lassen, sollen im folgenden einige Fragen der Gasentladungsphysik diskutiert werden, die durch die eben genannte Einteilung eine gewisse Lösung bzw. Veränderung erfahren, und zwar:

1. Die Berechnung der Ionisierungszahl γ aus der Townsendschen Zündbedingung und ihre Feldstärkeabhängigkeit.

2. Die Versuche für $pd < 1000$ Torr · cm bei hohen Überspannungen.

3. Die Senkung der statischen Durchschlagfeldstärke durch Bestrahlung.

1. Die Berechnung der Ionisierungszahl γ aus der Townsendschen Zündbedingung und ihre Feldstärkeabhängigkeit.

a) Die Berechnung der Ionisierungszahl γ aus der Zündbedingung. Die Zündbedingung $\gamma\,(e^{\alpha d} - 1) = 1$ hat Townsend benutzt, um die Ionisierungszahl γ, deren Natur noch offen ist, sich aber vermutlich aus verschiedenen Prozessen zusammensetzt (Photoeffekt, Ionenstoß), zu berechnen. Er fand Übereinstimmung mit den auf andere Weise gemessenen γ-Werten. In letzter Zeit vorgenommene Messungen ergaben ebenfalls diese Übereinstimmung (s. S. 529 u. f.)[1]). Diese Berechnung hat nach I nur bei kleinen $p \cdot d$-Werten einen Sinn, d. h. in dem Gültigkeitsbereich der Townsendschen Zündbedingung. Für große $p \cdot d$-Werte hingegen gilt die dort angegebene Zündbedingung, die die Ionisierungszahl γ nicht enthält [I, S. 390, Formel (7)]. Die Berechnung von γ aus $e^{-\alpha d}$ verliert also ihre Berechtigung mindestens von $pd \sim 1000$ ab, in Wirklichkeit schon eher. Experimentelle Werte für γ liegen bis zu $pd \sim 400$ Torr · cm vor[2]). Es ergab sich für $E/p \sim 45{,}5$ Volt/cm · Torr: $\gamma \sim$ einige 10^{-4}, berechnet aus der Strom-Abstandscharakteristik, während aus den experimentellen Durchschlagsdaten Paavolas $\gamma \sim 10^{-5}$ folgt, also etwa eine Größenordnung zu geringe γ-Werte. Während also bei kleinen $p \cdot d$-Werten beide γ, aus Strom-Abstandsmessungen wie aus der Zündbedingung, übereinstimmen, sind bereits bei $pd \sim 400$ Torr · cm Abweichungen vorhanden. Diese Unstimmigkeit hat ihren Grund in der schlechten Wiedergabe der gemessenen Strom-Abstandskurven Paavolas durch die Townsendsche Formel mit einem konstanten γ. Leider liegen nur diese Versuche

[1]) Für Edelgase siehe auch R. Schöfer, ZS. f. Phys. **110**, 2, 1938.
[2]) M. Paavola, Arch. f. Elektrot. XXII, 443, 1929.

in dem Gebiet großer $p \cdot d$-Werte vor, in denen die Durchschlagspannungen und γ-Werte gleichzeitig gemessen wurden, d. h. in denen verglichen wurde, wie genau bei hohen $p \cdot d$-Werten die Townsendsche Formel den Stromverlauf wiedergibt (Paavolas Ziel war die Messung von α bei hohen Drucken). Diese Unstimmigkeit läßt vermuten, daß bereits bei der Hälfte des pd-Grenzwertes zwischen Townsend- und Kanalaufbau (für Luft also $\sim$ 500 Torr · cm) Abweichungen von der Townsendschen Zündbedingung auftreten. Wenn es auch fraglich ist, ob die Genauigkeit dieser Versuche ausreicht, auf eine Abweichung vom Townsend-Aufbau bereits bei der Hälfte des pd-Grenzwertes zu schließen, so ist aus folgendem Grunde bereits bei kleineren pd-Werten als dem nach I berechneten Grenzwert eine Abweichung der eben angegebenen Art zu erwarten: Die Eigenraumladung[1]) ist nicht erst von Einfluß, wenn ihr Feld gleich dem elektrostatischen geworden ist, wie es in den notwendig stark vereinfachten Berechnungen in I angesetzt wurde, sondern wegen der starken Abhängigkeit des Koeffizienten der Elektronenstoßionisierung von der Feldstärke wirkt sie schon eher auf die Trägererzeugung. Es wird also durch den Raumladungseinfluß schon vor Erreichen des Umschlagwertes für Kanalaufbau die Berechnung von γ aus der Townsendschen Zündbedingung fehlerhaft sein. Nimmt man an, eine Feldverzerrung von 5% des angelegten Feldes läßt bereits Abweichungen von dem Townsendschen Stromanstieg erwarten, so erhalten wir für Luft ein pd von etwa 760 Torr · cm, ein Wert, der aber nur wenig von dem Grenzwert (1000 Torr · cm) entfernt ist. In Fig. 1 sind diese Verhältnisse dargestellt:

Sie zeigt die Abhängigkeit von αd (für die statische Durchschlagfeldstärke) in Abhängigkeit von $\frac{1}{E/p}$ für Luft[2]). Im linken Teil der Kurve ist es also erlaubt, $\alpha d = \ln(1 + 1/\gamma)$ zu setzen, und damit ergibt sich die Möglichkeit der γ-Berechnung (s. Fig. 3) bis zu pd-Werten von etwa 760 Torr · cm. Von hier an ist die Kurve gestrichelt gezeichnet bis über

---

[1]) Die Berücksichtigung dieser Eigenraumladung, die zu dem vom Townsend-Aufbau abweichenden Kanalaufbau führt, ist nicht zu verwechseln mit der bisher vielfach berücksichtigten Raumladung der positiven Ionen, die auf *nachfolgende* Elektronen eine erhöhende bzw. erniedrigende Ionisierungswirkung ausübt. Letztere ist auch im Gebiet des Townsend-Aufbaues von großer Bedeutung. — [2]) Der Berechnung wurden die α/p-Werte von K. Masch (Arch. f. Elektrot. XXVI, 587, 1932) und die Mittelwerte der Zündspannung nach W. O. Schumann (Landolt-Börnstein III, Erg.-Bd. II, S. 1250) für $E/p \leqq 126$, für $E/p \geqq 135$ nach E. Meyer (Ann. d. Phys. **58**, 297, 1919) zugrunde gelegt (Punkte). Die Kreuze in Fig. 1 sind aus den von Schöfer (a. a. O.) gemessenen Zündspannungen berechnete αd-Werte.

die Grenze des Townsend-Aufbaues hinaus. γ sinkt also in dem pd-Gebiet von etwa 400 Torr · cm an auf sehr kleine Werte[1]).

Ein ganz analoges Verhalten zeigt der Kurvenverlauf αd über $\frac{1}{E/p}$ in Wasserstoff (Fig. 2). Der Berechnung wurden die α/p-Werte von Ayres[2])

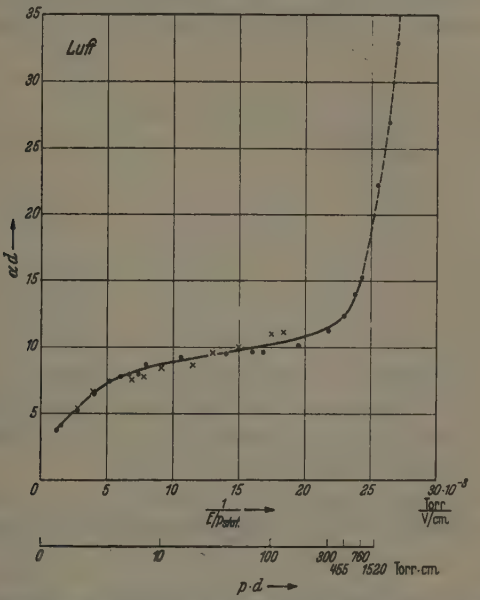


Fig. 1. Abhängigkeit der Zahl αd vom reziproken Wert von E/p_{stat} (für die statische Durchbruchfeldstärke) bzw. von $p \cdot d$ (Luft). Im linken Teil der Kurve liegt das Gebiet des Townsend-Aufbaues, so daß der Kurvenverlauf die Feldstärkeabhängigkeit des $\gamma \left(= \frac{1}{e^{\alpha d} - 1} \right)$ wiedergibt, während im rechten Teil der Kurve (gestrichelt) der beginnende Einfluß der Eigenraumladung der Lawine, die zum Kanalaufbau überleitet, zur Ungültigkeit der Townsendschen Zündbedingung führt.

und die Zündspannungen von Schöfer (a. a. O.) sowie Fucks und Kettel[3]) zugrunde gelegt. In dem linken Teil der Kurve verläuft αd über $\frac{1}{E/p}$

[1]) Man könnte daran denken, dieses Absinken sei vorgetäuscht durch eine Absorption der Strahlung, die auf der Kathode Nachlieferungselektronen auslöst. Deren Ausbeute würde dadurch verschlechtert werden und (im Gebiet des Townsend-Aufbaues) zu einem Anstieg von αd führen (vgl. Schade, I, S. 392). Die Kleinheit des gemessenen Absorptionskoeffizienten dieser Strahlung (I, S. 392) erlaubt jedoch diesen Schluß nicht. — [2]) T. L. R. Ayres, Phil. Mag. **45**, 353, 1923. — [3]) W. Fucks u. F. Kettel, ZS. f. Phys. **116**, 657, 1940.

ähnlich wie in Luft, hier im Gebiet des Townsend-Aufbaues ist die Berechnung von γ aus der Zündspannung erlaubt und ergibt Übereinstimmung mit den direkt gemessenen γ-Werten (s. Fig. 4). Die γ-Werte wurden bis $pd = 450$ Torr · cm, d. h. $E/p = 24$ Volt/cm · Torr eingetragen, bis wohin

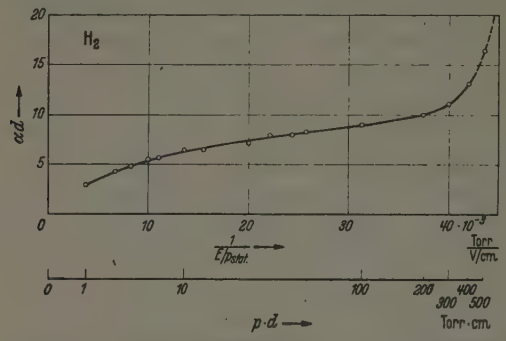


Fig. 2. Die gleiche Abhängigkeit wie in Fig. 1 für Wasserstoff.

die vorliegenden Messungen reichen. Für die Bestimmung des pd-Grenzwertes ist es notwendig, zu ermitteln, bei welchem $p \cdot d$ der Townsend-Aufbau vom Kanalaufbau in H_2 abgelöst wird. Unter Benutzung des in I, S. 387 (6) angewandten Kriteriums erhalten wir:

Tabelle 1. Die Lawinenladung $Q_{Law} = e^{\alpha d}$ abhängig von pd · (H_2).

$p \cdot d$	αd	$e^{\alpha d}$	$p \cdot d$	αd	$e^{\alpha d}$
200 [1])	10	$2{,}2 \cdot 10^4$	450 [3])	18,9	$1{,}6 \cdot 10^8$
400 [2])	14,4	$1{,}8 \cdot 10^6$	570 [2])	18,2	$8 \cdot 10^7$
450 [2])	16	$9 \cdot 10^6$	extrapoliert 600	20	$5 \cdot 10^8$

Legen wir einen Abstand von 1 cm zugrunde, so liegt die Grenze zwischen Townsend- und Kanalaufbau bei $e^{\alpha d} = 2 \cdot 10^8$ [Formel (7), I, S. 390], d. h. nach Tabelle 1 bei $pd \sim 600$ Torr · cm. Ein Einfluß der Feldverzerrung, ähnlich wie oben berechnet, kommt bereits bei $pd \sim 450$ Torr · cm zur Geltung. Von hier ab macht sich also die Eigenraumladung der Lawine auf die Trägerentwicklung bemerkbar und verbietet damit die γ-Berechnung aus $e^{-\alpha d}$.

b) Die Feldstärkeabhängigkeit der Ionisierungszahl γ. Nach der eben gegebenen Darstellung ist es selbstverständlich, daß im Gebiet des

[1]) R. Schöfer, a. a. O. — [2]) W. Fucks u. F. Kettel, ZS. f. Phys. **116**, 657, 1940. — [3]) W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke (Berlin 1923), S. 57.

Townsend-Aufbaues die aus den Fig. 1 und 2 folgende Abhängigkeit des γ von der Feldstärke übereinstimmen muß mit der direkt mittels der Strom-Abstandscharakteristik gemessenen[1]). Sie muß ebenso in Einklang sein mit der im inhomogenen Feld (Zylinderfeld) gemessenen[2]).

In Fig. 3 und 4 sind für Luft und H_2 die aus den Zündspannungswerten berechneten γ-Werte neben den neuesten aus der Strom-Abstands-

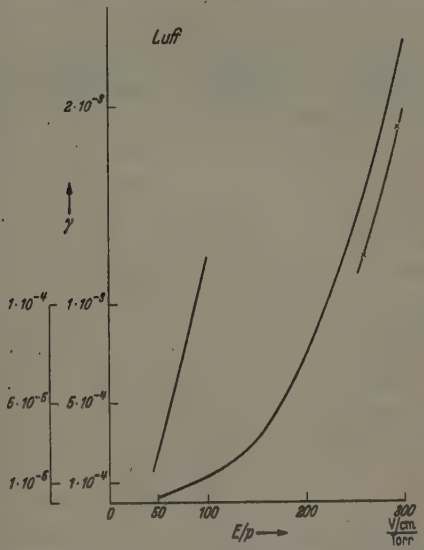


Fig. 3. γ abhängig von E/p, berechnet aus der gemittelten Kurve der Fig. 1 (Luft). Links ist diese Abhängigkeit für kleine E/p zehnmal vergrößert aufgetragen. Die Kreuze stellen Meßpunkte von Costa [3]) dar, die innerhalb der Meßgenauigkeit der beiden Kurven gut übereinstimmen [4]).

charakteristik folgenden eingetragen; der parallele Kurvenverlauf zeigt die Übereinstimmung der Feldstärkeabhängigkeit des γ von E/p.

Die Zündspannungsmessungen an Zylinderelektroden, bei denen der innere Zylinder einmal Kathode ist (größere Feldstärke an der Kathode

[1]) Z. B. H. Costa, ZS. f. Phys. **113**, 531, 1939. — [2]) R. Schöfer, a. a. O. — [3]) H. Costa, ZS. f. Phys. **116**, 508, 1940. — [4]) Die von Costa in Tabelle 4 und 5 seiner Arbeit angegebenen γ-Werte bei hohen Drucken sind unsicher, da sie nur nach der dort angegebenen zweiten Methode gemessen wurden, die sehr fehleranfällig ist. Die Messung von γ bei hohen Drucken ist im allgemeinen sehr schwierig, da ein geradliniger Teil in der Strom-Abstandscharakteristik ($\ln i/i_0$ über d) zur Festlegung von α nur schwer zu erhalten ist; daher sind auch die γ-Werte in H_2 bei hohen Drucken (Tabelle 4 und 5, ZS. f. Phys. **113**, 531, 1939) unsicher.

Tabelle 2. Abhängigkeit der Ionisierungszahl γ von E/p.

Gas	E/p-Bereich	$\frac{d\gamma}{d\,E/p}$		
		aus Zündspannungskurve	direkte Messung	Mittelwert
Luft	250—300	$2{,}2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$
H_2	150—300	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$

— größeres γ — niedrigere Zündspannung), andermal Anode ist (kleinere Feldstärke an der Kathode — kleineres γ — höhere Zündspannung), liefern ebenfalls eine Feldstärkeabhängigkeit von γ. Diese rührt jedoch nur von

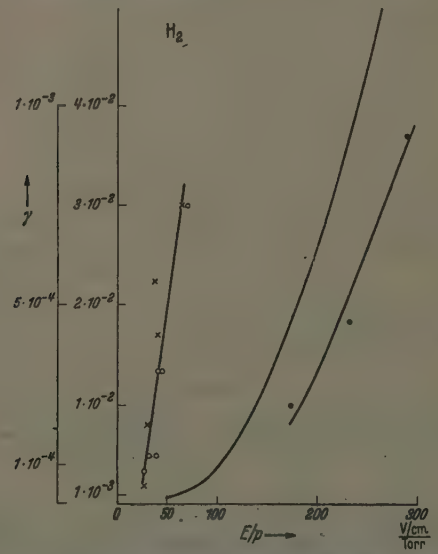


Fig. 4. Die gleiche Abhängigkeit wie in Fig. 3 für Wasserstoff. Die für kleine E/p zehnmal vergrößert aufgetragene Abhängigkeit zeigt neben der stark ausgezogenen gemittelten Kurve die Streuung der Einzelwerte. (×) sind die aus Schöfers Spannungen, (○) die aus Fucks und Kettels Zündspannungen berechneten Werte. Die vollen Kreise sind die direkt gemessenen Werte von Costa, die innerhalb der Genauigkeit der beiden Kurven übereinstimmen.

dem den positiven Ionen zuzuschreibenden Anteil (γ^+) her, also $\frac{d\gamma^+}{d\,E/p}$, während sich die Abhängigkeit des γ^L von E/p nicht bemerkbar macht, da der Photoeffekt nicht von der an der Kathode herrschenden Feldstärke bestimmt wird, sondern von der im Gasraum herrschenden, mithin ist in erster Näherung für beide Polaritäten die Lichtausbeute die gleiche.

Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß sich bei alleiniger Wirksamkeit des Photoeffektes die Zündspannungen im Zylinderfeld umgekehrt wie die gemessenen verhalten müßten: Ist die Kathode innen, so wird ein kleinerer Teil der Lichtquanten für den Photoeffekt ausgenutzt, als wenn die Kathode außen ist[1]), mithin wird die Zündspannung im ersten Falle höher sein als im zweiten, umgekehrt, wie die Messungen ergaben. Da aber sowohl in H_2 wie in Luft neben dem Photoeffekt ein anderer Elektronenablöseprozeß, vermutlich der Stoß positiver Ionen auf die Kathode wirksam ist[2]), so führt dies dazu, daß die Feldstärkeabhängigkeit des γ^+ durch die lichtelektrische Mitwirkung zu klein gemessen wird, in Wahrheit also $\frac{d\gamma^+}{d\,E/p} \cdot \varkappa$ beträgt, wo $\varkappa$ ein Korrektionsfaktor ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß trotz dieser Korrektur die aus den Messungen im inhomogenen Feld folgende Feldstärkeabhängigkeit niemals größer, sondern stets kleiner bleibt als die aus den Zündspannungen bestimmte, wie es bei Gültigkeit der zugrunde gelegten Vorstellungen verlangt werden muß, da zu der Feldstärkeabhängigkeit von γ^+ die des γ^L hinzukommt und in dem betrachteten E/p-Bereich γ mit E/p wächst. In Tabelle 3 ist daher in den letzten Spalten eingetragen: $\frac{d\gamma^+}{d\,E/p}$ bei Annahme von reinem Ionenstoß, $\frac{d\gamma}{d\,E/p}$ berechnet aus der Zündspannungskurve und die unter Berücksichtigung der lichtelektrischen Wirkung berechnete $\frac{d\gamma^+}{d\,E/p} \cdot \varkappa$, die das eben Gesagte bestätigt.

Tabelle 3. Abhängigkeit der Ionisierungszahl γ von E/p für Wasserstoff und Luft.

Gas	E/p-Bereich	b	γ_a	ΔU	$\Delta E/p$	$\frac{d\gamma^+}{d\,E/p}$	$\frac{d\gamma}{d\,E/p}$	$\frac{d\gamma^+}{d\,E/p} \cdot \varkappa$
H_2	143–286	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	20	143	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$
	93–186	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	20	93	$8{,}5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	37– 74	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$	25	37	$3{,}6 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
	32– 64	$1{,}9 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	25	32	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Luft	100–200	$1{,}9 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	25	100	$5{,}7 \cdot 10^{-6}$	$0{,}3$–$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	72–144	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$	50	72	$8{,}3 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$
	64–128	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	$5{,}6 \cdot 10^{-5}$	50	64	$6{,}5 \cdot 10^{-7}$	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$

In Tabelle 3 bedeutet: E/p-Bereich: den Gültigkeitsbereich der angegebenen Feldstärkeabhängigkeit, b: die Neigung $d\alpha/dE$ bzw. $\frac{d\,\alpha/p}{d\,E/p}$: die in dem angegebenen Feldstärkebereich als konstant angesetzt werden

[1]) W. Rogowski, ZS. f. Phys. 114, 1, 1939. — [2]) H. Costa, a. a. O.

kann, γ_a: die Ionisierungszahl für den Fall, daß der Außenzylinder Kathode ist, entnommen den gemittelten Kurven der Fig. 3 und 4, ΔU: die Differenz der Zündspannungen, $\Delta E/p$: die Differenz der E/p-Werte zwischen Innen- und Außenzylinder.

Die Korrektur $\varkappa$ wurde näherungsweise in folgender Weise bestimmt:

$$\left(\gamma^+ \int_K^A \mathrm{d}n + \varrho \int_K^A \gamma^L \mathrm{d}n\right)_i = \left(\gamma^+ \int_K^A \mathrm{d}n + \varrho \int_K^A \gamma^L \mathrm{d}n\right)_a = 1 \text{ (Zündbedingung).}$$

$\mathrm{d}n$ die Zahl der gebildeten Ladungsträger ($= \alpha e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$), der Index i bzw. a bedeutet Kathode innen bzw. außen. Setzt man

$$\int_K^A \gamma^L \mathrm{d}n = \bar{\gamma}^L \int_K^A \mathrm{d}n$$

und

$$\bar{\gamma}_i^L = \bar{\gamma}_a^L,$$

aber

$$\gamma_i^+ = \gamma_a^+ + \Delta\gamma,$$

so wird

$$e^{b \cdot \Delta U} = \frac{\gamma_i^+ + \varrho_i \bar{\gamma}^L}{\gamma_a^+ + \varrho_a \bar{\gamma}^L},$$

wo $b = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}E$ und $\varrho_{i,a}$ die für den Photoeffekt ausgenutzten Raumwinkel der Strahlung einer Elektronenlawine sind und $\bar{\gamma}$ den γ-Wert für den mittleren E/p-Bereich bedeutet. Wir setzen

$$\bar{\gamma}^L = \varepsilon\bar{\gamma} \quad \text{und} \quad \gamma_a^+ = (1-\varepsilon)\gamma_a \qquad (\varepsilon = {}^1/_2),$$

sowie

$$\varrho_a = 1 \quad \text{und} \quad \varrho_i = {}^1/_3,$$

dann erhält man für

$$\varkappa = \frac{\bar{\gamma}}{\gamma_a}\left\{0{,}5 + \frac{1}{3 \cdot b \cdot \Delta U}\right\} + 0{,}5$$

und daraus Zahlen von $\varkappa \sim 5$ für H_2 und $\varkappa \sim 2$ für Luft, die in der letzten Spalte der Tabelle 3 benutzt wurden.

2. $pd \lesssim 1000$ Torr · cm *bei hohen Überspannungen.*

Bei Besprechung des Falles I, 2 ($p = 760$ Torr, $d \sim 0{,}1$ cm) wurden die Messungen des Entladeverzuges[1] [2]) sowie der Aufbauzeiten[3]) für kleine Abstände bis zu Überspannungen von mehr als 100% beiseite gelassen. Ein Blick auf Tabelle 4 zeigt uns, daß wir für 760 Torr und 0,11 cm Elektrodenabstand von statischer Spannung an bis zu $\sim 10\,\%$ Überspannung

[1]) R. Strigel, Wiss. Veröffentl. d. Siemens-Werke XI (1932), S. 52. — [2]) R. Strigel, Arch. f. Elektrot. **27**, 137, 1933. — [3]) H. J. White, Phys. Rev. **49**, 507, 1936; R. R. Wilson, ebenda **50**, 1082, 1936; M. Newman, ebenda **52**, 652, 1937.

noch den Townsendschen Aufbau vor uns haben, daß aber oberhalb 10% seine Gültigkeit aufhört, so daß die Besprechung an dieser Stelle gerechtfertigt wird.

Tabelle 4. Vergleich der Lawinenladung Q_{Law} mit der Elektrodenladung Q_{El} (in Elementareinheiten) als Funktion der Überspannung.

Überspannung %	$Q_{Law} = e^{\alpha d}$	$Q_{El} = E \cdot b^2$
0	$1{,}5 \cdot 10^5$	
10	$7 \cdot 10^6$	
20	$1{,}3 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^6$
30	$8 \cdot 10^{11}$	

($p = 760$ Torr, $d = 0{,}11$ cm.)

1. Die Abhängigkeit des Entladeverzuges von der Überspannung. Unter Einhaltung sauberer Versuchsbedingungen und bei Benutzung geringer Bestrahlung wurde von Strigel der Entladeverzug gemessen. Der Entladeverzug ist durch die Bestrahlung, d. h. den zeitlichen Abstand zweier Primärelektronen und durch die Zündwahrscheinlichkeit bestimmt. Überraschenderweise fand Strigel eine starke Abhängigkeit des Entladeverzuges von der Überspannung. Da der von der Bestrahlung abhängige Teil des Entladeverzuges kaum spannungsabhängig sein dürfte, kann dies nur für die Zündwahrscheinlichkeit zutreffen. Im Rahmen der Townsendschen Vorstellungen ist jedoch diese starke Abhängigkeit unverständlich[1]). Nach obigem ist dies zu erwarten, da wir uns nicht mehr im Gebiet des Townsend-Aufbaues befinden. Die Vorstellung des Kanalaufbaues andererseits ergibt eine Zündwahrscheinlichkeit nur dadurch, daß das Rückwachsen des kathodengerichteten Kanals durch zufälliges Ausbleiben der Photoelektronen unterbrochen wird. Bei großen Abständen müßte dieses Abreißen der Entladung und damit die Entstehung des Entladeverzuges in gleicher Weise zu beobachten sein, was bisher nicht der Fall ist.

Vor allen weiteren Folgerungen ist aber zu bedenken, daß diese Versuche im Kugelfeld (Durchmesser = 5 cm, $d = 0{,}11$ cm) ausgeführt worden sind, das dem auf S. 881 (I) erwähnten Einwand ausgesetzt ist. Berücksichtigt man in ähnlicher Weise wie dort die Zunahme der wirksamen Fläche (F_{eff}) mit wachsender Überspannung, so erhält man für die Zahl der während des mittleren Entladeverzuges (σ) ausgelösten Elektronen (n) die Werte[2]) der Tabelle 5.

[1]) G. Hertz, I, S. 378. — [2]) Es ist auch hier angenommen, daß die Zündwahrscheinlichkeit in Wirklichkeit konstant = 1 ist.

Tabelle 5. Abhängigkeit des Entladeverzuges σ, der wirksamen Kugelfläche (F_{eff}) sowie der Zahl der ausgelösten Elektronen (n) von der Überspannung.

Cu (rein)[1]), $j_0 = 10^8 \frac{\text{El}}{\text{sec} \cdot \text{cm}^2}$.

Überspannung %	F_{eff} (cm²) %	σ (10^{-7} sec)	$j_0 \cdot F \cdot \sigma = n$
20	0,17	1,8	3,1
30	0,26	1,2	3,1
40	0,35	0,9	3,1
50	0,43	0,7	3,0
60	0,52	0,55	2,8
70	0,61	0,5	3,0
80	0,7	0,45	3,1

Die lichtelektrische Fremdstromdichte j_0 ist berechnet aus dem von Strigel angegebenen Wert von $i = 3{,}7 \cdot 10^{-12}$ A, auf der Stiftfläche F_{st} gemessen, d. h. $j_0 = i/F_{st}$. Diese Bestrahlungsdichte ist als konstant über die bestrahlte Fläche angenommen, was in Wirklichkeit infolge der ungünstigen seitlichen Einstrahlung in den Kugelzwischenraum kaum der Fall sein dürfte; die Konstanz ist daher in *diesem* Maße als zufällig anzusehen. Immerhin ist der Einfluß der Korrektur erheblich, wie auch ein Vergleich der weiteren Beobachtungswerte[2]) mit den in gleicher Weise korrigierten in Tabelle 6 zeigt.

Tabelle 6. Korrektur der beobachteten Entladeverzüge durch Berücksichtigung der wirksamen Kugelfläche.

Überspannung $\Delta U/U$ %	Fe		Ag		Cu		CuO	
	σ (10^{-7} sec)	$\sigma \cdot F$ (10^{-8})	σ (10^{-7} sec)	$\sigma \cdot F$ (10^{-7})	σ (10^{-7} sec)	$\sigma \cdot F$ (10^{-7})	σ (10^{-7} sec)	$\sigma \cdot F$ (10^{-6})
80	1,1	7,7	2,9	2,0	4,5	3,1	2,2	1,5
70					5,0	3,0	2,3	1,4
60	1,2	6,3	3,3	1,7	6,5	3,4	5	2,6
50	1,3	5,6	3,8	1,64	10	4,3		
40	1,8	6,3	6	2,1	25	8,7		
30	3,5	9,1	16	4,1				

(Der Strom bzw. die Stromdichte j_0 ist nicht gemessen, da nur sehr schwach bestrahlt wurde, so daß nur $\sigma \cdot F$ statt $n = j_0 \cdot \sigma \cdot F$ ausgerechnet werden konnte.)

Es würde damit, vorausgesetzt, daß die Nachmessung dieser wichtigen Versuche in einem *homogenen* Feld, mit Bestrahlung in der Feldrichtung, diese Resultate bestätigt, die Abhängigkeit des Entladeverzuges von der

[1]) Vgl. S. 60 der zitierten Arbeit von Strigel, a. a. O. — [2]) R. Strigel, Arch. f. Elektrot. 26, 803, 1932.

Überspannung beseitigt sein. — Unberührt davon bleibt natürlich das Strigelsche Ergebnis, daß der mittlere Zündverzug bei gegebener Überspannung von der Austrittsarbeit des Kathodenmaterials abhängig ist, daß also, je größer die Austrittsarbeit, desto länger der Entladeverzug ist, da dies Ergebnis unabhängig von der Art des Entladungsaufbaues ist. Eine andere Frage ist, ob die Nachmessung im homogenen Feld auch das Resultat ergibt, daß bei gegebener Überspannung die Zahl der innerhalb des Entladeverzuges ausgelösten Primärelektronen von der Austrittsarbeit des Kathodenmaterials abhängig ist. Im Ja-Falle würde dies auf eine andere Aufbauart (hinsichtlich des Rückwachsens des kathodengerichteten Kanals) hinweisen, die vielleicht durch die geringe Absorption der gasionisierenden Strahlung im Gas infolge der Kathodennähe bestimmt sein kann; damit würde die Ausbildung eines kathodengerichteten Kanals verhindert werden und die Austrittsarbeit der Kathode wird eine Rolle spielen[1]). Eine genauere Diskussion benötigt jedoch größeres experimentelles Versuchsmaterial über den Entladeverzug im *homogenen* Feld.

2. Die Abhängigkeit der Aufbauzeit von der Überspannung. Die Messungen der Aufbauzeit, von denen die einwandfreiesten die von Newman (a. a. O.) zu sein scheinen ($p = 760$ Torr, $d = 0{,}265$ cm) ergaben einen ähnlichen Verlauf wie bei großen Abständen, nur sind die Zeiten kürzer: von $1 \cdot 10^{-7}$ sec bei 5% nimmt sie bis $3 \cdot 10^{-9}$ sec bei $> 100\%$ Überspannungen ab (s. Tabelle 7). (Bei diesen Versuchen muß also die Be-

Tabelle 7. Vergleich der Entwicklungsdauer der Lawine bis zu ihrer kritischen Verstärkung (t_{kr}) mit der Aufbauzeit (T_a) als Funktion der Überspannung.

Überspannung	T_a gem.	x_{kr}	t_{kr}
(10%	$75 \cdot 10^{-9}$ sec	0,27 cm	$19 \cdot 10^{-9}$ sec)
20	34	0,18	12
30	23	0,12	8
40	16	0,1	6
50	12	0,07	4,4
60	9	0,06	3,3
70	7	0,05	2,7
80	6	0,04	2,2
100	6	0,03	1,5

($d = 0{,}265$ cm, 760 Torr).

[1]) Da wir im Gebiet der Überspannungen sind, ist die Strahlungsausbeute gegenüber den stationären Verhältnissen (vgl. H. Costa, a. a. O.) beträchtlich größer, so daß wir mit mehr als einem Nachlieferungselektron durch Photoeffekt pro Lawine rechnen können.

strahlung ausreichen, um beim Anlegen der Spannung sofort ein Elektron startbereit zu haben.) In Tabelle 7 ist neben den Meßdaten die kritische Lawinenlänge x_{kr} bzw. ihre Entwicklungsdauer t_{kr} angegeben.

Die Laufzeit eines Elektrons über den Elektrodenabstand beträgt $\sim 19 \cdot 10^{-9}$ sec, d. h. für Überspannungen größer als 30—40% ist sie länger als die Aufbauzeit. Die Verhältnisse liegen also ähnlich wie bei großen Abständen; im Rahmen der obigen Betrachtungen ist dieses Ergebnis verständlich, da das Elektron nur x_{kr} durchlaufen muß bzw. t_{kr} benötigt, um dann mit Hilfe der hohen Felder am Lawinenkopf die weitere Entwicklung in raschester Zeit zu ermöglichen. Auch hier ist anzumerken, daß die positiven Ionen, selbst wenn sie auch nur die kritische Lawinenlänge bis zur Kathode zurückzulegen hätten, um Nachlieferungselektronen auszuschlagen, zu langsam sind: z. B. bei 80% Überspannung benötigen sie $\sim 1 \cdot 10^{-7}$ sec zum Durchlaufen von x_{kr}, eine Zeit, die bereits mehr als die gesamte Aufbauzeit ($T_a \sim 6 \cdot 10^{-9}$ sec) ausmacht. Bei geringen Überspannungen ist die Laufzeit der positiven Ionen für x_{kr} noch beträchtlich größer als die Aufbauzeit.

Auch hier wie bei großen $p \cdot d$-Werten geht die Abhängigkeit vollkommen der gemessenen parallel, nur daß die berechneten Werte etwa ein Drittel der gemessenen betragen; der Grund hierfür läßt sich infolge der Unsicherheit der Versuchsergebnisse nicht angeben. Die größenordnungsmäßige Übereinstimmung zeigt die prinzipielle Richtigkeit der zugrunde gelegten Vorstellungen.

3. Bemerkung zur Senkung der statischen Durchschlagfeldstärke durch Bestrahlung.

Die Messungen der Abhängigkeit der statischen Durchbruchfeldstärke von der Bestrahlung in unedlen Gasen ergaben (für nicht zu starke Bestrahlung) eine Wurzelabhängigkeit der Spannungsabsenkung $\Delta U = U_0 - U$ von dem durch die Bestrahlung entstehenden Vorstrom i_0, d. h.

$$\Delta U = \text{const} \cdot \sqrt{i_0} \quad (U_0 = U \quad \text{für} \quad i_0 = 0)\,[1].$$

Dies steht in Übereinstimmung mit Berechnungen, die ebenfalls das „Wurzelgesetz" ergeben hatten[2]. Diese theoretischen Überlegungen gehen durchweg vom Townsend-Aufbau aus, berücksichtigen die der Stärke der Be-

[1]) W. Rogowski u. A. Wallraff, ZS. f. Phys. **97**, 758, 1935; W. Fucks u. H. Bongartz, ZS. f. techn. Phys. **7**, 205, 1939; W. Fucks u. G. Schumacher, ZS. f. Phys. **112**, 605, 1939. — [2]) W. Rogowski u. W. Fucks, Arch. f. Elektrot. **29**, 362, 1935; W. Rogowski u. A. Wallraff, ZS. f. Phys. **102**, 183, 1936; W. Rogowski, ebenda **114**, 1, 1939.

strahlung entsprechende Raumladung und die damit verbundene Feldverzerrung und erhalten das Wurzelgesetz durch Zusatzannahmen, wie z. B. durch den Ansatz einer bestimmten Feldstärkeabhängigkeit der Ionisierungszahl γ oder durch die Forderung, daß die Lichtquantenausbeute rascher mit zunehmender Feldstärke abnimmt als die Elektronenstoßionisierung.

Die vorliegenden Versuche[1]) wurden zum Teil im Gebiet des Townsend-Aufbaues, zum Teil im Bereich der Kanalentwicklungen ausgeführt; in beiden Fällen ergaben sie das beschriebene Wurzelgesetz. Da aber die Berechnung auch im letzteren Fall den Townsend-Aufbau zugrunde legt, obgleich für große $p \cdot d$-Werte der Stromanstieg mit $i = i_0 e^{\alpha z}$ höchstens bis zur kritischen Verstärkung gültig ist, muß bei großen $p \cdot d$-Werten die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung als zufällig angesehen werden und das Wurzelgesetz seine Ursache in einem anderen physikalischen Vorgang haben. Bei kleinen $p \cdot d$-Werten hingegen, wo auch das Experiment den Townsend-Aufbau bestätigt, ergibt eine ausführliche Diskussion[2]), daß weder die Feldstärkeabhängigkeit der Ionisierungszahl γ noch der notwendige Verlauf der Lichtquantenausbeute im Vergleich zur Stoßionisierungsausbeute der Elektronen zur Deutung ausreichen, so daß auch bei kleinen $p \cdot d$-Werten eine noch unbekannte Ursache (vermutlich aber die gleiche wie bei großen $p \cdot d$-Werten) für das Wurzelgesetz verantwortlich zu sein scheint (vgl. S. 538, Anm. 2).

Für den Kanalaufbau ist charakteristisch, daß die Elektronenlawinen unabhängig voneinander ablaufen und bereits eine genügt, den Durchschlag hervorzurufen. Im Bilde des Einelektronendurchschlages[3]) ist deshalb eine Spannungsabsenkung durch Bestrahlung der Funkenstrecke nicht zu verstehen. Es muß hierzu angenommen werden, daß die Wechselwirkung mindestens zweier Lawinen Voraussetzung für den Durchschlag ist: die erste Lawine läuft ab, ohne infolge der abgesenkten Feldstärke zum Durchschlag zu führen. Eine zweite, in der Bahn der ersten ablaufende Lawine findet infolge der Einwirkung ihres Vorgängers auf die Gasstrecke günstigere Ionisierungsbedingungen vor, die Kanalentwicklung kann einsetzen und führt zum Durchbruch. Hierzu ist Voraussetzung, daß die zweite Lawine

[1]) Siehe Anmerkung 1, S. 536. — [2]) W. Fucks u. F. Kettel, ZS. f. Phys. **116**, 657, 1940. In Edelgasen bei kleinen pd-Werten hingegen ist die Ursache der Verringerung der Durchschlagfeldstärke mit der Bestrahlung in der Mitwirkung angeregter (metastabiler) Atome erkannt worden: R. Schade, ZS. f. Phys. **108**, 353, 1938; s. auch R. Schöfer, ebenda **110**, 21, 1938. — [3]) Besser gesagt: „Einlawinendurchschlages".

nicht zu spät folgt, d. h. die Bestrahlung nicht zu gering ist, da sonst durch Diffusion und Abwanderung der Ladungsträger usw. an die Elektroden die Wirkung der ersten Lawine verlorengeht. Es ist also der Zeitabstand zwischen zwei Primärelektronen, die die Kathode innerhalb eines Lawinenquerschnittes verlassen, von Bedeutung, d. h. es ist eine gewisse Mindeststromdichte notwendig, damit überhaupt eine merkbare Feldstärkeabsenkung stattfindet. Ein Beispiel erläutere dies: Nehmen wir z. B. an, eine merkbare Feldstärkeabsenkung finde dann statt, wenn die Nachfolgelawine noch die *Ionen* ihres Vorgängers antrifft, so gilt folgendes: Das Experiment zeigt bei 1,5 cm Elektrodenabstand und 760 Torr Luft eine merkbare Spannungsabsenkung der $U_{stat} = 52\,\mathrm{kV}$ um $\frac{1}{2}\,\%$ bei einer Bestrahlung von $j_0 = 5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A}$ pro cm^2. Unter diesen Umständen verläßt etwa alle 10^{-5} sec ein Elektron eine Kathodenfläche von der Größe des Lawinenquerschnittes, der unter den angegebenen Bedingungen etwa $\frac{1}{4} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$ beträgt. Die positiven Ionen benötigen für den Elektrodenabstand etwa $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ sec ($u^+ \sim 10^5$ cm pro sec), so daß die Ionisationsprodukte der Vorgängerlawinen sicher noch angetroffen werden. In Wasserstoff[1]) muß wegen der erheblich höheren Ionengeschwindigkeit ($u^+ \sim 3 \cdot 10^6$ cm/sec, $E/p \sim 30$) eine um etwa zwei Größenordnungen höhere Bestrahlung angewendet werden, um eine Spannungserniedrigung von ebenfalls $\frac{1}{2}\,\%$ zu bekommen. — Würde man statt der Ionisationsprodukte angeregte Atome annehmen — es würde dann die günstigere Ionisation der Nachfolgelawine durch Zusammenstoß mit diesen Anregungsprodukten der Vorgängerlawine entstehen —, so würde die Diffusion dieser angeregten Träger eine Rolle spielen. Auch hier wäre infolge der schnelleren Diffusion der Wasserstoffmoleküle gegenüber den Luftmolekülen aus der Entladestrecke für eine entsprechende Zündspannungssenkung eine stärkere Bestrahlung als in Luft nötig. Als Drittes wäre als „Einwirkung" der Vorgängerlawine auf die Gasstrecke die thermische Nachwirkung möglich; im vorgeheizten Lawinenkanal ist die Luftdichte geringer, so daß die zweite Lawine günstiger ionisiert[2]). Die Abnahme der Durchschlagfeldstärke mit zunehmender Bestrahlung ist qualitativ verständlich dadurch, daß das zweite Elektron diese Einwirkung um so stärker spürt, je eher es seinem Vorgänger folgt.

---

[1]) W. Fucks u. G. Schumacher, Naturwissensch. **7**, 110, 1940. — [2]) Auf die Wärmewirkung machte mich Herr Dr. Schade aufmerksam. Er teilte mir mit, daß die thermische Wirkung des „Vorstromes" zur Erklärung der Zündspannungserniedrigung durch Bestrahlung in unedlen Gasen herangezogen werden kann. Die Wärmeentwicklung in Entladungskanälen ist von F. Trey (Phys. ZS. **23**, 193, 1922) nachgewiesen worden.

In diesem Bilde sind ebenfalls die Versuche über die Zündspannungssenkung abhängig vom Bestrahlungsquerschnitt[1]) verständlich: je enger der Entladungsquerschnitt wird, desto schneller diffundieren die Träger (Ionen oder Anregeprodukte) aus der Entladungsbahn bzw. wird die Wärme an die kühleren Teile der Umgebung abgegeben, so daß die Nachfolgelawine entsprechend ungünstigere Ionisierungsbedingungen vorfindet und die Zündspannungssenkung geringer wird.

Nach den obigen Überlegungen müßte die Aufbauzeit in Luft, unabhängig davon, welcher Ursache man die günstigere Ionisierung der Folgelawine zuschreibt, bei geringen Bestrahlungen, d. h. Feldstärkeabsenkungen von $\sim \frac{1}{2}\%$, bis zu 10^{-5} sec größer als die knapp *über* der statischen Feldstärke gemessene sein, da im Mittel nach 10^{-5} sec erst ein weiteres Elektron eine Kathodenfläche von der Größe des Lawinenquerschnittes verläßt und dieses den Durchschlag herbeiführt. Nun ist aber bei kleinem $p \cdot d$ die Aufbauzeit knapp über der statischen Durchbruchfeldstärke bereits mehrere 10^{-5} sec (s. oben), so daß eine Verlängerung der Aufbauzeit um $\sim 1 \cdot 10^{-5}$ sec kaum bemerkbar sein wird. Bei großem $p \cdot d$ hingegen ist die Aufbauzeit wenige Prozent über der statischen Feldstärke nach Messner (a. a. O.) mehrere 10^{-7} sec, d. h. sie müßte für Feldstärken knapp unterhalb der statischen erheblich, fast zwei Größenordnungen, anwachsen. Hierüber liegen jedoch noch keine systematischen Messungen vor.

Rogowski und Wallraff (a. a. O.), die vor der Bestrahlung die Spannung an die Funkenstrecke legen, bemerken, daß die Zeit zwischen Belichtungsfunken und Spannungszusammenbruch weniger als 10^{-7} sec beträgt. Dies steht nicht in Widerspruch mit obigem, da die Bestrahlung mindestens 100mal intensiver ($\Delta U/U = 5$ bis 10%), also die zeitliche Aufeinanderfolge der Primärelektronen innerhalb eines Lawinenquerschnittes mindestens 100mal kürzer war. Dagegen ist dieses Resultat nicht vereinbar mit den von Rogowski und Fucks entwickelten Anschauungen (abgesehen von den obigen Einwänden, daß die Raumladung der positiven Ionen die Kathodenfeldstärke und damit die Ionisierungszahl γ erhöht, da die große Laufzeit der Ionen von der Anode zur Kathode dicht mit den gemessenen 10^{-7} sec vereinbar ist. — Eine genauere Untersuchung der Aufbauzeit der Durchschläge bei „Unterspannungen" wäre auch hinsichtlich einer Entscheidung über die Art der Ionisierungsbegünstigung der Folgelawine (s. o.) von großem Interesse. Insbesondere sollte im Falle thermischer Nachwirkung der Vorgängerlawine die Aufbauzeit eine untere

[1]) W. Fucks u. H. Bongartz, ZS. f. techn. Phys. 7, 205, 1939.

Grenze haben ($\sim 10^{-5}$ sec), bedingt durch die Diffusion der „heißen" Moleküle, welche die Verringerung der Gasdichte im Elektrodenraum bewirkt. Die oben angegebene Zeit von ($\sim 10^{-7}$ sec) würde daher mit der Vorstellung thermischer Nachwirkung schwer zu verstehen sein. Doch sind zur endgültigen Entscheidung eingehendere Versuche notwendig.

4. Anmerkung zur Auffindung der gasionisierenden Strahlung.

Die Tatsache, daß eine Entladung, z. B. die eines Funkens, eine ultraviolette Strahlung ausstrahlt, die aus einem Metall Elektronen auslöst, ist alt (H. Hertz). Neben diesem langwelligen ultravioletten Anteil wurde von Wiedemann[1]) eine Strahlung (durch Thermolumineszenz) nachgewiesen, die sehr kurzwellig sein mußte, da sie durch Flußspat nicht mehr hindurchging; Wiedemann nannte sie „Entladungsstrahlen". Diese Strahlung wurde dann, besonders in England, eingehender untersucht, u. a. von Wynn Williams[2]), der fand, daß eine kleine Hilfsfunkenstrecke, in der Nähe einer Hauptfunkenstrecke aufgestellt, diese regelmäßig zum Zünden bringt, und zeigte, daß diese Wirkung vorwiegend dem sehr kurzwelligen und daher in der Elektronenauslösung sehr wirksamen Anteil der ultravioletten Funkenstrahlung zuzuschreiben ist[3]). Diese Strahlung hatte die gleichen Eigenschaften wie die „Entladungsstrahlung" Wiedemanns, sie erregte Thermolumineszenz, sie wurde von Flußspat absorbiert, konnte jedoch durch sehr dünne Zelluloidfilme hindurchtreten. Sie wird auch von Luft absorbiert, kann aber bei 760 Torr noch einige cm durchdringen. Es wurde auch wahrscheinlich gemacht, daß diese Strahlung die Gase ionisiert. Dieses äußerst kurzwellige Ultraviolett, dessen Wellenlänge man zwischen 1000 und 10 Å schätzte, fand man auch in Entladungen niederen Druckes, in Spitzen- und Koronaentladungen[4]) und stellte fest, daß es im wesentlichen die gleichen Eigenschaften hatte wie die bereits bekannte „Entladungsstrahlung".

Diese Eigenschaft der Entladung, eine das Gas ionisierende Strahlung auszustrahlen, wurde noch bis vor kurzem als eine zwar auffällige Eigen-

---

[1]) E. Wiedemann, ZS. f. Elektrochem. S. 159, 1895; s. auch W. Hoffmann, Wied. Ann. **60**, 269, 1897. — [2]) C. E. Wynn Williams, Phil. Mag. VII, 353, 1926. Herr Prof. Trey machte mich freundlicherweise vor einiger Zeit auf diese Arbeit aufmerksam; s. auch J. D. Morgan, ebenda **4**, 91, 1927; J. Thomson, ebenda **5**, 513, 1928; **6**, 526, 1928. — [3]) Das längerwellige UV wird erst bei erheblich größerer Intensität der Hilfsfunkenstrecke wirksam. — [4]) E. Greiner, ZS. f. Phys. **81**, 543, 1933; G. Dechène, Journ. Phys. Radium **7**, 533, 1936.

schaft einer Entladung angesehen, für die Physik der Gasentladungen hielt man sie aber für zu unwesentlich, um in den einschlägigen Arbeiten zur Funkenentwicklung sowie in den Büchern über Gasentladungen erwähnt zu werden. Sie wurde (mit Recht) als eine im Grunde nebensächliche Begleiterscheinung betrachtet. Ihre Bedeutung wurde allein in der Tatsache gesehen, daß sie wie die positiven Ionen aus dem *Kathodenmetall* Elektronen löst; diese Eigenschaft wurde auch schon frühzeitig für den Entladungsaufbau berücksichtigt[1]). Hierin unterscheidet sie sich aber nicht von dem längerwelligen Ultraviolett.

Als jedoch die Anwendung der Nebelkammer zur Untersuchung des Entladungsaufbaues im ebenen Feld, in Unkenntnis der eben erwähnten Arbeiten, zu der Annahme führte, daß die Ausstrahlung eines *gasionisierenden* Lichtes die rasche Entwicklung des Funkens bei hohen Drucken (große $p \cdot d$-Werte) am einfachsten erklären würde[2]), wurde vom Verfasser die Strahlung auf Grund ihrer Ionisierungsfähigkeit in der Nebelkammer gesucht und gefunden[3]). Da die Eigenschaften die gleichen waren, wie oben beschrieben, besteht kein Zweifel, daß diese identisch sind. Nachdem die Wichtigkeit der Strahlung infolge ihrer Ionisierungsfähigkeit des Gases für den Entladungsaufbau erkannt worden war (Rückwachsen des kathodengerichteten Kanals), erhob sich die entscheidende Frage, in welchem Entwicklungsstadium der Entladung diese erzeugt wird, ob sie also eine bloße Begleiterscheinung einer selbständigen, durch Raumladungen bereits umgebildeten Entladung ist oder ob sie bereits in einer unselbständigen Entladung auftritt und dadurch in den Entladungsaufbau beschleunigend eingreifen kann.

Schwiecker[4]) konnte in einer im hiesigen Institut ausgeführten Arbeit zeigen, daß Wellenlängen unter 1000 Å, mit einer Absorbierbarkeit ähnlich der oben beschriebenen Strahlung, bereits von einer Elektronenlawine, also einer unselbständigen Entladung, emittiert werden und mithin für die Weiterentwicklung der Entladung wichtig sind. Nach Schwiecker und nach Nebelkammerversuchen ist es wahrscheinlich, daß das längerwellige, für die Elektronenauslösung aus dem Kathodenmetall ausreichende Ultraviolett erst in einem fortgeschrittenen Stadium des Entladungsaufbaues wirksam angeregt wird. Für den Funkenaufbau bei großen $p \cdot d$-Werten

[1]) J. S. Townsend, Phil. Mag. **45**, 444, 1923. — [2]) E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. techn. Phys. **11**, 435, 1935; ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936; H. Raether, ebenda **112**, 464, 1939; L. B. Loeb, Rev. Mod. Phys. **8**, 267, 1936, hat sich ebenfalls dieser Ansicht angeschlossen. — [3]) ZS. f. Phys. **110**, 611, 1938. — [4]) W. Schwiecker, ebenda **116**, 562, 1940.

kommt es auch nicht in Frage, wie in I auseinandergesetzt wurde, da die beobachtete Aufbauzeit kürzer als die zu erwartende ist.

Diese sehr kurzwellige Strahlung hat aber nicht nur ihre besondere Bedeutung für den Entladungsaufbau bei hohen Drucken und großen Abständen (in Luft $p\,d > \sim 1000$ Torr · cm) durch ihre Ionisierungsfähigkeit des Gases, sondern nach neueren Untersuchungen scheint sie auch infolge ihrer Kurzwelligkeit „längerlebige" Elektronen auf den Elektroden auszulösen, die erst nach einer gewissen Zeit die Elektroden verlassen und damit zur Zündung von Nachentladungen Anlaß geben.

Schlußbemerkung. Abschließend möchte ich bemerken, daß das aus den Nebelkammerversuchen gewonnene Bild der Entwicklung einer Entladung bei großem pd, in charakteristischer Weise von dem Townsend-Aufbau durch die Mitwirkung der Eigenraumladung unterschieden, die verschiedenen Stadien der Entladung mehr oder weniger zwangsläufig entwickelt, wobei die Ansätze, die bisher zu einem Verständnis des andersartigen Entladungsaufbaues bei hohen Drucken und größeren Abständen versucht wurden, wie z. B. durch den Hinweis auf die Feldverzerrung durch Raumladungen oder die kanalartige Struktur der leuchtenden Entladung u. a., zu einem klaren Bilde abgerundet wurden. Die Bewährung dieses Entladungsbildes ist die in den beiden Teilen der vorliegenden Arbeit gezeigte Möglichkeit, die Versuchsergebnisse bei hohen Drucken und größeren Abständen als Folge des Kanalaufbaues zu verstehen.

Herrn Prof. H. Kulenkampff möchte ich für sein Interesse an dieser Arbeit bestens danken.

Jena, Physikalisches Institut.

Bemerkung zu der Arbeit von L. Fauldrath[1]): Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren.

Von **Odd Dahl** in Bergen (Norwegen).

(Eingegangen am 14. Februar 1941.)

Einige Betrachtungen über die Vorteile einer rotierenden Scheibe für Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren sind schon 1936 u. a. vom Verfasser veröffentlicht worden[2]). Insbesondere hat der Verfasser[3]) in demselben Jahre eine genauere Untersuchung über den Scheibengenerator veröffentlicht, worin die von Herrn Fauldrath erörterten Fragen weitgehend behandelt wurden. Diese Untersuchungen stützen sich auf die grundlegenden experimentellen und theoretischen Untersuchungen von Holtz und anderen aus den Jahren 1870 bis 1890. Die elektrostatischen Generatoren waren damals Gegenstand eingehender Untersuchungen, was heutzutage meist in Vergessenheit geraten ist.

Die wichtigsten Ergebnisse der obengenannten Arbeiten sollen hier in aller Kürze wiedergegeben werden. Nach unseren Erfahrungen läßt sich mit Scheibengeneratoren ungefähr dieselbe Ladungsmenge pro Querschnitt und Zeiteinheit wie mit Bandgeneratoren erzeugen. Die Maximalzahlen sind von den Eigenschaften der praktisch anwendbaren Materialien und der Oberflächenbehandlung weitgehend unabhängig, vorausgesetzt, daß die relative Feuchtigkeit der umgebenden Luft innerhalb gewisser Grenzen liegt.

Die Form der Gegenelektrode ist von größter Bedeutung, und zwar muß die Elektrode so ausgebildet sein, daß die Feldstärke in ihrer Umgebung so homogen wie möglich ist und nie zu hohen Spitzenwerten ansteigt.

Unebenheiten und Spitzen haben eine inaktive Ladung zur Folge, die mit der Scheibe umläuft, ohne bei dem Stromtransport effektiv mitzuwirken. Starke Unebenheiten der Gegenelektrode können nämlich Ladungen von nicht erwünschtem Vorzeichen auf der Scheibe hervorbringen, wodurch ein Teil der gewünschten Ladung gebunden wird. Untersuchungen

[1]) L. Fauldrath, ZS. f. Phys. **116**, 701, 1940. — [2]) M. A. Tuve, L. R. Hafstad u. O. Dahl (Washington DC: Naturwissensch. **24**, 625, 1936): Die Gleichspannungstechnik für quantitative Untersuchungen zur Kernphysik. — [3]) Odd Dahl (Dep. of Terr. Magn. C. I. W. Washington DC): Rev. of Scient. Instr. **7**, Juni 1936): Note on Disk-type Electrostatic Generators.

an einer umlaufenden Scheibe mit Hilfe einer beweglichen Hilfselektrode, die über ein Mikroamperemeter geerdet ist, mag darüber Aufschluß geben.

Lacküberzug und Umwicklung mit Exzelsiorleinen können ein sonst gutes Elektrodensystem noch verbessern. Es ist unmöglich, allgemeingültige Zahlen hierfür zu geben, jedoch läßt sich die Leistung im allgemeinen um ungefähr 15% verbessern.

Als Konstruktionsgrundlage kann man für ein Doppel-Ladesystem, bei dem die oben erörterten Maßnahmen berücksichtigt sind, mit einer Stromleistung von mindestens 0,27 μA pro cm Ladungsbreite und m/sec Lineargeschwindigkeit rechnen. Diesen Wert noch weiter zu verbessern, erscheint praktisch undurchführbar.

Was oben über das Elektrodensystem gesagt ist, gilt auch für das System der Verdoppler-Elektroden. Wenn nicht genau dieselben Regeln befolgt werden, neigt der Generator zu unsymmetrischer Arbeit. Am wichtigsten ist hier die Form der Gegenelektrode bzw. die Feldverteilung in der Nähe dieser Elektrode.

Als wichtigstes Anwendungsgebiet der Scheibengeneratoren sehen wir den Spannungsbereich um 200 kV pro Scheibeneinheit an, und zwar mit einer Scheibenzahl, die einer Stromstärke von mindestens 10 mA entspricht. Scheibenanlagen für größere Spannungen als 1000 kV lassen sich kaum empfehlen, weil man bei diesen und höheren Spannungen die große Stromergiebigkeit, die das Hauptmerkmal des Scheibengenerators ist, kaum ausnutzen kann.

Es mag interessieren, daß zur Zeit eine Scheibengeneratoranlage für 220 kV und 20 mA Arbeitsstromstärke im hiesigen Institut im Bau ist.

Bergen, Chr. Michelsens Institutt, Januar 1941.

Berichtigung

zu der Arbeit „Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler" von Z. Bay[1]).

Die Formel auf S. 227, Zeile 11, muß lauten:

$$Q = N \int_0^x x \varphi(x)\, dx \quad \text{statt} \quad Q = N \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

[1]) ZS. f. Phys. **117**, 227. 1941.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn a. Rh. und der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung, Berlin.)

Zur Theorie der nicht-stationären Entladungen. I.

Die Modulation des Hochdruckbogens durch eine dem Gleichstrom überlagerte Wechselstromkomponente.

Von **W. Weizel, R. Rompe** und **P. Schulz.**

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Februar 1941.)

Die Eigenschaften eines Hochdruckbogens bei Gleichstrombetrieb mit überlagerter kleiner Wechselstromkomponente werden untersucht. Es wird die Voraussetzung gemacht, daß ein quasistationäres thermisches Gleichgewicht sich ausbildet und der Kanalradius von der Leistung unabhängig ist (konvektionsstabilisierter Entladungstyp). Der Leistungsaufwand wird zunächst auf folgende Prozesse verteilt: Ausstrahlung, eine der Temperatur proportionale, praktisch zu vernachlässigende klassische Wärmeleitung und die Änderung der inneren Energie des Entladungskanals mit der Temperatur. Es wird des weiteren abgeschätzt, bis zu welchen Frequenzen sich die Annahme des quasistationären thermischen Gleichgewichts aufrechterhalten läßt. Es ergibt sich, daß zum mindesten für die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und der Anregung und Ionisation sich ein thermisches Gleichgewicht bei Frequenzen unter 10^6 Hertz einstellen dürfte. Diese Modellvorstellung liefert in folgenden Punkten Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von Mangold: Der Wechselstromleitwert nähert sich bei kleinen Frequenzen dem differentiellen Leitwert, bei großen Frequenzen dem Gleichstromleitwert. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung nähert sich bei sehr kleinen und sehr hohen Frequenzen Null und durchläuft dazwischen ein Maximum. Wird dagegen der Wechselstromanteil des Bogenwiderstandes in einen Ohmschen Anteil R_1 und einen induktiven Anteil $2\pi\nu L_1$ aufgespalten, so liefert unser Modell konstante Werte von R_1 und L_1, im Widerspruch mit den experimentellen Ergebnissen. Eine erweiterte Modellvorstellung durch Berücksichtigung der nichtstationären Wärmeleitung ergibt, daß aus der Integration der Differentialgleichung der Wärmeleitung für einen nicht-stationären Vorgang ein Zusatzglied für die klassische Wärmeleitung folgt, welches der Wurzel aus der Frequenz proportional ist. Hierdurch wird der Tatsache Rechnung getragen, daß bei höheren Frequenzen der Wärmeleitungsanteil nicht quasistationär den Feldstärkeschwankungen im Kanal folgt, sondern daß die Temperaturschwankungen im Kanal fortschreitende Wärmewellen im umgebenden Gasmantel hervorrufen. Dieser Anteil liefert dann eine Frequenzabhängigkeit von R_1 und $2\pi\nu L_1$. Es wird die Durchrechnung des vervollständigten Gleichungssystems für große und kleine Frequenz durchgeführt. Danach wird bei niedriger Frequenz R_1 nahezu frequenzunabhängig, während $2\pi\nu L_1$ proportional zu ν geht. Bei hohen Frequenzen setzt sich R_1 aus einem konstanten Anteil und einem Glied, das mit $\sqrt{\nu}$ ansteigt, zusammen. $2\pi\nu L_1$ ist dagegen durch einen Anteil, der ν proportional ist, und einem zweiten proportional zu $\sqrt{\nu}$ zusammengesetzt. Diese Ergebnisse stehen in brauchbarer Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund.

Schließlich werden noch der Einfluß der Temperaturabhängigkeit einzelner Konstanten sowie die Möglichkeit der Aufspaltung der Temperatur in Elektronen-, Ionen- und Translations-Temperaturen diskutiert. Es ergibt sich hierbei, daß an dem qualitativen Verlauf der Abhängigkeit und von R_1 und $2\pi\nu L_1$ im wesentlichen nichts geändert wird.

Vor einiger Zeit hat Mangold[1]) die Eigenschaften einer Quecksilberhöchstdrucklampe[2]) untersucht, bei der dem Gleichstrom eine Wechselkomponente überlagert war. Die experimentellen Ergebnisse dieser Untersuchung haben wir in einer kürzlich erschienenen Mitteilung theoretisch zu deuten versucht[3]).

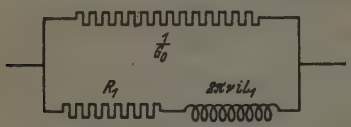


Fig. 1. Ersatzschaltschema des modulierten Hochdruckbogens.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist, die Vorgänge bei der Modulation von Hochdruckbögen zu klären, eine geeignete Modellvorstellung zu entwickeln und eine Durchrechnung des Modells vorzunehmen.

Die wichtigsten Ergebnisse der experimentellen Untersuchung der Modulation sind folgende:

1. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung nähert sich für sehr niedrige und sehr hohe Frequenzen Null und erreicht für mittlere Frequenzen ein Maximum.

2. Für kleine Frequenzen nähert sich der Wechselstromleitwert dem differentiellen Leitwert, während er für genügend hohe Frequenzen dem Gleichstromleitwert nahekommt.

3. Eine genauere Analyse des Frequenzganges des Wechselstromleitwertes, die in unserer vorangegangenen Mitteilung vorgenommen wurde, ergibt folgendes: Ersetzt man die Entladung durch einen Ohmschen Widerstand, entsprechend dem Gleichstromwiderstand (Leitwert G_0), und zu diesem parallel einen induktiven Widerstand $2\pi\nu L_1$ in Reihe mit einem zweiten Wirkwiderstand R_1 entsprechend dem Schaltschema der Fig. 1, so liefern die Messungen Mangolds für R_1 und L_1 die in Fig. 2 verzeichnete Frequenzabhängigkeit. Bei kleinen Frequenzen steigt der Widerstand R_1 zunächst nur langsam an, um bei mittleren Frequenzen verstärkt und bei hohen Frequenzen stärker als $\nu^{1/2}$ anzuwachsen. Der induktive Widerstand $2\pi\nu L_1$ steigt zunächst einigermaßen linear mit der Frequenz an, bleibt

[1]) H. Mangold, E. T. N. **17**, 57, 1940. — [2]) R. Rompe u. W. Thouret, ZS. f. techn. Phys. **17**, 377, 1936; **19**, 352, 1938. — [3]) W. Weizel, R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. techn. Phys. **21**, 387, 1940.

aber bei mittleren Frequenzen hinter der Proportionalität zurück, um schließlich bei hohen Frequenzen etwa wie $\nu^{1/2}$ zu wachsen. Der Selbstinduktionskoeffizient L_1 selbst geht also mit wachsender Frequenz schließlich wie $1/\nu^{1/2}$ zurück.

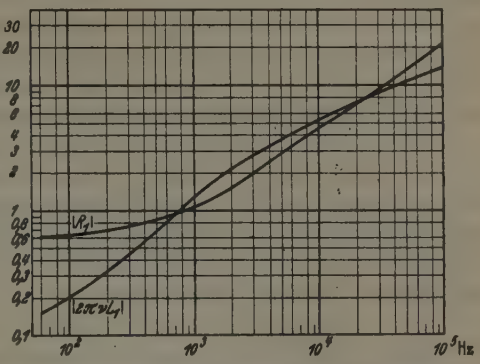


Fig. 2. Wirkwiderstand R_1 und induktiver Widerstand $2\pi\nu L_1$ des Wechselstromanteiles des Widerstandes eines modulierten Hg-Höchstdruckbogens (berechnet aus experimentellen Werten von Mangold).

4. Der Modulationsgrad des Lichtes ist gegeben durch die Beziehung

$$m_l = \frac{\Phi_{max} - \Phi_0}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0 - \Phi_{min}}{\Phi_0} = \frac{\Phi_{max} - \Phi_{min}}{2\,\Phi_0},$$

(Φ_0 Mittelwert des Lichtstromes zwischen den Grenzwerten Φ_{max} und Φ_{min}). Bei kleinen Frequenzen ist er gleich (genau etwas größer) dem Strommodulationsgrad und nimmt bei höheren Frequenzen ab.

5. Die Phasenverschiebung zwischen Licht und Strom steigt von Null bei kleinen Frequenzen monoton auf den Wert $\pi/2$ bei höheren Frequenzen an.

Modelle für die „konvektionsstabilisierte" Entladung.

Bei der Deutung der Wechselstrom- und Lichtmodulationseigenschaften des Quecksilberbogens könnte man zunächst daran denken, auf die älteren Theorien von Wehrli und Hardung[1]), sowie Jaumann[2]) zurückzugreifen, die entsprechende Probleme bei in Luft oder Stickstoff brennenden Kohlebögen behandeln. Dort wird die Strom- und Lichtmodulation im wesentlichen auf Vorgänge vor und in den Elektroden zurückgeführt. Der Beschreibung liegt folgendes einfache Modell zugrunde: Der Elektrodenoberfläche wird aus dem hocherhitzten Bogenplasma periodisch schwankend Energie zugeführt, während sie durch Abstrahlung und durch Wärmeleitung ins Elektrodeninnere Energie verliert. Dieser Standpunkt ist bei den Kohlebögen berechtigt, da der Spannungsabfall und damit die Leistungs-

[1]) M. Wehrli u. V. Hardung, Helv. Phys. Acta **2**, 115, 1929. — [2]) J. Jaumann, ZS. f. Phys. **59**, 386, 1930.

aufnahme in den Elektrodenfällen groß gegenüber dem im Säulenplasma ist und da die Ausstrahlung der Elektroden die des Gases bei weitem überwiegt.

Bei den hier in Frage stehenden Entladungen ist für die Wechselstromeigenschaften aber hauptsächlich die positive Säule verantwortlich. Von der Leistungsaufnahme fallen nämlich 15 bis 25% auf die elektrodennahen Gebiete, entsprechend einem Kathoden- und Anodenfall von zusammen etwa 15 bis 20 Volt, bei einer Brennspannung von etwa 60 bis 80 Volt. In der Säule werden also 75 bis 80% der aufgewandten Leistung umgesetzt. Bei der Untersuchung der Modulationseigenschaften der Strahlung hat Mangold sogar den — wenn auch nur geringen — Einfluß der Elektroden experimentell ausgeschaltet, so daß man hier sicher sein kann, daß nur die Eigenschaften der Säule in Erscheinung treten.

Die Hg-Höchstdrucklampe gehört zu dem Typ der „konvektionsstabilisierten" Entladungen[1]). Das wesentlichste Kennzeichen dieses Typs ist der sowohl vom Druck, wie auch von der Leistungsaufnahme unabhängige Kanaldurchmesser. Die Entladungsparameter derartiger Entladungen hängen nur von der Temperatur ab. Die Kennlinie ist oberhalb einer gewissen Leistung positiv. Dieser Typ tritt bei hohen Drucken und großen Leistungen pro cm auf.

Bei niedrigeren Drucken und Leistungen liegt ein anderer Entladungstyp vor, bei dem der Entladungsdurchmesser mit der Wurzel aus der Leistung ansteigt[2]) (wandstabilisierter Typ). Wie Lochte-Holtgreven und Maecker[3]) zeigten, gibt es diese beiden Entladungstypen nicht nur bei Quecksilberbögen, sondern auch bei Stickstoffbögen. Der wandstabilisierte Typ springt bei Leistungssteigerung in den konvektionsstabilisierten Typ um.

Die Mangoldschen Messungen beziehen sich ganz eindeutig auf die konvektionsstabilisierte Entladung. Dagegen hat Elenbaas[4]) vor einiger Zeit bei kleineren Drucken und Leistungen Wechselstromeigenschaften an Entladungen gemessen, die zu dem anderen Typus zu zählen sind. Trotzdem sind gewisse Parallelen vorhanden, insbesondere im Gebiet extrem kleiner und extrem großer Frequenzen.

Für die konvektionsstabilisierte stationäre Entladung benutzen wir folgendes einfache Modell. *Innerhalb eines Kanals vom Radius ϱ herrscht eine örtlich unveränderliche Temperatur.* Der Kanaldurchmesser ist, wenn

[1]) R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. **112**, 631, 1939. — [2]) J. Kern u. P. Schulz, ebenda **111**, 454, 1939. — [3]) W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, ebenda **116**, 267, 1940. — [4]) W. Elenbaas, Physica **3**, 12, 1936.

sich erst einmal der Typ der konvektionsstabilisierten Entladung eingestellt hat, durch den mechanischen Vorgang der Gasströmung vorgegeben, und hängt deshalb allenfalls von der Geometrie des Entladungsgefäßes und den Elektroden ab, nicht aber vom Druck und den elektrischen Bedingungen der Entladung. *Im Kanal herrscht thermisches Gleichgewicht.* Die elektrische Leitfähigkeit, die Ausstrahlung und die Wärmeableitungsverluste sind dann angebbare Funktionen der Kanaltemperatur. Für die Ausstrahlung $S(T)$ gilt:

$$S(T) = \text{const}\, e^{-\frac{e V_a}{k T}}, \tag{1}$$

wenn man die Reabsorption vernachlässigt (V_a = mittlere Anregungsspannung der Strahlung). Die Elektronendichte N_e ergibt sich aus der Sahaschen Beziehung:

$$N_e = \text{const}\, T^{3/4}\, e^{-\frac{e V_i}{2 k T}} \tag{2}$$

und die elektrische Leitfähigkeit:

$$F(T) = e N_e b_e \tag{3}$$

ebenfalls als Funktion der Temperatur allein. Hierbei kann man entweder die Elektronenbeweglichkeit (b_e), als mit der Temperatur nur wenig veränderlich, konstant setzen oder vielleicht korrekter ihre Temperaturabhängigkeit mitberücksichtigen[1]).

Für den Zusammenhang zwischen Stromstärke J und Feldstärke E (Gradient) ergibt sich die Beziehung:

$$J = \pi \varrho^2 F(T) E. \tag{4}$$

Den Wärmeableitungsverlust $A(T) = 2\pi\varrho\lambda T$ kann man bei stationärem Betrieb der Entladung der Kanaltemperatur proportional setzen. Er spielt gegenüber der Ausstrahlung in der stationären Entladung eine sehr untergeordnete Rolle und kann ohne großen Fehler ganz vernachlässigt werden.

Die Energiebilanz eines derartigen Modells:

$$E^2 F(T) \varrho^2 \pi = \pi \varrho^2 S(T) + 2\pi\varrho\lambda T \tag{5}$$

liefert eine zweite Beziehung zwischen E, J und der Temperatur T, und zusammen mit (4) eine Möglichkeit, zwei dieser Größen durch die dritte auszudrücken.

---

[1]) Die Elektronenbeweglichkeit besitzt in der Hg-Höchstdruckentladung wegen der hohen Ionendichte eine merkliche Abhängigkeit vom Ionisationsgrad und damit von der Temperatur (vgl. hierzu: P. Schulz, ZS. f. Phys. **114**, 435, 1939). Für die in dieser Arbeit behandelten Fragen kann sie jedoch noch vernachlässigt werden.

Dieses einfache und für den stationären Fall bewährte Modell wollen wir auf die modulierte Entladung übertragen. Lassen wir etwa die Feldstärke um einen Mittelwert schwanken, so wird diese schwerlich die Kanalbreite beeinflussen, zumal da diese ja gar nicht von den elektrischen Bedingungen abhängt. Die Vorstellung von dem durch die Konvektion vorgegebenen Kanal werden wir also beibehalten können. Etwas mehr Mühe müssen wir auf die Beantwortung der Frage verwenden, ob in jedem Zeitpunkt im Kanal noch thermisches Gleichgewicht herrscht, d. h. ob sich der zu der zeitlich veränderlichen Feldstärke bei stationärem Betrieb gehörige Zustand des Plasmas mit so großer Schnelligkeit ausbildet, daß wir bei unseren bisherigen Ansätzen bleiben, d. h. quasistationär rechnen können.

Bei den uns interessierenden Hochdruckentladungen herrscht eine relativ sehr hohe Elektronenkonzentration (10^{16} und mehr) im Entladungskanal. Die Relaxationszeit der Plasmawechselwirkung ist deshalb sehr kurz, 10^{-11} sec und kürzer[1]). Selbst bei den schnellsten nichtstationären Vorgängen dürfte deshalb die mittlere kinetische Energie der Elektronen den Feldstärkeschwankungen trägheitslos folgen unter Erhaltung der Gleichgewichtsverteilung, wenn die Elektronenkonzentrationen etwa die angegebenen Werte erreichen.

Es erwächst nun weiter die Frage, ob die einzelnen Freiheitsgrade der Atome die Anregung, die Ionisation und die Translation den Schwankungen der Feldstärke bzw. der Elektronentemperatur folgen können oder nicht. Sei N die Zahl der Atome pro ccm im Grundzustand, $N^+ = N_e$ die Zahl der Ionen, die schon wegen ihrer Entstehung der Zahl der Elektronen gleich sein muß. Tritt aus irgendeinem Grunde eine Abweichung des Wertes N^+ von dem durch die Saha-Gleichung für die betreffende Temperatur gegebenen Wert ein, so gilt folgende Gleichung für die Relaxation dieser Störung:

$$\frac{\mathrm{d}N^+}{\mathrm{d}t} = N N^+ S_1 - N^{+3} S_2 - N^{+2} R - D \,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, N^+. \qquad \text{(a)}$$

Hierbei bedeuten S_1 und S_2 die wirksame Stoßzahl für die Stoßionisation und die Dreierstoßrekombination, R die Rekombinationswahrscheinlichkeit unter Ausstrahlung und D den Diffusionskoeffizienten.

Da wir uns in der Hochdrucksäule immer in der Nähe des Gleichgewichtes befinden, können die beiden letzten Glieder wegen der großen

[1]) Vgl. hierzu: R. Rompe u. M. Steenbeck, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **18**, 257, 1939.

Stabilität der Säule gegen die beiden ersten vernachlässigt werden und wir erhalten die einfachere Beziehung:

$$\frac{dN^+}{dt} = NS_1N^+ - N^{+3}S_2. \tag{b}$$

Diese Gleichung liefert integriert:

$$u - u_\infty = u_0 - u_\infty e^{-2NS_1t}, \tag{c}$$

wo $u = 1/N_e^2$; u_0 die entsprechende Größe für die Elektronenkonzentration beim Einsetzen der Störung, u_∞ den stationären Wert der Elektronenkonzentration nach Abklingen der Störung darstellen.

Die Relaxationskonstante $1/\tau$ für u ist also $2NS_1$. Bei kleinen Abweichungen von der Gleichgewichtskonzentration gilt dasselbe auch für die Relaxationskonstante der Elektronenkonzentration. S_1 ist von der Größenordnung 10^{-10} bis 10^{-11}, die Atomkonzentration N in den uns hier interessierenden Fällen 10^{18} bis 10^{20}. Es kommen also für die Relaxationsdauer der Ionisation Zeiten von 10^{-7} bis 10^{-10} sec heraus, und zwar verkürzen sich diese offensichtlich mit zunehmender Atomdichte.

Eine ganz ähnliche Überlegung läßt sich auch für die Anregung anstellen. Es gilt:

$$\frac{dN_a}{dt} = NN^+s_1 - N_aN^+s_2 - N_a \cdot A, \tag{d}$$

wo s_1 und s_2 die Stoßzahl für anregende Stöße und Stöße zweiter Art ist und A den Koeffizienten für spontane Emission bedeutet. Wieder kann bei der Hochdruckentladung das spontane Ausstrahlungsglied vernachlässigt werden und man erhält:

$$\frac{dN_a}{dt} = NN^+s_1 - N_aN^+s_2, \tag{e}$$

woraus sich die Relaxationszeit

$$\tau = \frac{1}{N^+s_2} \tag{f}$$

ergibt. Die Relaxationszeit ist gleich der reziproken Häufigkeit der Stöße zweiter Art pro Atom und Sekunde, d. h. etwa 10^{-14} sec.

Man sieht aus diesen Abschätzungen, daß die Einstelldauer der Ionisation diejenige ist, die sich bei sehr hohen Frequenzen zunächst bemerkbar machen dürfte. Bis zu Frequenzen von der Größenordnung von 10^7 Hertz kann man jedoch annehmen, daß Elektronentemperatur, Ionisation und Anregung quasistationär den Feldstärkeschwankungen folgen.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse für die Gleichgewichtseinstellung zwischen Elektronengas und der Translation der Atome. Bei

der Behandlung der Relaxationszeit der Ionisation und Anregung haben wir davon Gebrauch gemacht, daß das thermische Gleichgewicht zwischen Elektronen und diesen beiden „Freiheitsgraden" der Atome ein sehr stabiles ist, und zwar deshalb, weil die Zahl der ionisierenden bzw. anregenden Stöße, und damit auch der entsprechenden inversen Vorgänge sehr viel größer ist als die der Energie entziehenden. So ist z. B. für die Anregung $N N_e S_1 = N^2 N_e S_2 \approx 10^{26}$, während die Zahl der Ausstrahlungsakte nur etwa 10^{22} ist. Es liegt dieses an dem relativ großen Wirkungsquerschnitt für Anregung und Ionisation. Für die Übertragung kinetischer Energie vom Elektron auf ein Atom ist hingegen der Querschnitt nur m/M mal dem gaskinetischen Querschnitt (m Elektronen-, M Atommasse), so daß man also etwa für Hg Werte erhält, die um etwa 10^{4-5} kleiner sind als für Anregung bzw. Ionisation. Andererseits erfolgt der energieentziehende Vorgang, der Stoß der Atome untereinander mit dem gaskinetischen Querschnitt, so daß also in der zu (a) und (d) analogen Bilanz für die Wechselwirkung von Elektronen und Atomtranslation die Energie entziehenden Glieder im Gegensatz zum Falle der Anregung und Ionisation nicht vernachlässigt werden dürfen; zum mindesten, solange nicht die stationäre Temperaturverteilung im Atomgas sich eingestellt hat. Man kommt deshalb zu dem Schluß, daß sich zwar auch für die kinetische Energie der Atome ein thermischer Gleichgewichtszustand mit dem Elektronengas einstellen wird, daß sich dieser jedoch nur relativ langsam einstellen wird, und deshalb dieses Gleichgewicht bei nichtstationärem Betrieb als erstes wird stören lassen. Wie wir weiter unten zeigen werden, ist gerade dieses Verhalten kennzeichnend für die nichtstationäre Säule.

In der Energiebilanz des quasistationären Modells muß natürlich auch die Energieaufspeicherung berücksichtigt werden, die mit der Temperaturschwankung des Plasmas verbunden ist. Auf der rechten Seite von (5) kommt also noch das Glied

$$\pi \varrho^2 C \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

hinzu. C ist die spezifische Wärme des Säulenplasmas auf ccm bezogen. In sie ist außer der Translationswärme des Gases und der Elektronen auch der Energiebedarf für die Anregung und die Ionisation schon einbezogen. An Stelle von (5) tritt somit

$$E^2 F = S + C \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\varrho} \lambda T. \qquad (5\,\mathrm{a})$$

Was wir jetzt noch nicht auf Quasistationarität untersucht haben, ist die Wärmeableitung. Man könnte glauben, daß es nicht sehr darauf

ankomme, ob dieser Vorgang, der in der stationären Energiebilanz keine große Rolle spielt, sich auf die Feldstärkeschwankungen trägheitslos einstellt oder nicht. Dies wird sich aber als irrig erweisen. Wir wollen trotzdem fürs erste doch einmal das Wärmeleitungsglied wie bisher mitführen, was bedeuten würde, daß die Wärmeableitung den Schwankungen der Entladung quasistationär nachkommt.

Modulation des Modells einer quasistationären konvektionsstabilisierten Entladung.

Ist die Amplitude der der Gleichspannung überlagerten Wechselspannung nur klein, so können wir

$$J = J_0 + i\, e^{2\pi i \nu t}, \qquad E = E_0 + \varepsilon\, e^{2\pi i \nu t},$$
$$T = T_0 + \vartheta\, e^{2\pi i \nu t}$$

setzen. Hier sind J_0 und E_0 der die Entladung speisende Gleichstrom bzw. Gleichspannung, und T_0 der Zeitmittelwert der Temperatur. i, ε und ϑ sind die Amplituden der Wechselkomponente bzw. der Temperaturschwankung. Setzen wir obige Ausdrücke für J, E, T in (4) und (5a) ein und vernachlässigen alle quadratischen und höheren Glieder in i, ε und ϑ, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$i = \varrho^2 \pi \left(\varepsilon F_0 + \vartheta E_0 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0 \right), \tag{6}$$

$$2 E_0 F_0 \varepsilon + E_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0 \vartheta = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_0 \vartheta + 2\pi i \nu C \vartheta + \frac{2}{\varrho} \lambda \vartheta, \tag{7}$$

wenn wir außerdem beachten, daß J_0, E_0 und T_0 (4) und (5) erfüllen. Auflösen von (6) und (7) ergibt

$$\vartheta = \varepsilon \frac{2 E_0 F_0}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_0 - E_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0 + \frac{2}{\varrho} \lambda + 2\pi i \nu C}, \tag{8}$$

$$i = \varrho^2 \pi \varepsilon \left(F_0 + \frac{2 E_0^2 F_0 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_0 - E_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0 + \frac{2}{\varrho} \lambda + 2\pi i \nu C} \right). \tag{9}$$

Den Wechselstromleitwert G können wir also aus dem Gleichstromleitwert $G_0 = F(T_0)\, \varrho^2 \pi$ und einem zweiten Anteil G_1 zusammensetzen, der

$$G_1 = \varrho^2 \pi \frac{2 E_0^2 F_0 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0}{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_0 - E_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T} \right)_0 + \frac{2}{\varrho} \lambda + 2\pi i \nu C}$$

ist. Der Anteil G_0 rührt daher, daß bei festgehaltener Trägerdichte der Strom der Spannung proportional ist, der Anteil G_1 daher, daß mit einer Erhöhung der Spannung sich die Temperatur und damit die Trägerdichte erhöhen.

Den reziproken Wert von G_1, den wir mit Z bezeichnen, spalten wir in den Realteil (Wirkwiderstand) R_1 und den Imaginärteil $2\pi\nu L_1$ (induktiver Widerstand) und erhalten:

$$R_1 = \frac{\frac{2}{\varrho}\lambda + \left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_0^2\left(\frac{dF}{dT}\right)_0}{2\varrho^2\pi E_0^2 F_0\left(\frac{dF}{dT}\right)_0}, \tag{10}$$

$$L_1 = \frac{C}{2\varrho^2\pi E_0^2 F\left(\frac{dF}{dT}\right)_0}. \tag{11}$$

Beide Größen ergeben sich frequenzunabhängig. Diese Aufteilung des Widerstandes des modulierten Bogens entspricht dem Ersatzschaltschema der Fig. 1.

Jetzt führen wir den differentiellen Leitwert, d. i. die Neigung der Gleichstromkennlinie

$$\left(\frac{dJ}{dE}\right)_0 = g = \pi\varrho^2 F_0 + \pi\varrho^2 E_0\left(\frac{dF}{dE}\right)_0 = G_0 + \pi\varrho^2 E_0\left(\frac{dF}{dT}\right)_0\left(\frac{dT}{dE}\right)_0$$

ein. Andererseits ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung (5) nach der Temperatur:

$$2E_0F_0\left(\frac{dE}{dT}\right)_0 = \left(\frac{dS}{dT}\right)_0 + \frac{2\lambda}{\varrho} - E_0^2\left(\frac{dF}{dT}\right)_0.$$

Setzen wir dies in R_1 und L_1 ein, so erhalten wir:

$$R_1 = \frac{1}{g - G_0}. \tag{12}$$

Für sehr kleine Frequenzen ergibt sich:

$$\lim_{\nu\to 0} G = G_0 + \lim_{\nu\to 0}\frac{1}{R_1 + 2\pi\nu i L_1} = G_0 + g - G_0 = g, \tag{13}$$

d. h. der Wechselstromleitwert konvergiert gegen den differentiellen Leitwert. Für große Frequenzen dagegen nähert er sich nach

$$\lim_{\nu\to\infty} G = G_0 + \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{R_1 + 2\pi i\nu L_1} = G_0 \tag{14}$$

dem Gleichstromleitwert G_0.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung folgt der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu L_1}{R_1 + G_0(R_1^2 + 4\pi^2\nu^2 L_1^2)}. \tag{15}$$

Sie nähert sich sowohl bei kleinen wie auch bei großen Frequenzen Null und durchläuft dazwischen ein Maximum.

Führt man R_1 und L_1 in die Temperaturschwankung ein, so erhält man

$$\vartheta = \varepsilon \frac{R_1 - 2\pi i \nu L_1}{\varrho^2 \pi E_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 (R_1^2 + 4\pi^2 \nu^2 L_1^2)}. \tag{16}$$

Die Phasenverschiebung zwischen Temperatur und damit auch der Strahlung und der Spannung wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\pi \nu L_1}{R_1} \tag{17}$$

und wächst somit mit der Frequenz von Null bis $\pi/2$ an. Bei kleinen Frequenzen ist wegen der Kleinheit von G_0 die Phasenverschiebung zwischen Strahlung und Spannung nur wenig größer als die zwischen Strom und Spannung.

Wenn wir dieses Ergebnis unseres Modells mit dem empirischen Befund vergleichen, so ergibt sich eine bemerkenswerte qualitative Übereinstimmung in folgenden Punkten: Der Wechselstromleitwert nähert sich bei kleinen Frequenzen dem differentiellen, bei großen Frequenzen dem Gleichstromleitwert. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung nähert sich für sehr kleine und sehr große Frequenzen Null und durchläuft dazwischen ein Maximum. Die Phasenverschiebung Licht–Spannung ist bei kleinen Frequenzen nur wenig größer als die zwischen Strom und Spannung und nähert sich bei großen Frequenzen dem Wert $\pi/2$. Es besteht hingegen keine quantitative Übereinstimmung im Gebiet mittlerer Frequenzen. Die aus den Messungen errechneten Werte von R_1 und L_1 sind von der Frequenz stark abhängig, während unser Modell diese Größen unabhängig von der Frequenz liefert. Der Unterschied ist derart groß, daß wir schließen müssen, daß bei unserem Modell noch ein sehr wesentlicher Umstand unbeachtet geblieben ist.

Das Verhalten der Wärmeableitung bei der Modulation.

Wir haben oben schon erwähnt, daß es ein Irrtum wäre, den Anteil der Wärmeableitung bei der nichtstationären Entladung ebenso klein einzuschätzen wie bei der stationären Entladung. Sicher ist, daß die Wärmeableitung den Feldstärkeschwankungen nicht quasistationär folgen kann. Dies wäre nur dann der Fall, wenn der den Kanal umgebende Gasmantel immer die zur jeweiligen Kanaltemperatur gehörige radiale Temperaturverteilung schnell genug einstellen könnte. Damit ist aber nicht zu rechnen. Wenn sich nun im Kanal die Temperatur schnell erhöht, werden in der

Nähe der Kanaloberfläche große Temperaturdifferenzen über kleine Entfernungen auftreten. Hierdurch muß der Wärmeableitungsverlust vergrößert werden, besonders wenn die Frequenz hoch ist. Die Temperaturschwankungen im Kanal werden fortschreitende Wärmewellen im umgebenden Gasmantel hervorrufen und diese müssen offenbar sorgfältiger berücksichtigt werden. Wir müssen deshalb das Wärmeableitungsproblem für sich untersuchen.

Der Kanal sei also von einem Gasmantel umgeben, dem wir die spezifische Wärme c_1, das Wärmeleitvermögen $\varkappa_1$ und die Dichte σ_1 zuschreiben. Die örtlich und zeitlich veränderliche Temperatur sei T_1. Der Gasmantel sei begrenzt durch eine zylindrische Gefäßwand, deren Radius mit ϱ_2 bezeichnet werde.

Für den Wärmeleitungsvorgang im Gasmantel gilt dann die Differentialgleichung:

$$\sigma_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varkappa_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r}. \tag{18}$$

Als Randbedingungen treten hinzu:

$$\text{für } r = \varrho: \quad T_1 = T = T_0 + \vartheta_1 e^{2\pi i \nu t}$$

für die Oberfläche des Kanals, und

$$\text{für } r = \varrho_2: \quad T_1 = T_2 = \text{const}$$

für die Gefäßwand. Hierbei nehmen wir an, daß die Wärmekapazität der Gefäßwand so groß sei, daß in ihr keine Temperaturschwankungen mehr auftreten.

Die gesuchte Wärmeableitung ist:

$$A = -2\pi\varrho \left(\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_\varrho. \tag{19}$$

Eine Schwierigkeit besteht zunächst darin, daß c_1, σ_1 und $\varkappa_1$ selbst noch von der Temperatur abhängen. Diese Abhängigkeit verlachlässigen wir fürs erste, kommen aber später darauf noch einmal zurück. Der Ansatz

$$T_1 = T_{01} + \vartheta_1 e^{2\pi i \nu t} \tag{20}$$

liefert dann

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r \frac{\mathrm{d}T_{01}}{\mathrm{d}r}$$

mit den Randbedingungen

$$r = \varrho: \quad T_{01} = T_0; \quad r = \varrho_2: T_{01} = T_2,$$

wo T_{01} die Temperaturverteilung im Gasmantel ist, die sich auch bei Gleichstrom einstellt. Zu ihr gehört der Wärmeableitungsanteil

$$A_0 = \frac{2\pi\varkappa_1 (T_0 - T_2)}{\ln \frac{\varrho_2}{\varrho}} \approx 2\pi\lambda\varrho T_0, \tag{21}$$

den wir bisher schon berücksichtigt haben und der nicht stark in der Energiebilanz ins Gewicht fällt. Für ϑ_1 verbleibt die Gleichung

$$\frac{2\pi i \nu \sigma_1 c_1 \vartheta_1}{\varkappa_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{\mathrm{d}r} \tag{22}$$

mit den Randbedingungen

$$r = \varrho : \vartheta_1 = \vartheta \quad \text{und} \quad r = \varrho_2 : \vartheta_1 = 0. \tag{23}$$

Durch die Abkürzung

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda^2} = -\frac{2\pi i \nu \sigma_1 c_1}{\varkappa_1}; \quad \frac{2\pi}{\Lambda} = (1-i)\sqrt{\frac{\pi \nu \sigma_1 c_1}{\varkappa_1}}$$

erhalten wir die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta_1}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{\mathrm{d}r} + \frac{4\pi^2\vartheta_1}{\Lambda^2} = 0,$$

deren Lösung wir aus der Besselschen Funktion J_0 und der Hankelschen Funktion $H_0^{(2)}$ zusammensetzen können. (Wir treffen gerade diese Auswahl unter den Zylinderfunktionen, weil das Argument

$$\frac{2\pi r}{\Lambda} = (1-i)\, r\sqrt{\frac{\pi \nu \sigma_1 c_1}{\varkappa_1}}$$

komplex mit negativem Imaginärteil ist. Diesem Argument ist $H^{(2)}$ angepaßt. Näheres S. Jahnke-Emde VIII.) Es ist dann

$$\vartheta_1 = a H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) + b J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right), \tag{24}$$

während die Koeffizienten a und b sich aus den Randbedingungen (23) durch

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= a H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) + b J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right), \\ 0 &= a H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) + b J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ergeben. Für die gesuchte Wärmeableitung erhalten wir

$$A = -2\pi\varrho\varkappa_1\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{\mathrm{d}r}\right)_\varrho = \frac{4\pi^2\varrho\varkappa_1}{\Lambda}\left\{a H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) + b J_1\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)\right\},$$

da

$$\frac{\mathrm{d}H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi r}{\Lambda}\right)}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\pi}{\Lambda} H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi r}{\Lambda}\right); \quad \frac{\mathrm{d}J_0\left(\frac{2\pi r}{\Lambda}\right)}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\pi}{\Lambda} J_1\left(\frac{2\pi r}{\Lambda}\right)$$

ist. Löst man (25) nach a und b auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a &= \vartheta \frac{J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) - H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}, \\ b &= -\vartheta \frac{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) - H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

Da Λ die Frequenz enthält, hängen auch a und b von ihr ab. Bei dieser komplizierten Struktur der Formel ist es für den allgemeinen Fall nicht leicht, einen Überblick über die Frequenzabhängigkeit des Wärmeableitungsverlustes zu gewinnen.

Bei der konvektionsstabilisierten Entladung ist es nicht sicher, daß die Wärmeableitung sich vom Kanal bis zur Gefäßwand auswirkt. Es ist vielmehr

damit zu rechnen, daß die Energie durch Wärmeleitung nur durch eine verhältnismäßig dünne Zone um den Kanal herum transportiert wird, während weiter außen die Konvektion den Transport bewirkt. Mit anderen Worten, durch die Konvektion wird ein sehr rascher Temperaturabfall in der Umgebung des Kanals verursacht. Wir werden also für ϱ_2 nicht den Radius der Gefäßwand einzusetzen haben, sondern eine Größe, die viel kleiner ist, wahrscheinlich nicht sehr viel größer als ϱ.

Für große Frequenzen und dementsprechend kleine Λ können wir eine Näherung durchführen. Wenn Λ kleiner als $\varrho_2 - \varrho$ ist, wird

$$\left| H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)\right| = \left| H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda^*}\right)\right| \ll \left| H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda^*}\right)\right| = \left| H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)\right| \quad (27)$$

und

$$J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) \gg J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right).$$

Für a und b ergibt sich dann einfach

$$a = \frac{\vartheta}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}; \quad b = -\vartheta \frac{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)}. \quad (28)$$

Für die Wärmeableitung erhält man somit

$$A = \frac{4\pi^2\varrho\varkappa_1\vartheta}{\Lambda}\left\{\frac{H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)} - \frac{J_1\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)} \cdot \frac{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}\right\}. \quad (26\,a)$$

Hier können wir auch noch das zweite Glied weglassen, da außer (27) auch noch

$$J_1\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) \ll J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right)$$

gilt. Nun ist aber auch $\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}$ eine nicht kleine Zahl (3 ist schon genug), und unter dieser Voraussetzung ist in brauchbarer Näherung:

$$\frac{H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)}{H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)} = \left\{\frac{H_1^{(1)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda^*}\right)}{H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda^*}\right)}\right\}^* = i, \quad (29)$$

so daß wir einfach

$$A = \frac{4\pi^2\varrho\varkappa_1\vartheta}{\Lambda} i = (1+i)\, 2\pi\varrho\,\vartheta\sqrt{\pi\nu\sigma_1 c_1 \varkappa_1} \quad (26\,b)$$

erhalten.

Dies gilt allerdings nur für große Frequenzen. Für kleine Frequenzen kann man, wenn außerdem $\varrho_2 - \varrho \ll \varrho$ ist, ebenfalls eine Näherung durchführen. Wir subtrahieren die beiden Gleichungen (25) voneinander und setzen

$$H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) - H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) = -\frac{2\pi(\varrho_2-\varrho)}{\Lambda} H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right),$$

$$J_0\left(\frac{2\pi\varrho_2}{\Lambda}\right) - J_0\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right) = -\frac{2\pi(\varrho_2-\varrho)}{\Lambda} J_1\left(\frac{2\pi\varrho}{\Lambda}\right)$$

und erhalten

$$\vartheta = \frac{2\pi(\varrho_2 - \varrho)}{A}\left\{a\,H_1^{(2)}\left(\frac{2\pi\varrho}{A}\right) + b\,J_1\left(\frac{2\pi\varrho}{A}\right)\right\}.$$

Dies in A eingesetzt ergibt

$$A = \frac{2\pi\varrho\varkappa_1}{\varrho_2 - \varrho}\vartheta. \tag{26c}$$

Das Ergebnis der Berechnung ist also folgendes: Bei der konvektionsstabilisierten Entladung hat für größere Frequenzen der Wärmeleitungsverlust die

$$A = 2\pi\lambda\varrho T_0 + 2\pi\varrho(1+i)\,\vartheta\sqrt{\pi\nu\sigma_1 c_1\varkappa_1}. \tag{26d}$$

Er setzt sich aus einem frequenzunabhängigen Glied, das auch bei stationärem Betrieb vorhanden ist, und einem zweiten Glied zusammen, das mit der Wurzel aus der Frequenz wächst. Dieser Anteil hat einen gleich großen Real- und Imaginärteil. Im Gegensatz hierzu nähert sich für kleine Frequenzen der Wärmeableitungsverlust dem Werte

$$A = 2\pi\lambda\varrho T_0 + \frac{2\pi\varrho\varkappa_1}{\varrho_2 - \varrho}\vartheta. \tag{26e}$$

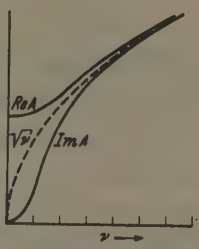


Fig. 3. Wärmeleitungsverlust in Abhängigkeit von der Frequenz (schematisch).

Neben dem stationären Anteil ist ein zweiter, aber von der Frequenz unabhängiger Anteil vorhanden. Die ganze Wärmeableitung ist bei kleinen Frequenzen reell. Im Übergangsgebiet zwischen großen und kleinen Frequenzen muß der Realteil weniger als mit der Wurzel aus der Frequenz abnehmen und schließlich ganz konstant werden. Der Imaginärteil hingegen muß stärker als $\sqrt{\nu}$ abnehmen und für kleine ν mit horizontaler Tangente gegen Null gehen. Eine schematische Darstellung zeigt Fig. 3.

Berücksichtigungen der Wärmewellen bei der Modulation.

Die Berücksichtigung der Wärmewellen bei der Modulation ist jetzt sehr einfach. Es ist nur nötig, in den Formeln (7), (8) und (9) an Stelle von $2\lambda/\varrho$ den Ausdruck

$$\frac{2}{\varrho}(1+i)\sqrt{\pi\nu\sigma_1 c_1\varkappa_1}$$

einzusetzen, um für mittlere und höhere Frequenzen gültige Formeln zu bekommen. Man erhält

$$\vartheta = \varepsilon \frac{2 E_0 F_0}{\left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_\delta^2 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 + \frac{2}{\varrho}(1+i)\sqrt{\pi \nu \sigma_1 c_1 \varkappa_1} + 2\pi i \nu C}, \tag{8a}$$

$$i = \varrho^2 \pi \varepsilon \left\{ F_0 + \frac{2 E_\delta^2 F_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0}{\left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_\delta^2 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 + \frac{2}{\varrho}(1+i)\sqrt{\pi \nu \sigma_1 c_1 \varkappa_1} + 2\pi i \nu C} \right\} \tag{9a}$$

und daraus

$$R_1 = \frac{\left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_\delta^2 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 + \frac{2}{\varrho}\sqrt{\pi \nu \varrho_1 c_1 \varkappa_1}}{2 \varrho^2 \pi E_\delta^2 F_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0}, \tag{10a}$$

$$2\pi \nu L_1 = \frac{2\pi \nu C + \frac{2}{\varrho}\sqrt{\pi \nu \sigma_1 c_1 \varkappa_1}}{2 \varrho^2 \pi E_\delta^2 F_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0}. \tag{11a}$$

Für niedrige Frequenzen ist die Sache noch einfacher, da statt $2\lambda/\varrho$ ein konstantes Glied zu setzen ist. Man kann sogar einfach $2\frac{\lambda}{\varrho}$ stehen lassen und die früheren Formeln beibehalten.

Wir kommen also zu folgender Aussage über die Frequenzabhängigkeit von R_1 und L_1: Bei kleinen Frequenzen ist R_1 nahezu konstant, wächst aber bei mittleren Frequenzen in einer kompliziert von der Frequenz abhängigen Weise an, um bei großen Frequenzen wie die Wurzel aus der Frequenz weiter zu wachsen. Der induktive Widerstand ist bei kleinen Frequenzen der Frequenz proportional. Bei größeren Frequenzen tritt ein weiteres Glied hinzu, das zunächst eine verwickelte Frequenzabhängigkeit besitzt, bei großen Frequenzen aber proportional zur Wurzel aus der Frequenz wird.

Tatsächlich ist der Frequenzgang von R_1 und $2\pi\nu L_1$ dieser Beschreibung sehr ähnlich. Eine vollkommene quantitative Übereinstimmung allerdings läßt sich nicht nachweisen, einerseits, weil ja die Berechnung der Wärmewellen gar keine einfache Gesetzmäßigkeit über ein größeres Frequenzband liefert und andererseits, weil doch noch immer einige Einflüsse unberücksichtigt sind. Sicher scheint aber zu sein, daß neben der Wärmekapazität des Kanals das Auftreten der Wärmewellen bei höheren Frequenzen den hauptsächlichen Unterschied zwischen der stationären und der Wechselstromentladung ausmacht.

Die Lichtmodulation.

Da wir die Strahlung durch die Einführung einer mittleren Anregungsspannung V_a berücksichtigt haben, muß sich das Licht hinsichtlich seiner Temperaturabhängigkeit genau so verhalten, wie die Gesamtstrahlung, und dementsprechend auch die Modulationseigenschaften der Gesamtstrahlung dieselbe sein, wie die des sichtbaren Anteils. In der Tat hat Mangold durch Filtermessungen gezeigt, daß ein Unterschied des Modulationsgrades zwischen den einzelnen Spektralbereichen, wenn die Elektrodenstrahlung abgezogen wird, nicht auftritt.

Die auftretende Lichtamplitude ist also: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\vartheta$, oder zum mindesten proportional zu dieser Größe. Aus Gleichung (8a) und (9a) können wir die Phasenverschiebung zwischen der Temperaturamplitude ϑ und der des Stromes j berechnen. Es ergibt sich:

$$\vartheta = \frac{j}{2\pi\varrho^2 E_0}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_0 + E_0^2 F_0\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}T}\right)_0 + \frac{2}{\varrho}(1+j)\sqrt{\pi\nu\sigma_1 c_1 \varkappa_1} + 2\pi i\nu C\right\}. \quad (8\mathrm{b})$$

Hieraus ergibt sich: bei kleinen Frequenzen besteht keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Temperatur, d. h. Lichtschwankung. Bei hohen Frequenzen nähert sich die Phasenverschiebung $\pi/2$, in Übereinstimmung mit dem Experiment. Ferner wächst bei vorgegebener Stromamplitude die Temperatur- bzw. Lichtamplitude mit der *Stromdichte*, d. h. mit abnehmendem Kanalradius. Dieses bestätigt die von Mangold gefundenen Unterschiede zwischen den einzelnen Lampentypen, und ferner auch die Zunahme des Modulationsgrades in den Gebieten vor den Elektroden, die gegenüber der Säule merklich kontrahiert sind (Elektrodenansätze).

Man sieht aber auch aus (8b), daß die Abnahme der Temperaturamplitude durch dieselben Glieder bezeichnet wird, wie die Zunahme von $2\pi\nu L_1$ (11a), so daß also beides parallel gehen muß.

Diskussion anderer Einflüsse.

Wir wollen jetzt einen Blick auf die Umstände werfen, die wir bei unserer bisherigen Betrachtung noch nicht beachtet haben. Hier wäre folgendes zu erwähnen:

1. Von Anfang an sind alle nichtlinearen Glieder in den Strom-Spannungs- und Temperaturschwankungen vernachlässigt worden. Das beschränkt die Gültigkeit aller Überlegungen auf kleinen Modulationsgrad. Bei stärkerer Modulation müssen also Abweichungen erwartet werden. Sie durch Berücksichtigung nichtlinearer Glieder zu berechnen, ist nahezu aussichtslos.

2. Die in unserer Rechnung als Konstanten geführten Größen hängen alle mehr oder weniger von der Temperatur ab. Der Koeffizient für die Wärmekapazität des Kanals C umfaßt nicht nur die Vergrößerung der Translationsenergie mit der Temperatur, sondern auch den Energiebedarf zur größeren Auffüllung der Anregungszustände und für die zusätzliche Ionisierung[1]). Man müßte also den Ansatz

$$C = C_0 + \alpha\, \vartheta\, e^{2\pi i \nu t}$$

machen. Da aber C noch mit ϑ multipliziert wird, wir aber sowieso alle nichtlinearen Glieder vernachlässigt haben, ist dies überflüssig. Natürlich ist unter C dann tatsächlich die Wärmekapazität bei dem Temperaturmittel T_0 zu verstehen.

Für die Konstanten σ_1, c_1 und $\varkappa_1$ gilt ganz entsprechendes wie für C. Sie hängen ebenfalls von der Temperatur ab. Bei dem Koeffizienten der Wärmeleitung rührt dies nach Rompe und Schulz[2]) von dem Energietransport durch Ionendiffusion her. Wie bei C macht aber die Temperaturabhängigkeit von σ_1 und c_1 nur einen Fehler bei großen Modulationsamplituden. Wir können davon also absehen. Die Inkonstanz der Wärmeleitung hingegen wirkt sich in zweierlei Hinsicht aus. Setzen wir z. B.

$$\varkappa_1 = \varkappa_0 + \beta\, \vartheta_1\, e^{2\pi i \nu t},$$

so liefert (19) unter Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung noch ein neues Glied

$$A = -2\pi\varrho\varkappa_0 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_\varrho - 2\pi\varrho\beta\vartheta\, e^{2\pi i \nu t} \left(\frac{\mathrm{d}T_{01}}{\mathrm{d}r}\right)_\varrho.$$

Zur Wärmeableitung kommt also noch ein reeller frequenzunabhängiger Anteil hinzu. Da wir einen solchen Anteil schon sowieso haben, macht das nichts Wesentliches aus. Die Inkonstanz von $\varkappa_1$ bewirkt aber auch eine Abänderung der Besselschen Differentialgleichung, aus der sich die Temperaturverteilung in dem den Kanal umgebenden Gasmantel ergibt. Da dies schon eine Einwirkung zweiter Ordnung ist, möchten wir ihre Bedeutung nicht für sehr groß halten. Wenn auch der Einfluß der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitungskoeffizienten nicht so groß ist, daß er die errechneten Gesetzmäßigkeiten wesentlich verändern kann, muß man ihm doch eine solche Größe zubilligen, daß er die quantitative Übereinstimmung verdirbt.

3. Der dritte Umstand, der in unserer Rechnung nicht beachtet ist, wenn auch schon angedeutet, ist die Möglichkeit, daß bei den höchsten

[1]) F. Möglich, K. H. Riewe und R. Rompe, Ann. d. Phys. **35**, 735, 1939. — [2]) R. Rompe und P. Schulz, ZS. f. Phys. **113**, 10, 1939.

Frequenzen die Translation, vielleicht sogar die Ionisation sich nicht mehr quasistationär auf die Feldstärkeschwankungen einstellen können.

Wir wollen diesen Umstand etwas untersuchen unter der Annahme, daß nur die Translation der Atome mit der Elektronentemperatur nicht mitkommt. Wir müssen dann mit einer Elektronentemperatur T_e bzw. ϑ_e und einer Translationstemperatur T_g bzw. ϑ_g rechnen. Die Leitfähigkeit und die Strahlung hängen nur mit der Elektronentemperatur zusammen. Statt einer Energiebilanz müssen jetzt zwei solche Bilanzen aufgestellt werden, nämlich eine für alle Energieformen, des Plasmas ausgenommen, die kinetische Energie der Atome und eine zweite, eben gerade für diese. Für den Übergang von anderen Energien pro ccm · sec in Translationsenergie der Atome machen wir den Ansatz

$$\gamma\,(T_e - T_g)$$

und erhalten damit die Bilanzen

$$E^2 F = S + C_e \frac{\mathrm{d}\,T_e}{\mathrm{d}\,t} + A_e - \gamma\,(T_e - T_g),$$

$$0 = C_g \frac{\mathrm{d}\,T_g}{\mathrm{d}\,t} + A_g + \gamma\,(T_e - T_g).$$

Setzen wir wieder

$$\begin{aligned} T_e &= T_0 + \vartheta_e\, e^{2\pi i \nu t}, \\ T_g &= T_0 + \vartheta_g\, e^{2\pi i \nu t}, \\ E &= E_0 + \varepsilon\, e^{2\pi i \nu t}, \end{aligned}$$

so entsteht

$$\left.\begin{aligned} 2 E_0 F_0 \varepsilon + E_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,T}\right)_0 \vartheta_e - \left(\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,T}\right)_0 \vartheta_e &= 2\pi i \nu C_e \vartheta_e + a_e (1+i)\sqrt{\nu}\,\vartheta_e \\ &\quad + \gamma\,(\vartheta_e - \vartheta_g), \\ 0 &= -2\pi i \nu C_g \vartheta_g + a_g (1+i)\sqrt{\nu}\,\vartheta_g + \gamma\,(\vartheta_g - \vartheta_e). \end{aligned}\right\} \quad (31\,a)$$

Es ist ganz interessant, daß dieser Ansatz sich auf beliebig viele Temperaturen ohne weiteres verallgemeinern ließe. Führen wir die Temperaturen ϑ_k ein, wo k beliebig viele Werte annehmen kann, definieren Werte γ_{ik} durch den Übergang einer Energieform in die andere und setzen für jede Energieform auch Werte C_k und a_k fest, so erhalten wir die Gleichungen

$$B_k = \{2\pi i \nu C_k + a_k (1+i)\sqrt{\nu}\}\,\vartheta_k + \sum i\,\gamma_{ik}\,(\vartheta_i - \vartheta_k). \quad (32)$$

Wenn wir für die B_k folgende Festsetzung treffen:

$B_k = 2 E_0 F_0 \varepsilon$	Elektronentranslationstemperatur,
$B_k = -(\mathrm{d}S/\mathrm{d}T)\,\vartheta_k$	Anregungstemperatur,
$B_k = E_0^2\,(\mathrm{d}F/\mathrm{d}T)_0\,\vartheta_k$	Ionisationstemperatur,
$B_k = 0$	alle anderen Temperaturen.

Aus den Gleichungen (31a) kann man ϑ_g eliminieren und ϑ_e berechnen und findet

$$\vartheta_e = \varepsilon \frac{2 E_0 F_0}{\left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_\delta^2 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 + 2\pi i \nu C_e + a_e(1+i)\sqrt{\nu} + \gamma - \frac{\gamma^2}{2\pi i \nu C_g + a_g(1+i)\sqrt{\nu} + \gamma}}$$

Für R_1 und $2\pi\nu L_1$ ergeben sich daraus die Formeln

$$R_1 = \frac{\left(\frac{dS}{dT}\right)_0 - E_\delta^2 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0 + a_e\sqrt{\nu} + \gamma - \frac{\gamma^2(\gamma + a_g\sqrt{\nu})}{(\gamma + a_g\sqrt{\nu})^2 + (2\pi\nu C_g + a_g\sqrt{\nu})^2}}{2\varrho^2 \pi E_\delta^2 F_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0},$$

$$2\pi\nu L_1 = \frac{2\pi\nu C_e + a_e\sqrt{\nu} + \frac{\gamma^2(2\pi\nu C_g + a_g\sqrt{\nu})}{(\gamma + a_g\sqrt{\nu})^2 + (2\pi\nu C_g + a_g\sqrt{\nu})^2}}{2\varrho^2 \pi E_\delta^2 F_0 \left(\frac{dF}{dT}\right)_0}.$$

Obwohl dieses Verfahren sich grundsätzlich leicht durchführen läßt, bringt es doch keinen großen Fortschritt. Wirkwiderstand wie induktiver Widerstand bekommen eine kompliziertere Frequenzabhängigkeit. Für große γ, das ist geringes Auseinanderklaffen der beiden Temperaturen, erhalten wir bei R_1 zusätzlich ein positives, zur Frequenz proportionales Glied, bei $2\pi\nu L_1$ ein zusätzliches negatives Glied, das $\nu^{3/2}$ proportional ist. Bei höheren Frequenzen kommen noch Glieder hinzu, die mit höheren Potenzen von ν gehen.

Die Modulation der wandstabilisierten Entladung.

Es bedarf kaum einer Erörterung, daß dieselben Überlegungen wie für die konvektionsstabilisierte Entladung auch für die wandstabilisierte Entladung gemacht werden können. Die Unterschiede können nur im Quantitativen liegen, d. h. die Bereiche, in denen die verschiedenen Näherungen gelten, können anders liegen. Mit dieser Frage werden wir uns noch versuchen genauer auseinanderzusetzen.

Elektronenoptische Fokussierung durch quasistatische Bahnen.

Von **Richard Wallauschek** in Berlin.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Februar 1941.)

Die Fokussierungseigenschaften elektronenoptischer Zylinderlinsen werden aus der Theorie der quasistatischen Bahnen hergeleitet und allgemeine Formeln für die Berechnung der Fokussierungswinkel aus den Potentialen beliebiger rotationssymmetrischer Felder angegeben; im allgemeinen weisen elektronenoptische Zylinderlinsen für verschieden orientierte Strahlenflächen eine dem Astigmatismus analoge Erscheinung auf. Als Beispiele werden folgende Felder durchgerechnet: Homogenes Magnetfeld, Zylinderkondensator, elektrisches Coulombfeld, elektrischer und magnetischer Dipol und die Kombination aus homogenem Magnetfeld, Zylinderkondensator und magnetischem Dipol.

Eine Reihe praktisch verwendeter elektronenoptischer Zylinder- und Fokussierungslinsen ist dadurch gekennzeichnet, daß der in einem rotationssymmetrischen Feld verlaufende „Hauptstrahl" des Systems einen zur Feldachse symmetrischen Kreis darstellt, ein längs dieses Strahles fliegendes geladenes Teilchen somit eine in bezug auf ein Zylinderkoordinatensystem quasistatische Bahn beschreibt. Teilchenstrahlen, die von einem Punkt des Hauptstrahles ausgehend unter kleinen Winkeln gegen diesen geneigt sind, werden unter gewissen Voraussetzungen in erster Näherung wieder im Hauptstrahl vereinigt; diese Fokussierung weist im allgemeinen eine dem Astigmatismus analoge Erscheinung auf.

Einige aus Experimenten bekannte Beispiele für Fokussierung durch quasistatische Bahnen wurden rechnerisch schon durch dem jeweiligen Problem angepaßte Methoden behandelt; diese Beispiele fügen sich hier als Spezialfälle ein. Explizit behandelt werden nur quasistatische Kreisbahnen; durch geeignete Wahl des Koordinatensystems läßt sich der Vorgang jedoch auch auf andere abbildende Medien übertragen, indem man das Koordinatensystem so wählt, daß der Hauptstrahl des Systems als quasistatische Bahn in bezug auf das gewählte Koordinatensystem erscheint.

Hängt die Lagrangesche Funktion L eines Systems, und somit auch die Routhsche Funktion R[1])

$$\left.\begin{aligned} R(u_j; q_i, \dot{q}_i) &= -L(\dot{w}_j; q_i, \dot{q}_i) + \sum_j u_j \dot{w}_j \\ u_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_j}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}, \\ j &= 1, 2, \ldots, \mu; \quad i = 1, 2, \ldots, n-\mu \end{aligned}\right| \tag{1}$$

von μ Koordinaten w_j nicht explizit ab, sind die Impulse u_j somit gleich Konstanten α_j, dann werden die Bewegungsgleichungen durch ein Teilsystem von Lösungen, die in bezug auf das gewählte Koordinatensystem „quasiststischen" Bahnen[2]) erfüllt, für die alle „wahrnehmbaren" Koordinaten q_i des Systems konstante Werte $\bar{q}_i$ annehmen, während die „verborgenen" Koordinaten w_j mit konstanten Geschwindigkeiten $\dot{w}_j = \omega_j$ linear mit der Zeit anwachsen. Die Werte $\bar{q}_i$ ergeben sich als Lösungen der $(n-\mu)$ endlichen Gleichungen

$$\left[\frac{\partial R(\alpha_j; q_i(\alpha_j), \dot{q}_i(\alpha_j))}{\partial q_i(\alpha_j)}\right]_{\substack{q_i = \bar{q}_i \\ \dot{q}_i = 0}} = 0 \tag{2}$$

als Funktion der frei wählbaren konstanten Impulse α_j, die Geschwindigkeiten ω_j ergeben sich aus

$$\omega_j = \frac{\partial R(\alpha_j; q_i(\alpha_j), \dot{q}_i(\alpha_j))}{\partial \alpha_j}. \tag{3}$$

Die dem Problem quasistatischer Kreisbahnen angepaßten Koordinaten sind Zylinderkoordinaten (r, φ, z), (z-Achse = Symmetrieachse des Feldes). Die Lagrangesche Funktion für ein mit der Ladung e versehenes Teilchen von der Masse m lautet für die Bewegung in einem rotationsymmetrischen Feld, das durch skalares Potential $V(r, z)$ und Vektorpotential $\mathfrak{A}(r, z)$ charakterisiert ist, innerhalb der klassischen Mechanik und im elektromagnetischen Maßsystem

$$L = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - eV(r, z) + er\varphi A(r, z), \tag{4}$$

wobei A die bei der vorausgesetzten Rotationssymmetrie einzige nicht verschwindende φ-Komponente des Vektorpotentials ist. L ist somit abhängig von zwei wahrnehmbaren Koordinaten r, z und von einer verborgenen Koordinate φ. Der zu φ konjugierte Impuls ist

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + erA(r, z). \tag{5}$$

---

[1]) Siehe Frank-Mises, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Auflage, Bd. II, Kap. II, § 2, (5). — [2]) Siehe Frank-Mises, Kap. III, § 1.

Die Routhsche Funktion des Systems lautet:

$$R = -\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + eV + \frac{1}{2m}\left(\frac{u - erA}{r}\right)^2. \tag{6}$$

Die Definitionsgleichungen für die quasistatischen Werte $\bar{r}$, $\bar{z}$, ω lauten nach (2), (3) explizit

$$\omega - \frac{\alpha - e\bar{r}A}{m\bar{r}^2} = 0, \tag{7}$$

$$\omega\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial\bar{r}} - \frac{\partial V}{\partial\bar{r}} + \frac{m}{e}\bar{r}\omega^2 = 0, \tag{8}$$

$$\omega\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial V}{\partial\bar{z}} = 0. \tag{9}$$

Von den quasistatischen Bahnen $\bar{r}$, $\bar{z}$ soll nun zu benachbarten („gestörten") Bahnen übergegangen werden durch den Ansatz

$$r(t) = \bar{r} + \varrho(t); \quad z(t) = \bar{z} + \zeta(t). \tag{10}$$

Differentialgleichungen für die ersten Näherungen von ϱ, ζ erhält man nach der Methode der Störungstheorie[1]) durch Einführung des Ansatzes (10) in die Lagrangesche Funktion, deren Entwicklung nach den als klein vorausgesetzten Größen ϱ, ζ, bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschließlich, und Bildung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen mit dieser Näherungsentwicklung; dabei zeigt sich, daß die Glieder nullter und erster Ordnung herausfallen, zur Bildung der Lagrangeschen Gleichungen somit nur das Glied zweiter Ordnung L_2 der Entwicklung zu verwenden ist.

Für den vorliegenden Fall gilt

$$-2L_2 = \varrho^2\frac{\partial^2 R(\bar{r},\bar{z})}{\partial\bar{r}^2} + \zeta^2\frac{\partial^2 R(\bar{r},\bar{z})}{\partial\bar{z}^2} - m(\dot{\varrho}^2 + \dot{\zeta}^2) \tag{11}$$

und die Lagrangeschen Gleichungen lauten explizit

$$m\ddot{\varrho} = -P\varrho, \tag{12}$$

$$m\ddot{\zeta} = -Z\zeta \tag{13}$$

mit

$$P(\bar{r},\bar{z}) = \frac{\partial^2 R}{\partial\bar{r}^2}$$

$$= e\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{r}^2} - e\omega\frac{\partial^2(\bar{r}A)}{\partial\bar{r}^2} + 4e\frac{\omega}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial\bar{r}} + \frac{e^2}{m\bar{r}^2}\left[\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial\bar{r}}\right]^2 + 3m\omega^2, \tag{14}$$

$$Z(\bar{r},\bar{z}) = \frac{\partial^2 R}{\partial\bar{z}^2}$$

$$= e\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{z}^2} - e\omega\frac{\partial^2(\bar{r}A)}{\partial\bar{z}^2} + \frac{e^2}{m\bar{r}^2}\left[\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial\bar{z}}\right]^2. \tag{15}$$

[1]) Siehe Frank-Mises, Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Auflage, Bd. II, Kap. V und VI.

Da V und A oft nicht von z abhängen, ist es zweckmäßig, in (14) die Ableitungen nach r durch Ableitungen nach z zu ersetzen. Zunächst läßt sich (14) unter Verwendung von (8) schreiben

$$P = m\omega^2\left[2\varkappa + \varkappa^2 + \frac{e}{m\omega^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{r}^2} - \frac{e}{m\omega}\frac{\partial^2(\bar{r}A)}{\partial \bar{r}^2}\right] \tag{16}$$

mit

$$\varkappa = \frac{e}{m\bar{r}\omega^2}\frac{\partial V}{\partial \bar{r}} = 1 + \frac{e}{m\bar{r}\omega}\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial \bar{r}}. \tag{17}$$

Die Potentialgleichung für V und die Beziehung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$$

lauten bei Rotationssymmetrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r} + \frac{\partial^2(rA)}{\partial z^2} = 0. \tag{19}$$

Mit Verwendung von (17) folgt so

$$P = m\omega^2\left[1 + \varkappa^2 - \frac{e}{m\omega^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{r}^2} - \omega\frac{\partial^2(\bar{r}A)}{\partial \bar{r}^2}\right)\right], \tag{20}$$

$$Z = m\omega^2\left[\lambda^2 + \frac{e}{m\omega^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} - \omega\frac{\partial^2(\bar{r}A)}{\partial \bar{z}^2}\right)\right] \tag{21}$$

mit

$$\lambda = \frac{e}{m\bar{r}\omega}\frac{\partial(\bar{r}A)}{\partial \bar{z}} = \frac{e}{m\bar{r}\omega^2}\frac{\partial V}{\partial \bar{z}}. \tag{22}$$

Sind die Größen P, Z positiv, dann stellen die dem Hauptstrahl benachbarten Strahlen nach (12), (13) Schwingungen um die quasistatische Grundbewegung dar mit den Perioden

$$\tau_r = \pi\sqrt{\frac{m}{P}}, \tag{23}$$

$$\tau_z = \pi\sqrt{\frac{m}{Z}}. \tag{24}$$

In diesem Falle, und offenbar nur dann, tritt Fokussierung der dem Hauptstrahl benachbarten Strahlen ein: Alle von einem Punkt des Hauptstrahles in derselben Ebene $z = \text{const}$ unter flachen Winkeln gegen den Hauptstrahl ausgehenden Strahlen, die als „r-geneigte" Strahlen bezeichnet werden sollen, werden in erster Näherung nach einem Winkelabstand Φ_r, dem „r-Fokussierungswinkel", in einem Punkt des Hauptstrahles wieder vereinigt. Analog werden „z-geneigte" Strahlen, die von einem Punkt des Hauptstrahles aus unter flachen Winkeln in demselben Zylinder $r = \text{const}$ verlaufen, nach einem Winkelabstand Φ_z, dem „z-Fokussierungswinkel", in erster Näherung in einem Punkt des Hauptstrahles fokussiert.

Für die beiden, im allgemeinen nicht identischen Fokussierungswinkel ergibt sich aus (23), (24)

$$\Phi_r = \pi \sqrt{\frac{m\omega^2}{P}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \varkappa^2 - \frac{e}{m\omega^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} - \omega \frac{\partial^2 (\bar{r}A)}{\partial \bar{z}^2}\right)}}, \tag{25}$$

$$\Phi_z = \pi \sqrt{\frac{m\omega^2}{Z}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{e}{m\omega^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} - \omega \frac{\partial^2 (\bar{r}A)}{\partial \bar{z}^2}\right)}}. \tag{26}$$

Die im allgemeinen auftretende Verschiedenheit der Fokussierungswinkel für r-geneigte und für z-geneigte Strahlen stellt ein Analogon dar zu dem bei verschiedener tangentialer und sagittaler Bildwölbung auftretenden Astigmatismus eines Linsensystems.

Beispiele:

1. Homogenes Magnetfeld. Für ein homogenes Magnetfeld in Richtung der positiven z-Achse mit dem Feldstärkenbetrag H gilt

$$A = \tfrac{1}{2} Hr; \qquad V \equiv 0. \tag{27}$$

Die Definitionsgleichungen für die quasistatischen Bahnen reduzieren sich auf die für jeden konstanten Wert $z = \bar{z}$ erfüllten Gleichungen

$$\omega = \frac{\alpha}{m\bar{r}^2} - \frac{e}{2m} H,$$

$$eH\bar{r}\omega + m\bar{r}\omega^2 = 0.$$

Quasistatische Bahnen sind also, abgesehen von der trivialen Lösung $\omega = 0$, alle zur z-Achse normalen Kreise mit den Radien

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{-2\alpha}{eH}}.$$

Aus

$$P = m\omega^2; \quad Z \neq 0$$

folgt, daß nur die r-geneigten Strahlen nach einem Winkelabstand

$$\Phi_r = \pi \tag{28}$$

fokussiert werden. Eine erste experimentelle Bestätigung des Resultats gab Aston[1]). Das Problem wurde verschiedentlich, auch rechnerisch behandelt, so von Barber[2]), Stephens und Hughes[3]) u. a.

---

[1]) F. W. Aston, Philos. Mág. **38**, 707, 1919; **39**, 449, 611, 1920; **40**, 628, 1920. — [2]) N. F. Barber, Proc. Leeds Philos. Soc. **2**, 427, 1933. — [3]) W. E. Stephens u. A. L. Hughes, Phys. Rev. **45**, 123, 1934.

2. Zylinderkondensator. Für einen rotationssymmetrischen, unendlich langen Zylinderkondensator ergibt sich

$$A \equiv 0; \quad V = V_0 - U_0 \log \frac{r}{r_0}. \tag{29}$$

Aus den Definitionsgleichungen

$$\omega = \frac{\alpha}{m\bar{r}^2},$$
$$\frac{eU_0}{\bar{r}} + m\bar{r}\omega^2 = 0$$

folgen als quasistatische Bahnen Kreise normal zur z-Achse mit Radien

$$\bar{r} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{-emU_0}}.$$

Fokussiert werden wieder nur r-geneigte Strahlen mit

$$\Phi_r = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^0\,17'. \tag{30}$$

Das Ergebnis wurde von Hughes und Mc Millen[1]) und Voges[2]) experimentell bestätigt. Eine theoretische Begründung gaben Hughes und Rojanski[3]).

3. Coulomb-Feld. Abbildendes Medium sei das Feld einer Punktladung E im Koordinatenursprung

$$A \equiv 0; \qquad V = \frac{E}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \tag{31}$$

Die Definitionsgleichungen für die quasistatischen Bahnen

$$\omega = \frac{\alpha}{m\bar{r}^2},$$
$$m\bar{r}\omega^2 = -\frac{eE\bar{r}}{(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}},$$
$$\frac{eEz}{(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{3/2}} = 0$$

liefern für $eE < 0$ die Werte

$$\bar{z} = 0,$$
$$\bar{r} = -\frac{\alpha^2}{meE},$$
$$\omega = \frac{me^2E^2}{\alpha^3},$$
$$P = Z = m\omega^2;$$

somit ist

$$\Phi_r = \Phi_z = \pi. \tag{32}$$

---

[1]) A. L. Hughes u. J. H. McMillen, Phys. Rev. **34**, 291, 1929. — [2]) H. Voges, ZS. f. Phys. **76**, 390, 1932. — [3]) A. L. Hughes u. V. Rojanski, Phys. Rev. **34**, 284, 1929.

Quasistatische Bahnen sind also wegen der Kugelsymmetrie alle Großkreise der Kugel mit dem Radius $\bar{r}$; alle flach geneigten Strahlen, ob r- oder z-geneigte, werden im diametralen Gegenpunkt des Ausgangspunktes fokussiert.

4. Elektrischer Dipol. Im Koordinatenursprung liege ein elektrischer Dipol mit dem Moment $\mathfrak{d}$; der von der negativen zur positiven Ladung orientierte Vektor $\mathfrak{d}$ weise nach der positiven z-Achse:

$$A \equiv 0; \quad V = \frac{|\mathfrak{d}|\, z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{33}$$

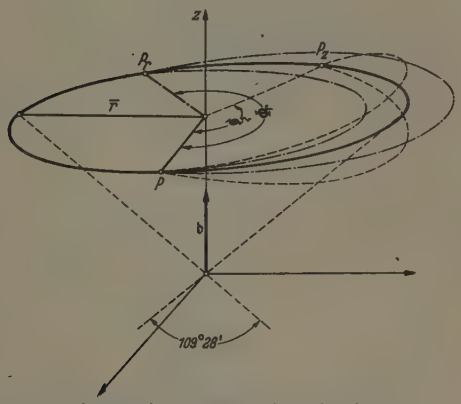


Fig. 1. Schematische Darstellung der Fokussierung im Felde des elektrischen Dipols.
——— quasistatische Bahn, — · — · — r-geneigte Bahnen,
— — — — z-geneigte Bahnen.
$\Phi_r = 220^0\,27'$; $\Phi_z = 155^0\,53'$.

Die quasistatischen Werte $\bar{r}$, $\bar{z}$, ω ergeben sich aus

$$\omega = \frac{\alpha}{m\bar{r}^2},$$

$$m\bar{r}\omega^2 + \frac{3e|\mathfrak{d}|\,\bar{z}\bar{r}}{(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} = 0,$$

$$\frac{|\mathfrak{d}|(\bar{r}^2 - 2\bar{z}^2)}{(r^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} = 0$$

unter der Bedingung

$$e\bar{z} < 0$$

zu

$$\bar{r}^2 = 2\bar{z}^2$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{m|e| \cdot |\mathfrak{d}|}{3\sqrt{3}}}.$$

Quasistatische Bahnen treten nur für den von r und z unabhängigen, festen Wert α des Drehimpulses auf; sie sind die Schar der Kreise auf dem Kegel $\bar{r}^2 = 2\,\bar{z}^2$ mit dem Öffnungswinkel $109^0\,28'$, und zwar für negativ geladene Teilchen nur für $\bar{z} > 0$, für positiv geladene Teilchen nur für $\bar{z} < 0$.

Für r-geneigte und z-geneigte Strahlen ergeben sich verschiedene Fokussierungswinkel (Fig. 1):

$$\Phi_r = \frac{\pi}{2}\sqrt{6} = 220^0\,27', \tag{34}$$

$$\Phi_z = \frac{\pi}{2}\sqrt{8} = 155^0\,53'. \tag{35}$$

Es liegen keine Untersuchungen über das Problem vor.

5. Magnetischer Dipol. Analog soll der Fall eines magnetischen Dipols vom Moment $\mathfrak{m}$ behandelt werden; das Beispiel bietet Interesse für die Theorie des Polarlichtes, es wurde von Störmer[1]) untersucht.

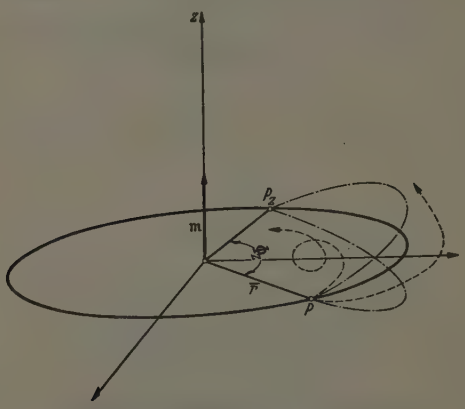


Fig. 2. Schematische Darstellung der Fokussierung im Felde des magnetischen Dipols.
——— quasistatische Bahn, —·—·— z-geneigte Bahnen,
— — — — r-geneigte Bahnen. $\Phi_z = 103^0\,55'$.

Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ läßt sich aus dem skalaren Potential

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\frac{|\mathfrak{m}|z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

ableiten. Bei der vorhandenen Rotationssymmetrie ergibt sich

$$V \equiv 0; \qquad A = \frac{|\mathfrak{m}|r}{(r^2+z^2)^{3/2}}; \tag{36}$$

[1]) C. Störmer, Vid. Selsk. Skr., Christiania 1907, Nr. 4; Erg. kosm. Phys. 1, 50, 1931.

die quasistatischen Bahnen sind, abgesehen von der trivialen Lösung $\omega = 0$, gegeben durch

$$\bar{z} = 0,$$

$$\bar{r} = \frac{2e|\mathfrak{m}|}{\alpha},$$

$$\omega = \frac{\alpha^3}{8me^2|\mathfrak{m}|^2},$$

sind also Kreise in der Ebene des Äquators des Dipols mit dem Radius $\bar{r}$.

Aus

$$P = -2m\omega^2; \quad Z = 8m\omega^2$$

folgt, daß nur z-geneigte Strahlen nach einem Winkel

$$\Phi_z = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^0\,55 \tag{37}$$

fokussiert werden (Fig. 2).

6. Kombinierte Felder. Schließlich soll noch ein bereits von Henneberg[1]) behandeltes Beispiel angeführt werden; zur Abbildung wird eine Kombination eines homogenen Magnetfeldes mit den Feldern eines Zylinderkondensators und eines magnetischen Dipols verwendet. Mit den Bezeichnungen von (27), (29), (36) wird

$$V = V_0 - U_0 \log \frac{r}{r_0}, \tag{38}$$

$$A = \frac{1}{2} Hr + \frac{|\mathfrak{m}| r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{39}$$

Als quasistatische Bahnen ergeben sich aus

$$\omega = \frac{\alpha - e\bar{r}^2\left(\frac{H}{2} + \frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3}\right)}{m\bar{r}^2},$$

$$\omega\left(H - \frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3}\right) + \frac{U_0}{\bar{r}^2} + \frac{m}{e}\omega^2 = 0,$$

$$3\omega \frac{|\mathfrak{m}|\bar{r}^2\bar{z}}{(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{5/2}} = 0$$

Kreise um die z-Achse, für nicht verschwindendes $|\mathfrak{m}|$ nur in der Äquatorebene des Dipols; aus

$$\omega = \frac{e}{2m}\left(\frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3} - H\right) \pm \sqrt{\left[\frac{e}{2m}\left(\frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3} - H\right)\right]^2 - \frac{e}{m}\frac{U_0}{\bar{r}^2}}$$

[1]) W. Henneberg, Ann. d. Phys. (5) **19**, 335, 1934; **20**, 1, 1934.

folgt für den zu einer Kreisbahn $\bar{r}$ gehörenden Impuls

$$\alpha = m\bar{r}^2\left\{\frac{3e}{2m}\frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3} \pm \sqrt{\left[\frac{e}{2m}\left(\frac{|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3} - H\right)\right]^2 - \frac{e}{m}\frac{U_0}{\bar{r}^2}}\right\}.$$

Die Fokussierungswinkel

$$\Phi_r = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \left(\frac{eU_0}{m\bar{r}^2\omega^2}\right)^2 - \frac{3e|\mathfrak{m}|}{m\bar{r}^3\omega}}}, \tag{40}$$

$$\Phi_z = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3e|\mathfrak{m}|}{m\bar{r}^3\omega}}} \tag{41}$$

nehmen je nach der Zusammensetzung des abbildenden Feldes beliebige Werte an. Φ_r und Φ_z fallen zusammen für

$$1 + \left(\frac{eU_0}{m\bar{r}^2\omega^2}\right)^2 = \frac{6e|\mathfrak{m}|}{m\bar{r}^3\omega}. \tag{42}$$

Bei verschwindendem U_0 stellt somit die Feldkombination

$$H + \frac{5|\mathfrak{m}|}{\bar{r}^3} = 0$$

eine für den Hauptstrahl $\bar{r}$ anastigmatische Abbildung dar.

Gleichung (40) wurde von Henneberg[1]) ausführlich diskutiert; die z-Fokussierung wird da jedoch nicht behandelt.

Die hier durchgerechneten elektronenoptischen Systeme finden zum Teil praktische Anwendung, z. B. für Massen- und Geschwindigkeitsspektrographie. Für diese Anwendungen sind jedoch neben der Fokussierung noch andere Eigenschaften maßgebend, vor allem Auflösungsvermögen und Dispersion. Die Berechnung dieser Größen, die auch in der angegebenen Theorie enthalten sind, soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Die vorliegende Arbeit stellt einen Teil einer im Sommer 1936 an der Deutschen Universität in Prag approbierten Dissertation dar, deren Veröffentlichung bisher nicht möglich war. Für die Anregung zu diesem Thema und die Förderung der Arbeit spreche ich Herrn Prof. Dr. W. Glaser auch an dieser Stelle meinen Dank aus.

Berlin, im August 1940.

[1]) W. Henneberg, Ann. d. Phys. (5) **20**, 1, 1934.

Phosphoreszenz- und Szintillationsspektren.

Von **Walther Kutzner** in Berlin.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 19. März 1941.)

Es wird gezeigt, daß bei ZnS-Phosphoren das Phosphoreszenzspektrum und das Szintillationsspektrum qualitativ als gleich zu betrachten sind. Die Intensitätsverhältnisse weisen bemerkenswerte Unterschiede auf. Anschließend wird hierfür eine Erklärung zu geben versucht.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß die an ZnS-Phosphoren unter Einwirkung von α-Strahlen auftretenden Szintillationen Bandenspektren aussenden, die aus einer Übereinanderlagerung mehrerer Teilbanden bestehen, die sämtlich im Bereich des sichtbaren Wellengebietes liegen. Im allgemeinen ergeben sich bei verschieden zusammengesetzten Phosphoren vier bis sechs Banden. Die Zahl der Banden ist abhängig von dem bei der Bereitung des Phosphors zugesetzten Schwermetall. Auf die Lage der Bandenschwerpunkte hat das bei der Herstellung zugefügte Schwermetall keinen bemerkenswerten Einfluß. Dagegen ruft das Kation des Schmelzzusatzes eine geringe Verschieblichkeit des Bandenmaximums vor allem bei den kurzwelligeren Banden hervor. Die Intensität des gesamten Spektrums bei gleichen Bedingungen der Erregung und der Beobachtung ist um so größer, je höher das Atomgewicht des Fremdmetalls ist. Das Verhältnis der Intensitäten der einzelnen Banden zueinander kann beeinflußt werden. Hier gilt offenbar die Regel: Je höher das Atomgewicht des Kations des Schmelzzusatzes ist, bzw. je höher bei gleichem Kation das Atomgewicht des Anions des Schmelzzusatzes ist, um so mehr verschiebt sich die Intensität in dem Gesamtspektrum nach dem kurzwelligeren Gebiet zu.

Nicht untersucht wurde die Frage, wie sich ein Phosphor einerseits unter α-Strahlerregung und andererseits unter Lichtanregung verhält. Es findet sich in der Literatur nur die Angabe, daß dieselben Spektren ausgesandt werden[2]). Quantitative Messungen liegen aber offenbar bisher nicht vor. Zur Klärung wurde die vorliegende Untersuchung vorgenommen.

Das Untersuchungsverfahren ist dasselbe, wie in der oben zitierten Arbeit: Photographische Photometrie und Analyse der Spektren unter

---

[1]) ZS. f. Phys. **106**, 551, 1937. — [2]) Wien-Harms, Handb. d. Exper. Phys. XXIII, 2.

der Annahme einer Übereinanderlagerung mehrerer Banden. Dabei sollen die Einzelbanden durch die Gaußsche Wahrscheinlichkeitskurve

$$y = a\, e^{-b x^2}$$

(a = Ordinate des Maximums, b eine Konstante, die die Breite der Bande bestimmt) darstellbar sein[1]). Diese Annahme wurde schon durch die bisherigen Untersuchungen als überraschend gut zutreffend gefunden. Sie hat sich auch hier sowohl für das Szintillations- wie auch für das Phosphoreszenzspektrum wieder ganz vorzüglich bewährt.

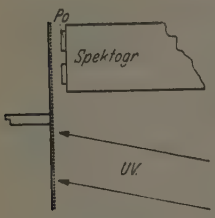


Fig. 1.
Versuchsanordnung.

Die Aufnahme der Spektren und ihre Auswertung wurde verbessert. In Abänderung der früheren Anwendung wurde das Präparat auf einer Scheibe von etwa 10 cm Durchmesser aufgetragen. Die Scheibe saß auf der Achse eines kleinen Motors und rotierte mit einer Tourenzahl von etwa 1000 Umdrehungen pro min vor dem Spalt eines Quarzspektrographen (Öffnungsverhältnis 1 : 4,5) in einem Abstand von etwa 5 mm (Fig. 1).

Unmittelbar vor dem Spalt des Spektrographen war ein starkes Po-Präparat auf einem Blech angebracht. Das Blech war mit einem Schlitz versehen, genügend breit, um das von dem Phosphor ausgesandte Licht ungehindert in den Spektrographen gelangen zu lassen. Durch diese Anordnung wurde erreicht, daß erstens Ungleichmäßigkeiten bei der Auftragung des zu untersuchenden Phosphors ausgeglichen wurden, und daß zweitens das vom Phosphor ausgesandte Licht nicht durch Absorption in der Schicht selbst in seiner spektralen Intensitätsverteilung verändert wurde.

Zur Aufnahme des Phosphoreszenzspektrums wurde, ohne sonst etwas zu verändern, nach Entfernung des Po-Präparats die den Phosphor tragende Scheibe mit UV bestrahlt an der Seite, die der zur Beleuchtung des Spaltes dienenden Stelle diametral gegenüber lag. Da sich die Scheibe mit einer Tourenzahl von etwa 1000 Umdrehungen pro min drehte, gelangte der erregte Phosphor demnach nach weniger als $^1/_{50}$ sec zur Exposition. Als UV-Quelle diente eine Blauglasquecksilberdampflampe, deren Licht außerdem noch durch ein UV-Filter, das nur Licht kürzer als etwa 3700 Å durchließ, gefiltert wurde. Die Anregung des Phosphors wurde mit einer der-

[1]) Borrissow. Ann. d. Phys. **42**, 1913.

artigen Intensität vorgenommen, daß die Flächenhelligkeit des leuchtenden Phosphors nahezu derjenigen entsprach, die der Phosphor im Szintillationsleuchten (bei visueller Beobachtung) zeigte. Die Expositionszeiten für die Szintillations- und Phosphoreszenzspektren betrugen jeweils 24 Stunden.

Als Bezugsspektrum zur Ermittlung der Intensitätsverteilung diente das Spektrum einer in der PTR. geeichten Temperaturbandlampe. Für diese Aufnahmen konnte aus technischen Gründen leider nicht dieselbe Expositionsdauer von 24 Stunden genommen werden. Denn es war bei der erforderlichen Stromstärke von 15 Amp. bei 8 Volt nicht möglich, die Lampe für 24 Stunden mit konstanter Spannung ununterbrochen brennen zu lassen. Als Belichtungsdauer wurden 2 Stunden gewählt.

Zur Festlegung der Wellenlängen diente das He-Spektrum. Noch in einem weiteren Punkt wurde eine wesentliche Abänderung getroffen. Der Spalt des Spektrographen wurde mit einem auf Quarz hergestellten Pt-Neutralabsorptionsstufenfilter der Firma Zeiss abgedeckt, so daß gleichzeitig jeweils vier Spektren mit verschiedener Intensität bei gleicher Expositionsdauer aufgenommen wurden. Die einzelnen Stufen des Filters ließen im Mittel 100, 76, 46 und 21 % der auffallenden Intensität durch. Der Zweck dieses Filters war, daß für jede Wellenlänge die Intensitätsschwärzungskurven konstruiert und daraus in Verbindung mit der bekannten Energieverteilungskurve der Bandlampe für die Szintillations- bzw. Phosphoreszenzspektren Energieverteilungskurven ermittelt werden konnten.

Zur Aufnahme diente die Perutz-Peromnia-Platte in gebogener Kassette. Entwicklung (Rodinal 1 : 20 bei 20° C) und Fixierung der einzelnen Platten war stets die gleiche, wie überhaupt alle Umstände möglichst genau bei allen Aufnahmen eingehalten wurden. Es sei noch bemerkt, daß die Szintillations- und Phosphoreszenzspektren für jeden untersuchten Phosphor und das Spektrum der Vergleichslampe auf derselben Platte aufgenommen wurden.

Sämtliche Spektren wurden in der PTR. unter Einhaltung einer möglichst gleichen Registrierempfindlichkeit und einer Vergrößerung im Verhältnis 1 : 3 ausphotometriert.

Die Untersuchungen wurden angestellt an drei Phosphoren, die mir freundlicherweise von Herrn Dr. Wakenhut überlassen waren, und die von ihm als besonders rein und einwandfrei in ihrer Zusammensetzung bezeichnet wurden. Diese sowie ihre Leuchtfarbe sind in der Tabelle 1 angegeben.

Zur Auswertung wurden zunächst sämtliche Spektren mittels der Hartmannschen Dispersionsformel in eine lineare Wellenlängenskala

Tabelle 1. Zusammensetzung der untersuchten Phosphore.

Bezeichnung	Grundsubstanz	Aktivator	Leuchtfarbe
P I	ZnS + 30 % CdS	Cu	gelbrot
P II	ZnS + 2 % ZnO	Cu	grün
P III	ZnS	Ag	blau

umgezeichnet. Aus diesen Photometerkurven wurden dann unter jeweiliger Berücksichtigung der Registrierempfindlichkeit die Schwärzungswerte über dem Schleier errechnet. Aus den Intensitätsspektren der Vergleichslampe wurden für das gesamte Spektrum die Schwärzungskurven konstruiert für je um 5 mμ auseinanderliegende Wellenlängen in Abhängigkeit von der Energie, deren relative Werte durch die Eichung der Bandlampe festlagen.

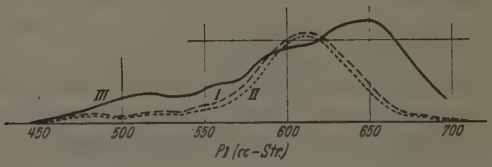


Fig. 2. Umzeichnung eines Spektrums in die lineare Wellenlängenskala und Umrechnung auf relative Energiewerte.

Aus diesen Schwärzungskurven konnten die den Schwärzungen der Szintillations- bzw. Phosphoreszenzspektren entsprechenden relativen Energiewerte entnommen werden. Diese ergaben die zur Analyse benutzten Kurven, in denen die Ordinaten nun relative Energiewerte darstellen. Damit sind alle Einflüsse, die von den Platteneigenschaften herrühren, ausgeschaltet. Wie sich das Aussehen der ein Spektrum darstellenden Kurven dabei änderte, zeigt die Fig. 2.

Sie bezieht sich auf den Phosphor P I. Kurve I gibt die in die lineare Wellenlängenskala umgezeichnete Photometerkurve (Ordinaten: in mm ausgemessene Ausschläge des Registriergalvanometers), Kurve II gibt die entsprechenden Schwärzungswerte über dem Schleier (Werte mit 100 multipliziert) und Kurve III zeigt das auf relative Energiewerte ausgewertete Spektrum (Ordinaten: willkürliches Maß). Charakteristisch zeigt sich der Einfluß der Platteneigenschaften besonders an dem langwelligen Ende des Spektrums. Das Maximum liegt keineswegs an der Stelle größter Schwärzung, sondern vielmehr beträchtlich weiter nach Rot verschoben. Der Grund ist einfach der, daß die Platte oberhalb der Wellenlänge 600 mμ unempfindlicher wird.

Tabelle 2. Phosphor P III (Szintillationen).

Wellenlänge	I			Ia		Ib		Ic	
365	0,5	0,6							
70	1,0	1,0							
75	1,5	1,7							
80	2,5	2,7							
85	4,0	4,2							
90	6,5	6,4							
95	9,5	9,4							
400	13,8	13,5							
05	18,9	18,9							
10	25,4×	25,6							
15	34,0	33,9							
20	43,7	43,6							
25	54,5×	54,5							
30	66,2	66,3							
35	79,0	78,5		0,5		0,5		0,5	
40	92,0×	90,4		1,6		1,6		1,6	
45	101,5	101,2		0,3		0,3		0,3	
450	111,3	110,3		1,0		1,0		1,0	0,4
55	119,0×	116,9		2,1		2,1		2,1	0,9
60	123,5	120,5		3,0		3,0		3,0	1,8
65	125,0	120,8		4,2		4,2		4,2	3,2
70	123,0	117,8		5,2		5,2		5,2	4,9
75	118,7	111,8		6,9		6,9	0,5	6,4	6,4
80	111,6	103,2		8,4		8,4	1,1	7,3	7,3
85	102,0	92,7		9,3		9,3	2,1	7,2×	7,2
90	90,0	80,0		10,0		10,0	3,8	6,2×	6,2
95	79,5	68,8		10,7		10,7	6,2	4,5×	4,5
500	69,0	56,8		12,2		12,2	9,3	2,9×	2,7
05	58,7	45,7		13,0		13,0×	12,9	0,1	1,6
10	52,5	35,7		16,8	0,2	16,6×	16,5	0,1	0,8
15	47,5	27,8		19,7	0,5	19,2×	19,3		0,3
20	40,7	20,1		21,6	0,9	20,7×	20,8		
25	36,0	14,5		21,5	1,6	19,9	20,7		
30	31,0	10,1		20,9	2,6	18,3	18,8		
35	26,5	6,9		19,6	3,9	15,7	15,8		
40	22,3	4,6		17,7	5,5	12,2	12,2		
45	19,5	2,9		16,6	7,2	9,4	8,6		
550	16,6	1,8		14,8	8,6	6,2	5,6		
55	13,5	1,1	0,2	13,7	9,5	4,2	3,4		
60	11,0	0,7	0,6	9,7×	9,7		1,8		
65	10,3	0,2	1,0	9,1×	9,2		0,9		
70	9,6		1,5	8,1×	8,0		0,4		
75	8,7		2,2	6,5×	6,5				
80	8,0		3,0	5,0	4,9				
85	7,0		3,7	3,3	3,4				
90	6,0		4,2	1,8	2,2				
95	5,0		4,4	0,6	1,3				
600	4,3×		4,3		0,7				
05	3,8×		3,9		0,3				
10	3,3×		3,3						
15	2,5×		2,5						
20	2,0		1,8						
25	1,3		1,2						
30	0,9		0,7						
35	0,7		0,3						
40	0,5								
		a	b		c		d		e

Die Tabelle 2 gibt ein Beispiel für die Auswertung. Sie bezieht sich auf das Szintillationsspektrum des Präparats P III. Spalte I gibt die aus den Schwärzungskurven ermittelten relativen Energiewerte in willkürlichem Maß, die für die Analyse des Spektrums zugrunde gelegt wurden. Diese wurde rein rechnerisch so vorgenommen, daß zunächst die äußersten Banden von den beiden Enden aus berechnet wurden. Die dazu benutzten Werte sind in der Tabelle angekreuzt. Dadurch ergaben sich die Banden *a*

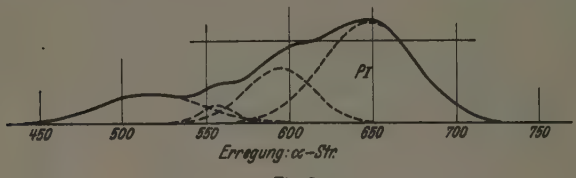


Fig. 3.

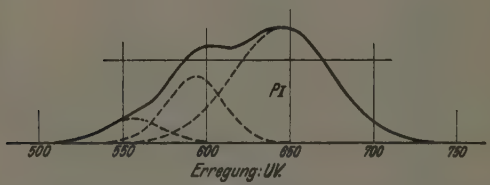


Fig. 4.
Ausgezogene Kurve: Energieverteilung des Phosphors ZnS + 30% CdS + Cu.
Gestrichelte Kurven: Errechnete Banden.

und *b*. Durch Differenzbildung gegen die ursprünglichen Ordinatenwerte (Spalte I) findet man Spalte Ia, aus ihr die nächsten Banden und so fort. Dadurch lösten sich in sehr befriedigender Weise die ursprünglichen Spektren in drei bis sechs Teilbanden auf. Geringe Abweichungen zeigen sich nur an den Stellen, an denen sich mehrere Banden überschneiden. Der Grund ist der, daß man diese Stellen vor Ausführung der Rechnung nicht kennt und infolgedessen mit etwas fehlerhaften Werten arbeitet. Jedoch haben geringe Abweichungen nur einen sehr kleinen Einfluß auf das ganze Ergebnis, wie man sich leicht überzeugen kann. Es sind deshalb bei der Rechnung auch stets nur ganzzahlige Werte für die Größe x eingesetzt worden, obgleich sich rechnungsmäßig x in den meisten Fällen als nicht ganzzahlig ergab. Das Ergebnis ist in den Fig. 3 bis 8 niedergelegt.

In der Tabelle 3 sind die Werte der Konstanten a und b, sowie die ermittelten Lagen der Maxima der Banden zusammengestellt.

Vergleicht man zunächst die drei Szintillationsspektren und die drei Phosphoreszenzspektren hinsichtlich der Lage der auftretenden Banden,

so sieht man, daß es sich offenbar immer um dieselben Banden handelt, aus denen sich die Szintillations- und Phosphoreszenzspektren zusammensetzen. Die Maxima der in den Spektren auftretenden Banden liegen im Mittel bei den Wellenlängen

465, 480, 520, 556, 593 und 645 mμ.

Die Bande 465 mμ dürfte dem Phosphor angehören und nicht mit der von Schleede[1]) und Riehl[2]) am reinen ZnS gefundenen identisch sein.

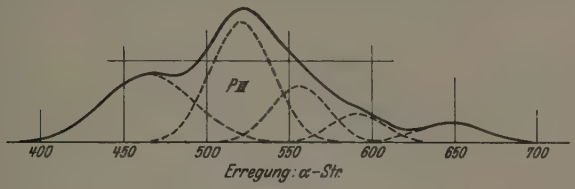


Fig. 5.

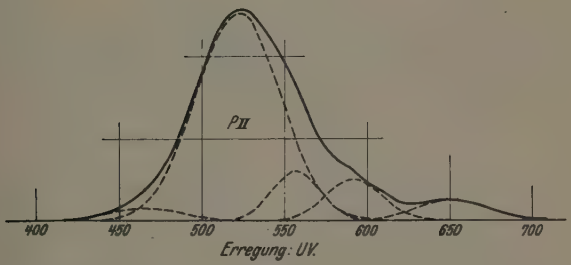


Fig. 6.
Ausgezogene Kurve: Energieverteilung des Phosphors ZnS + 2 % ZnO + Cu.
Gestrichelte Kurven: Errechnete Banden.

Die Fehlergrenze, die durch die Ausmessung der Photometerkurven, die Übertragung in die lineare Wellenlängenskala und durch die Auswertung bedingt ist, ergibt sich in dem Gebiet bis etwa 500 mμ zu ± 3 mμ, bis etwa 600 mμ zu ± 4 mμ und oberhalb 600 mμ zu ± 5 mμ. Die geringen Unterschiede in den in der Tabelle 3 angegebenen Werten gegen obige Mittelwerte liegen daher innerhalb der Fehlergrenzen.

Die einzelnen Szintillations- oder Phosphoreszenzspektren enthalten nicht immer alle Banden. Wie man (Tabelle 3) sieht, fehlen (unter den vorliegenden Versuchsbedingungen) bei P I (α) die Banden 465 und 480 mμ, bei P I (UV) die Banden 465, 480 und 520 mμ; bei P II (α) und P II (UV)

[1]) A. Schleede, ZS. angew. Chem. **48**, 277, 1935. — [2]) N. Riehl, Ann. d. Phys. **29**, 636, 1937.

fehlt die Bande bei 480 mμ, bei P III (α) 645 mμ, während P III (UV) alle sechs Banden enthält, allerdings die Bande 480 mμ nur eben angedeutet.

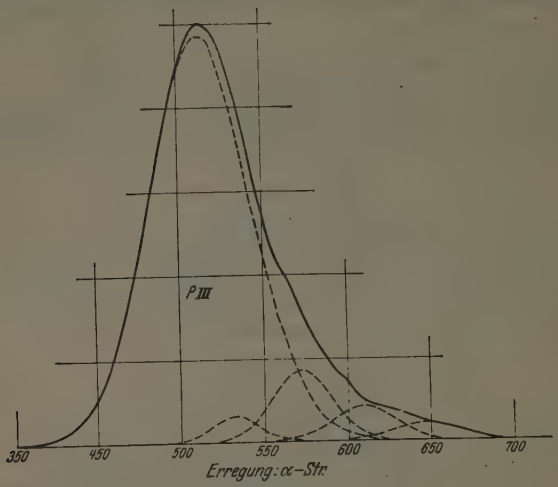


Fig. 7.

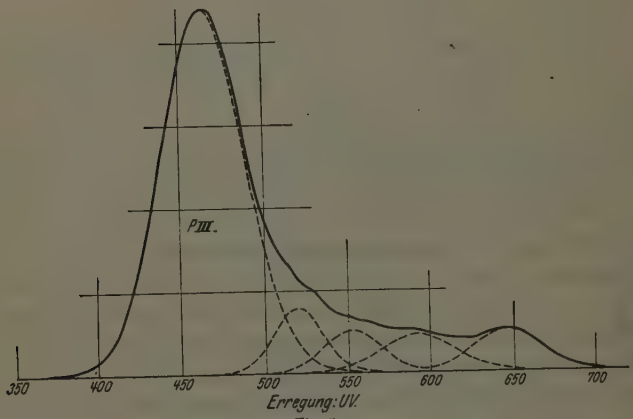


Fig. 8.
Ausgezogene Kurve: Energieverteilung des Phosphors ZnS + Ag.
Gestrichelte Kurven: Errechnete Banden.

Es ist möglich, daß bei längerer Expositionsdauer die eine oder andere der fehlenden Banden in Erscheinung tritt, insbesondere die Bande 520 mμ bei P I (UV) und 645 mμ bei P III (α). Berücksichtigt man dieses, so ergibt

Tabelle 3. Lage der Bandenmaxima.

P I						P II						P III					
Sz.			Ph.			Sz.			Ph.			Sz.			Ph.		
a	b	Max. mμ	a	b	Max. mμ	a	b	Max. mμ	a	b	Max. mμ	a	b	Max. mμ	a	b	Max. mμ
						20,7	0,000 69	**465**	3,8	0,001 03	**466**	121,2	0,000 56	**463**	109,8	0,000,81	**465**
												7,4	0,001 26	**482**	angedeutet		
9,0	0,000 54	**517**				36,5	0,001 47	**521**	63,7	0,000 77	**522**	21,0	0,000 73	**522**	19,5	0,002 43	**521**
3,9	0,009 22	**557**	7,2	0,001 78	**557**	17,4	0,001 79	**554**	13,6	0,001 24	**556**	9,7	0,001 56	**559**	12,5	0,001 79	**553**
16,6	0,001 23	**591**	19,9	0,001 74	**591**	8,8	0,001 93	**594**	12,6	0,001 70	**593**	4,4	0,001 54	**596**	11,1	0,001 06	**593**
30,6	0,000 65	**647**	34,7	0,000 57	**644**	5,9	0,001 19	**647**	6,2	0,001 05	**644**				12,4	0,001 29	**647**

Tabelle 4. Intensitätsverhältnisse der Teilbanden.

Bande bei mμ	I						II					
	P I		P II		P III		P I		P II		P III	
	α	UV	α	UV	α	UV	α	UV	α	UV	α	UV
465			1395	210	9075	6840			1395	161	9075	8445
480					370	angedeutet					370	
520	685		1690	4070	1380	700	685		1690	3116	1380	865
556	70	300	730	685	435	525	70	300	730	524	435	650
593	840	845	355	540	200	605	840	845	355	413	200	745
645	2125	2575	305	340		610	2125	2575	305	261		755
	3720	3720	4475	5845	11460	9280	3720	3720	4475	4475	11460	11460

sich offenbar, daß das Szintillationsspektrum und das Phosphoreszenzspektrum eines Phosphors in qualitativer Hinsicht als identisch anzusehen sind. Dies stimmt mit den bisherigen Angaben überein[1]).

Die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Werte für die Lage der Bandenmaxima sind in recht guter Übereinstimmung mit meinen früheren Messungen. Seinerzeit hatte ich bei verschiedenen ZnS-Phosphoren gleichfalls sechs auftretende Banden festgestellt. Die Maxima dieser Banden ergaben sich im Mittel bei 460, 480, 520, 550, 585 und 630 mμ, mit einer Fehlergrenze von ± 5 mμ. Eine etwas größere, die Fehlergrenze überschreitende Abweichung zeigt sich nur bei den beiden langwelligen Banden, deren Maxima jetzt bei 593 und 645 mμ gefunden wurden. Der Grund liegt in der Art der Auswertung der Photometerkurven. Früher wurden die relativen Energiewerte in den Spektren in der Weise ermittelt, daß für das in Frage kommende Wellenlängengebiet im Bereiche der normalen Belichtung Proportionalität zwischen auffallender Strahlungsintensität und der photographischen Wirkung als hinreichend genau angenommen wurde. Diese Annahme trifft, wenn man sich im Gebiet normaler Belichtung befindet, mit ausreichender Genauigkeit zu in den Wellenlängengebieten, in denen die photographische Platte keine Unempfindlichkeitsstellen besitzt, sie ist aber nicht zutreffend in den Wellenlängengebieten, in denen die Platte unempfindlich wird, d. h. also in den Gebieten, in denen mit zunehmender auffallender Energie keine Schwärzungszunahme, sondern eine Schwärzungsabnahme eintritt. Diese Gebiete liegen bei der benutzten Peromnia-Platte in der Grünlücke zwischen 460 und 500 mμ und vor allem oberhalb 590 mμ. In der vorliegenden Arbeit nun wurden, wie oben dargelegt, die relativen Energiewerte in den Spektren aus Intensitäts-Schwärzungskurven entnommen, die für jede Wellenlänge besonders ermittelt wurden. Den jetzigen Werten für die Bandenmaxima kommt daher eine größere Genauigkeit zu.

Vergleicht man die Intensitätsverhältnisse der Banden innerhalb des Szintillationsspektrums mit denen innerhalb des Phosphoreszenzspektrums eines Phosphors, so zeigen sich hier beachtenswerte Unterschiede. Die einzelnen Banden treten in den beiden Spektren keineswegs in gleicher relativer Stärke zueinander auf. Als Maß für die Intensität einer Bande kann der Inhalt der Bande angesehen werden, d. h. das Integral

$$J = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} \, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}.$$

[1]) Wien-Harms, Handb. XXIII, 2.

Die hiernach berechneten (abgerundeten) Werte sind in der Tabelle 4 zusammengefaßt (1. Hälfte).

Wie oben erwähnt, wurde angestrebt, gleiche Gesamthelligkeit im Szintillations- und Phosphoreszenzleuchten zu haben. Wie jedoch die letzte Zeile der Tabelle 4 (1. Hälfte) zeigt, ist dies nur beim Präparat P I vollkommen geglückt. Bei dem Präparat P II ist in der Gesamthelligkeit das Szintillationsleuchten geringer als im Phosphoreszenzleuchten, bei dem Präparat P III liegt der umgekehrte Fall vor. Würde bei P II und P III auch Gleichheit erreicht worden sein, so erniedrigen sich die entsprechenden Werte der letzten Zeile bei P II im Phosphoreszenzleuchten um etwa 25%, bei P III würden sie sich im Phosphoreszenzleuchten um etwa 25% erhöhen[1]). Nimmt man nun an, daß die Intensitäten der einzelnen Banden sich dabei alle in gleicher Weise im selben Verhältnis ändern, so ergeben sich die im Teil II der Tabelle 4 zusammengestellten Werte für die relativen Intensitäten der einzelnen Banden zueinander. Diese Werte wollen wir für das folgende zugrunde legen.

Vergleicht man nun bei den drei Präparaten die Intensitäten sich entsprechender Banden des Szintillations- und des Phosphoreszenzspektrums miteinander, so zeigt sich, daß Banden, die im Szintillationsspektrum eines Phosphors stark erscheinen, im Phosphoreszenzspektrum vielfach schwach sind. (Beispiele: Bande bei 465 bei P II, Bande bei 520 bei P III.) Andererseits sind Banden, die im Szintillationsspektrum schwach sind, im Phosphoreszenzspektrum vielfach stark. (Beispiele: Bande bei 520 bei P II, Bande bei 593 bei P III.) Allgemein ist bei allen drei Präparaten im Szintillationsspektrum das kurzwelligere Ende des Spektrums gegenüber dem langwelligeren bevorzugt. Teilt man etwa das gesamte Spektrum dadurch in zwei Hälften, daß man den Teil, der unterhalb 520 mμ liegt, als kurzwelligen, den Teil oberhalb 520 mμ als langwelligen bezeichnet, und berechnet man die Anteile der in den Gebieten enthaltenen Energien in Prozenten der in dem gesamten Spektrum enthaltenen Energie, so ergibt sich, daß im kurzwelligen Teil der Szintillationsspektren bei den drei Präparaten 10, 50 und 88% enthalten sind, gegen 0, 38 und 77% bei den Phosphoreszenzspektren, d. h. bei allen drei Präparaten ist der im kurzwelligen Gebiet enthaltene Anteil an der Gesamtenergie beim Szintillationsspektrum um rund 10% größer als beim Phosphoreszenzspektrum. Diese Verschiebung in der Intensitätsverteilung zeigen auch deutlich die Fig. 3 bis 8. Die Intensitätsverschiebung hat zur Folge, daß z. B. das Präparat P II visuell

[1]) Zugrunde zu legen sind die Werte des Szintillationsspektrums, denn bei diesen war die Erregungsquelle dieselbe.

betrachtet im Szintillationsleuchten gegen das grüne Phosphoreszenzlicht deutlich blaugrün erscheint.

Weiter zeigt die Tabelle 4 eine Bestätigung des aus meinen früheren Beobachtungen gezogenen, im Eingang erwähnten Schlusses, daß die Gesamtintensität im Szintillationsleuchten zunimmt (bei gleicher Stärke des erregenden α-Strahlpräparats und gleicher Expositionsdauer) mit wachsendem Atomgewicht des Aktivators. Vergleicht man die Zahlen in der letzten Zeile (3720, 4475, 11460), die ein Maß für die Gesamtintensität sind, sieht man, daß die Gesamthelligkeit der Präparate P I und P II (Aktivatoren Cu) nur rund $^1/_3$ so groß ist, wie die des Präparats P III (Aktivator Ag). Auch die Phosphoreszenzspektren der untersuchten Präparate zeigen denselben Verlauf. Es scheint also, als ob das gleiche auch für diese gilt. Jedoch kann dies aus den vorliegenden Messungen nur als sehr wahrscheinlich hingestellt werden, da die Intensität der zur Erregung dienenden UV-Quelle, wenn auch nicht beträchtlich, geändert wurde, wie oben erwähnt wurde.

Zusammenfassung. Die Analyse der Szintillations- und Phosphoreszenzspektren von ZnS-Phosphoren ergibt, daß die Spektren aus Teilbanden zusammengesetzt sind. Es wurden sechs Teilbanden gefunden. Wenn man die Fehlergrenzen berücksichtigt, und wenn man bedenkt, daß man die Lage der Maxima von Phosphoreszenzbanden durch die Herstellungsbedingungen etwas beeinflussen kann, dann sind die Teilbanden als identisch zu bezeichnen. Die mittleren Lagen der Maxima der auftretenden Banden ergeben sich bei den Wellenlängen 465, 480, 520, 556, 593 und 645 mμ. Die einzelnen Spektren verschiedener Phosphore unterscheiden sich bei gleicher Anregung nur dadurch, daß in ihnen nicht immer alle sechs Teilbanden gleichzeitig vertreten sind, und daß die Intensität der Banden verschieden groß ist. Welche Banden auftreten, hängt allein von dem bei der Präparation zugesetzten Aktivator ab, das Intensitätsverhältnis wird daneben noch beeinflußt durch die bei der Präparation obwaltenden Umstände (Glühtemperatur, Abkühlungsgeschwindigkeit, Schmelzzusatz usw.)

Erregt man denselben Phosphor einmal mit UV- und zweitens mit α-Strahlen in der Weise, daß die Flächenhelligkeit des Emissionslichtes gleich groß ist, findet man sowohl den Fall, daß im Szintillationsspektrum und im Phosphoreszenzspektrum dieselben Banden in Erscheinung treten, aber auch den Fall, daß das Szintillationsspektrum gegenüber dem Phosphoreszenzspektrum einzelne Teilbanden mehr zeigt und umgekehrt. Ganz allgemein zeigt sich weiter, daß die Intensität im Gesamtspektrum bei Anregung mit α-Strahlen nach kürzeren Wellenlängen verschoben ist.

Sind im Szintillations- und im Phosphoreszenzspektrum dieselben Banden vertreten, so sind die kurzwelligen Banden im Szintillationsspektrum stärker als im Phosphoreszenzspektrum. Unterscheidet sich das Szintillationsspektrum vom Phosphoreszenzspektrum durch das Auftreten einer weiteren Bande, dann liegt die hinzukommende Bande am kurzwelligen Ende des Spektrums, andererseits tritt das Fehlen am langwelligen Ende in Erscheinung. Dabei besteht aber die Möglichkeit, daß diese Beobachtung nur eine Intensitätsfrage ist, d. h. daß bei längerer Expositionsdauer dieser Unterschied verschwindet.

Das Auftreten derselben Banden in den Spektren verschiedener Phosphore legt den Schluß nahe, daß der Sitz der Emission an dieselben Träger gebunden ist. Das kann aber nur die Grundsubstanz, d. h. die Zn- bzw. S-Atome, sein. Das Aktivatoratom spielt dann nur die Rolle, daß es einzelne Banden bevorzugt zum Erscheinen bringt, andere ganz unterdrückt. Man kann sich daher die Vorstellung machen, daß durch den Einbau der Aktivatorenatome in das Kristallgitter eine Störung in den elektrischen Feldern im Kristall auftritt, die an die Nähe des Aktivatoratoms gebunden ist (Lenardsche Leuchtzentren), so daß zwar die Erregung im ganzen Kristall, die Emission aber nur in den Leuchtzentren stattfinden kann. Die durch die verschiedenartigen Aktivatorenatome hervorgebrachten ungleichen Feldänderungen bestimmen die Anregungsstufen und damit die emittierten Wellenlängen. Da für den Einbau des Aktivatoratoms ein gewisser Spielraum vorhanden ist, werden die durch die Fremdatome hervorgerufenen Feldänderungen und damit die Anregungsstufen auch bei gleichen Aktivatorenatomen etwas verschieden sein, wodurch sich dann erklärt, daß die Emission in Banden in Erscheinung tritt, innerhalb der die Energie nach einer Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung verteilt ist. Weiterhin beeinflußt die Herstellungsart des Phosphors seinen inneren Aufbau und begründet dadurch, daß die Lage der Bandenmaxima bei gleich zusammengesetzten, aber verschieden hergestellten (Glühtemperatur, Abkühlungsgeschwindigkeit usw.) Präparaten etwas schwankt.

Bei der Erregung eines Phosphors werden in jedem Falle Elektronen von niedrigeren auf höhere Energiestufen gehoben. Wie dies geschieht, ob durch UV- oder α-Strahlen, ist gleichgültig. Es müssen sich daher bei der nachher erfolgenden Emission auch dieselben Banden zeigen. Aber die relative Intensität der Banden im Gesamtspektrum wird verschieden ausfallen, und zwar müssen die energiereicheren α-Strahlen verhältnismäßig mehr Elektronen auf höhere Energiestufen bringen und dadurch im Gesamtspektrum eine Verschiebung der Energieverteilung nach kürzeren

Wellenlängen hervorrufen. Gleichzeitig erklärt sich damit auch das Hinzutreten einer im Phosphoreszenzspektrum nicht auftretenden Bande am kurzwelligen Ende des Szintillationsspektrums. Die Energie der UV-Strahlung reicht nicht hin, um die Elektronen auf die notwendige Anregungsstufe zu bringen, wohl ist die weit energiereichere α-Strahlung dazu imstande. Das Fehlen der langwelligsten Bande, wie es bei einem Präparat im Szintillationsspektrum beobachtet wurde, dürfte nur eine Intensitätsfrage sein. Das α-Teilchen wird nämlich auf dem größten Teile seiner Bahn in dem Phosphor nur höhere Energiestufen hervorbringen. Wenn es aber nach eigenem Energieverlust auch niedrigere Energiestufen erzeugt, dann sind diese in verhältnismäßig geringer Anzahl vorhanden, so daß also hier die Bande wohl erregt wird, aber infolge zu geringer Intensität nicht unter allen Versuchsbedingungen (Expositionsdauer) in Erscheinung tritt.

Zum Schluß möchte ich noch folgendes anfügen. Bei der energiereichen α-Strahlung sollte man erwarten, daß auch ultraviolette Banden auftreten würden. Daß eine solche Bande bei Lichtanregung nicht auftreten kann, ist nach der Stokesschen Regel von vornherein selbstverständlich. Aber auch wenn das α-Teilchen wirklich eine solche Strahlung auslösen würde, so wird diese nach außen nicht beobachtet werden können. Sie wird sofort im Kristall wieder absorbiert und wird zur Selbstanregung des Phosphors führen.

Institut für angewandte Physik.

Das ultrarote Absorptionsspektrum des Methylenbromiddampfes.

Von **D. Bârcă-Gălăţeanu.**

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 21. März 1941.)

Das ultrarote Absorptionsspektrum des CH_2Br_2 im Dampfzustand wurde im Gebiete 1,5 bis 15 μ mit Hilfe eines großen Spektrometers nach Paschen untersucht; zwischen 2,2 und 7 μ sind es die ersten Messungen. Die Einordnung der gefundenen Banden geschieht auf Grund der Annahme von halbunabhängigen Gruppenschwingungen und ihrer Kombinationen. Als Grundschwingungen der CH_2-Gruppe werden die Banden 3001, 3070 und 1361 cm^{-1} angesehen; diese Banden befinden sich im Raman-Spektrum bei 2986, 3050 und 1390 cm^{-1}. Die Banden 813, 1144 und 1232 cm^{-1} werden den Grundschwingungen der zwei Gruppen CH_2 und CBr_2 gegeneinander zugeschrieben. Die restlichen Banden sind entweder Oberschwingungen der neun Grundschwingungen des CH_2Br_2-Moleküls oder ihre Kombinationen.

Das ultrarote Absorptionsspektrum des Methylenbromids wurde 1926 von Ellis (1) im Gebiete 0,8 bis 2,4 μ, von Lecomte (2) 1933 mit einem registrierenden Spektrometer im Gebiete 6,9 bis 19 μ und von Emschwiller und Lecomte (3) 1937 im selben Gebiete untersucht. In allen angeführten Arbeiten befand sich das CH_2Br_2 im flüssigen Zustande.

Wir untersuchten das Absorptionsspektrum des Methylenbromids im gasförmigen Zustande im Gebiete 1,5 bis 15 μ. Das Ziel der Arbeit war die Ausfüllung der noch nicht untersuchten Lücke zwischen 2,4 und 6,9 μ, um dann auf Grund des vollständigen Absorptionsspektrums und des bekannten Raman-Spektrums die Grundschwingungen festzulegen und die anderen Banden einzuordnen. Zugleich können wir die Absorptionsspektren des Methylenbromids in flüssigem und gasförmigem Zustande vergleichen.

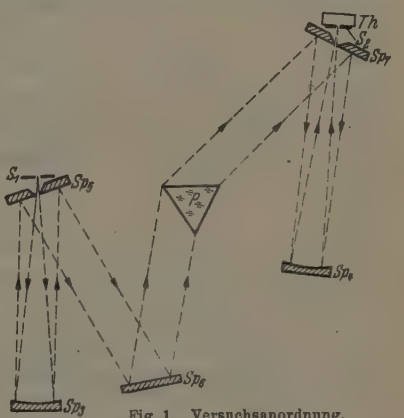


Fig. 1. Versuchsanordnung.

Versuchsanordnung. Die Untersuchung wurde mit einem großen Spektrometer nach Paschen, das in einer vorhergehenden Arbeit beschrieben wurde (4), ausgeführt. Es wurden jedoch die ebenen Spiegel Sp_5

und Sp_7 (Fig. 1) hinzugefügt, so daß die Strahlen der Achse der konkaven Spiegel Sp_3 und Sp_4 parallel liefen. Die Spiegel hatten einen Durchmesser von 90 mm und eine Brennweite von 420 mm. Diese Abänderung wurde

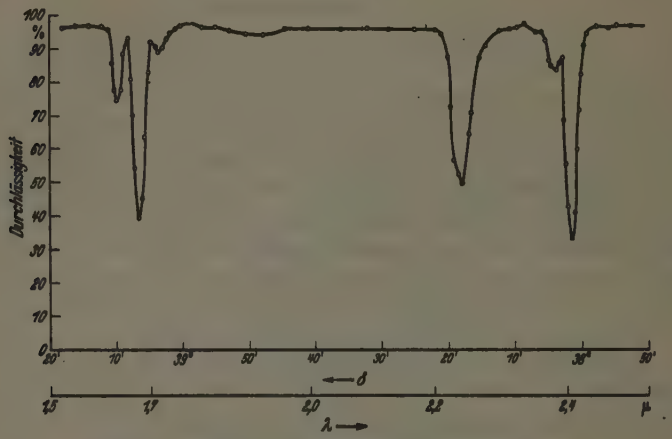


Fig. 2. Absorption des Methylenbromids von 1,5 bis 2,5 μ.

vorgenommen, um Astigmatismus (5) und die aus ihm folgenden Fehler auszuschalten. Die Spiegel Sp_5 und Sp_7 sind in der Mitte mit je einer rechteckigen Öffnung von 20 × 10 mm versehen; die längeren Seiten sind der Dicke nach schräg geschnitten, um die ebenen Spiegel so nahe als möglich an die Spalte bringen zu können, ohne Verluste an den kegelförmigen Strahlenbündeln zu erleiden. Die Einstellung der Minimumablenkung erfolgte mittels eines anderweitig (6) beschriebenen Mechanismus aus einem Abstande von 5 m und mit einer Genauigkeit von einer Bogensekunde. Als Empfänger wurde ein Vakuum-Thermoelement (*Th*) nach C. Müller mit Sylvinfenster und symmetrisch veränderlichem Spalt verwendet. Der entstehende Thermostrom wurde mittels eines Galvanometers Zernike *Zc* gemessen.

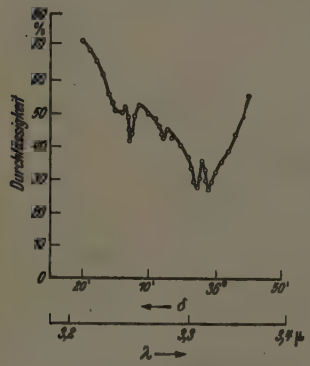


Fig. 3. Absorption des Methylenbromids von 3,2 bis 3,4 μ.

Das von uns verwendete Absorptionsrohr wurde bereits in einer anderen Arbeit (4) beschrieben. Im Gebiete 3,7 μ arbeiteten wir mit einem Quarzdoppelprisma nach Cornu 60° von 112 mm Basislänge, im Gebiete 3,7 bis

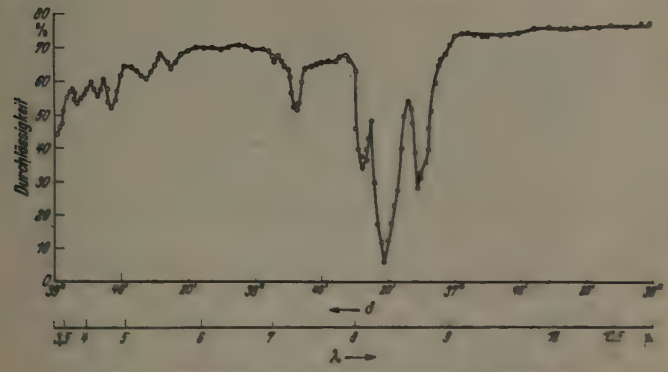


Fig. 4. Absorption des Methylenbromids von 3,5 bis 10,5 μ.

15 μ mit einem Steinsalzprisma 60° von 100 mm Basislänge; beide Prismen hatten eine Höhe von 80 mm.

Ergebnisse und Diskussion. Wie aus Fig. 2 und Fig. 3 hervorgeht, die die mit dem Quarzprisma zwischen 1,5 und 3,7 μ untersuchte Absorption

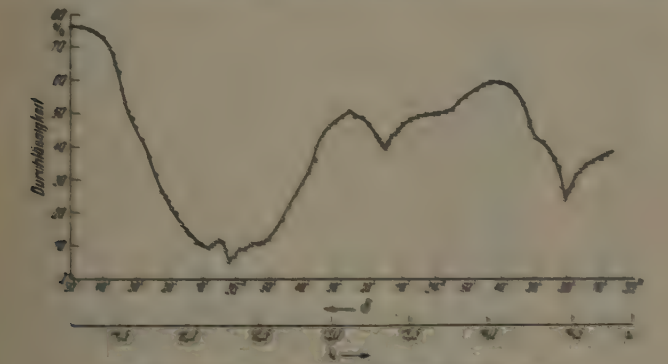


Fig. 5. Absorption des Methylenbromids von 11 bis 15 μ.

des Methylenbromiddampfes darstellen, können drei Gruppen starker Banden beobachtet werden: die erste bei 1,7 μ, die zweite bei 2,4 μ und die dritte bei 3000 cm^{-1}. Ellis (l. c.) führt in seiner Arbeit nur Banden unter

2,16 μ an. Einige von Ellis angegebene zwischen 1,5 und 2,16 μ liegende Banden wurden von uns im Spektrum des dampfförmigen Methylenbromids nicht wiedergefunden; dies könnte der in unserem Falle kleinen Schichtdicke im Vergleich mit jener, die flüssigen Schichten entspricht, zugeschrieben werden. Unerklärlich ist jedoch, daß Ellis, trotzdem er eine Reihe sehr schwacher Banden angibt — einige sind nur als Inflexionspunkte beobachtet worden —, die zwei starken Banden bei 2,246 und 2,407 μ entgangen sind. Im Gebiete um 3000 cm^{-1} können die Banden von 3001 cm^{-1} und 3070 cm^{-1} den Grundschwingungen, die Trumpy (7) im Raman-Spektrum bei 2986 und 3050 cm^{-1} fand, gleichgesetzt werden. Jede dieser Banden ist von einer zweiten, ziemlich starken Bande

Tabelle 1. Die Absorptionsbanden von Methylenbromid.

CH_2Br_2-Dampf		Ellis	Emschwiller und Lecomte	Raman-Spektrum
$\lambda\mu$	ν cm^{-1}	$\lambda\mu$	$\lambda\mu$	ν cm^{-1}
14,428	693			
13,342	750		13,32	
			13,23	
12,307	813		12,34	
12,128	825			
			9,27	
8,738	1144			
8,35	1198		8,50	
8,120	1232			
7,345	1361		7,27	1390
7,013	1426			
5,624	1778			
5,19	1927			
4,555	2194			
4,303	2324			
4,022	2486			
3,932	2543			
3,862	2589			
3,332	3001			2986
3,320	3012			
3,289	3040			
3,257	3070			3050
3,249	3077			
2,407	4154			
2,384	4195			
2,246	4452			
		2,16		
		2,06		
		1,93		
		1,88		
1,720	5814			
		1,695		
1,681	5949	1,58		
1,639	6101			

begleitet; insbesondere ist jene bei 3012 cm^{-1} anzufügen. Im selben Gebiete liegt eine viel schwächere Bande bei 3040 cm^{-1}.

Im Gebiete 3,7 bis 15 μ befinden sich die stärksten Banden um 1200 cm^{-1} und 800 cm^{-1} (Fig. 4 und Fig. 5).

Die von Emschwiller und Lecomte bei 8,50 μ gefundene Bande dürfte aus den zwei von uns bei 8,35 und 8,738 μ gefundenen Banden bestehen, was wohl der kleinen Dispersion der von diesen Autoren benutzten Apparatur zuzuschreiben ist. Die anderen Banden sind zum Vergleich in Tabelle 1 eingetragen.

Um das Absorptionsspektrum des Methylenbromids zu erklären, kann man annehmen, daß das Molekül aus zwei halbunabhängigen Gruppen CH_2 und CBr_2 besteht. Da CH_2Br_2 fünf Atome im Molekül enthält, müssen $3n - 6 = 9$ Grundfrequenzen auftreten; drei sind die Grundschwingungen der CH_2-Gruppe, drei jene der CBr_2-Gruppe, die übrigen drei können den Schwingungen der zwei Gruppen gegeneinander zugeschrieben werden. Diese Methode der Trennung in mehrere halbunabhängige Schwingungen wurde von Mecke (8), Sutherland und Corin (9), Kohlrausch (10), Sutherland und Dennison (11) angewendet und hat sich sehr gut bewährt.

Wie Fox und Martin (12, 13) gezeigt haben, begleiten die CH_2-Gruppe zwei Banden in der Nähe von 3 μ; es können aber auch, je nach dem Molekül, in dem sich die Gruppe befindet, mehrere Banden auftreten. Betrachtet man die CH_2-Gruppe für sich, so besitzt sie drei Schwingungsmöglichkeiten (Fig. 6): davon sind zwei (ν_3 und ν_4) Valenzschwingungen, die bei etwa

Fig. 6. Schwingungsmöglichkeiten der CH_2-Gruppe.

3000 cm^{-1} liegen, die dritte (δ_2) ist eine Deformationsschwingung und befindet sich bei etwa 1400 cm^{-1}. Die von uns bei 3001 und 3070 cm^{-1} gefundenen sehr starken Banden betrachten wir als die zwei Valenzschwingungen der CH_2-Gruppe. Die dritte Grundschwingung, welche im Raman-Spektrum bei 1390 cm^{-1} gefunden wurde, identifizieren wir mit der starken Absorptionsbande bei 1361 cm^{-1}.

Die Grundschwingungen der CBr_2-Gruppe befinden sich außerhalb unseres Meßgebietes, deshalb entnehmen wir sie dem Raman-Spektrum

(14, 15, 16), wo sie folgende Wellenzahlen besitzen: $\nu_1 = 687\ cm^{-1}$, $\nu_2 = 576\ cm^{-1}$ und $\delta_1 = 178\ cm^{-1}$.

Tabelle 2. Die Einordnung der Absorptionsbanden von Methylenbromid.

$\lambda\,\mu$	ν beobachtet cm^{-1}	ν berechnet cm^{-1}	Deutung
13,342	750	749	$\nu_1 + \delta_1$
12,307	813	813	ω_1
12,128	825	810	$\nu_2 + \delta_2$
8,738	1144	1144	ω_2
8,35	1198	1213	$\nu_1 + \nu_2$
8,120	1232	1232	ω_3
7,345	1361	1361	δ_2
7,013	1426	1450	$\nu_2 + \omega_1$
5,624	1778	1781	$\nu_2 + \omega_2$
5,19	1927	1957	$\omega_1 + \omega_2$
4,555	2194	2174	$\delta_2 + \omega_2$
4,303	2324	2376	$\omega_2 + \omega_3$
3,932	2543	2505	$\delta_2 + \omega_2$
3,862	2589	2593	$\delta_2 + \omega_3$
3,332	3001		ν_3
3,257	3070		ν_4
2,407	4154	4145	$\nu_3 + \omega_2$
2,384	4195	4214	$\nu_4 + \omega_2$
2,246	4452	4431	$\nu_4 + \delta_2$
1,681	5949		ν'_3
1,639	6101		ν'_4

Aus Gründen, die aus den Ausführungen von Corin und Sutherland (10) über das CH_2Cl_2-Molekül folgen, werden wir als die noch fehlenden drei Grundschwingungen des CH_2Br_2-Moleküls die von uns beobachteten starken Banden: $\omega_1 = 813\ cm^{-1}$, $\omega_2 = 1144\ cm^{-1}$ und $\omega_3 = 1232\ cm^{-1}$ ansehen. Die letzten zwei Banden haben etwa die gleiche Intensität; zwischen diesen befindet sich die sehr starke Bande $1198\ cm^{-1}$, welche wir als Interkombinationsbande der zwei Grundschwingungen ν_1 und ν_2 betrachten. Beinahe alle anderen im Ultraroten aufgefundenen Banden lassen sich als Interkombinationsbanden der neun Grundschwingungen erklären, wie aus Tabelle 2 hervorgeht.

Die zwei starken Banden bei 1,6 μ ($\nu'_3 = 5949\ cm^{-1}$ und $\nu'_4 = 6101\ cm^{-1}$) werden wir als Oberschwingungen der zwei Grundschwingungen ν_3 und ν_4 einreihen; jede dieser Banden gehört einer anharmonischen Serie an, deren erstes Glied ν_3 bzw. ν_4 ist.

Für die mir von Herrn Prof. C. Statescu erteilten Ratschläge spreche ich auch hier meinen besten Dank aus.

Bucureşti, Wissenschaftliche Fekultät Laboratorul de Fizica Generala.

Literaturverzeichnis.

1) J. Ellis, Phys. Rev. **28**, 25, 1926. — 2) J. Lecomte, C. R. Paris **196**, 1011, 1933. — 3) G. Emschwiller u. J. Lecomte, Journ. Phys. VIII, Serie VII, 130, 1937. — 4) D. Bârcă-Gălăţeanu, Boul. Soc. Roum. Phys., Nr. 67, 1936. — 5) O. Schönrock u. C. Leiss, ZS. f. techn. Phys. **14**, 78, 1933. — 6) D. Bârcă-Gălăţeanu, Boul. Soc. Roum. Phys. Vol. 38, Nr. 70, S. 109, 1937. — 7) B. Trumpy, ZS. f. Phys. **90**, 133, 1934. — 8) R. Mecke, ZS. Phys. Chem. B. **17**, 1, 1932. — 9) C. Corin u. G. Sutherland, Proc. Roy. Soc. London (A) **165**, 43, 1938. — 10) K. Kohlrausch, ZS. Phys. Chem. B. **28**, 340, 1935. — 11) G. Sutherland u. D. Dennison, Proc. Roy. Soc. London (A) **148**, 250, 1935. — 12) J. J. Fox u. A. Martin, ebenda **162**, 419, 1937. — 13) J. J. Fox and A. Martin, ebenda **167**, 257, 1938. — 14) J. Cabannes u. A. Rousset, Ann. de Phys. **19**, 229, 1933. — 15) K. Kohlrausch, Smekal-Raman-Effekt, Erg.-Bd. Jul. Springer, 1938. — 16) H. Sponer, Molekülspektren I, S. 88. Jul. Springer, 1935.

Über das Absorptionsspektrum des dampfförmigen Chromoxyfluorids.

Von **K.-H. Hellwege** in Göttingen.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. März 1941.)

Um die von de Kronig vorgeschlagene Deutung des diffusen Bandenspektrums von CrO_2Cl_2 durch periodisch wiederholte Condonsche Beugungsbanden nachzuprüfen, wurde das Bandenspektrum des chemisch analogen CrO_2F_2 photographiert. Das Spektrum ist qualitativ bis in die Einzelheiten dem des Chlorids ähnlich. Die Periode beträgt 200 cm^{-1} gegen 136 cm^{-1} beim Chlorid. Ein Widerspruch gegen die Deutung durch Beugungsbanden ergibt sich nicht. Die Vergrößerung der Periode würde auch einer (aus anderen Gründen schwierigen) Deutung der Periode als Schwingungsfrequenz nicht widersprechen.

1. Übersicht. Vor einigen Jahren haben de L. Kronig, Schaafsma und Peerlkamp [1]) das Spektrum des dampfförmigen Chromoxychlorids (Chromylchlorids) CrO_2Cl_2 beschrieben und es wegen seiner besonderen Eigenschaften als einen neuen Typus diffuser Molekülspektren bezeichnet. Die beobachteten Banden schienen eine Deutung mit den geläufigen Vorstellungen nicht zuzulassen und wurden deshalb als sogenannte Condonsche Beugungsbanden gedeutet, die von Condon aus theoretischen Überlegungen vorhergesagt waren [2]). Da ein weiteres Beispiel für solche Beugungsbanden bisher meines Wissens nicht vorliegt, wurde die Gelegenheit benutzt, das von Herrn Prof. v. Wartenberg neuerdings hergestellte und freundlicherweise zur Verfügung gestellte Chromylfluorid CrO_2F_2 spektroskopisch zu untersuchen. Die chemische Analogie ließ in erster Näherung keine qualitativen Unterschiede in den Spektren erwarten. Andererseits sind aber die Spektren der Fluoride von denen der anderen Halogenide im allgemeinen merklich verschieden. Daher war zu hoffen, daß *zufällige* Eigenschaften des Chloridspektrums mehr quantitativer Art, die vielleicht zur Deutung als Beugungsbanden geführt hatten, beim Übergang zum Fluorid verloren gehen würden.

2. Experimentelles. Das CrO_2F_2 wurde hergestellt durch Einwirkung von Fluor auf CrO_2Cl_2 und in Quarzküvetten von 12 und 20 cm Länge und 3 bis 5 cm Durchmesser im Stickstoffstrom eingespült [3]). Der Dampf hat bei etwa 50 Torr Partialdruck eine satte braune Farbe. Bei Bestrahlung

[1]) R. de L. Kronig, A. Schaafsma und P. K. Peerlkamp, ZS. phys. Chem. (B) **22**, 323, 1933. — [2]) E. U. Condon, Phys. Rev. **32**, 858, 1928. — [3]) H. v. Wartenberg, ZS. anorg. Chem. **248**, 1941.

mit Licht zeigt sich im Strahlengang ein feiner Staub in dichten Wolken, der photochemisch durch die Lichtabsorption entsteht und sich als weißer Belag am Boden der Küvette niederschlägt. Da die erzeugte Menge natürlich an der Eintrittsseite der Küvette am stärksten ist, wird auch das Eintrittsfenster im Laufe der Belichtung mit einem weißen Beschlag bedeckt. Dieser kann jedoch durch Erwärmen mit einem Bunsenbrenner wieder entfernt werden. Selektive Absorptionen zeigt dieser Belag nicht; das Spektrum ändert sich mit zunehmendem Belag in keiner Weise. Bei Bestrahlung mit einer Hg-Höchstdrucklampe gelingt es, bereits in wenigen Stunden den gesamten Dampf zu zersetzen und als weißen Staub niederzuschlagen. Das deutet darauf hin, daß vorwiegend wohl das ultraviolette Licht photochemisch wirksam ist.

Das Spektrum wurde aufgenommen mit einem Dreiprismenapparat von Steinheil (mittlere Dispersion 15 Å/mm), ein Teil des Spektrums außerdem in der ersten Ordnung eines 6 m-Konkavgitters (Dispersion: 1,97 Å/mm, Strichzahl 125000).

3. Das Spektrum. Das Spektrum besteht wie beim Chlorid aus einer Gruppe von mindestens fünf diffusen Absorptionsbanden ohne Kantenstruktur, die sich etwa 20mal wiederholt. Dabei ist im langwelligen Teil des Spektrums die erste Bande jeweils die intensivste. Nach kürzeren Wellen hin werden dagegen die mittleren Banden immer intensiver und erreichen schließlich dieselbe Intensität wie die Anfangsbande. Dabei werden alle Banden gleichzeitig diffuser, so daß bei den Aufnahmen mit kleiner Dispersion die Fünfbandenstruktur der Gruppen nicht mehr aufgelöst erscheint. Vielmehr besteht die einzelne Gruppe schließlich aus zwei Teilgruppen von je zwei gleich intensiven breiten und diffusen Banden, wobei das erste Dublett den Gruppenanfang, das zweite die Gruppenmitte darstellt.

Diesem ganzen Bandenspektrum überlagert sich ein Kontinuum, dessen Intensität ebenso wie die des Bandenspektrums am langwelligen Ende zunächst langsam ansteigt und dann nach kurzen Wellen hin so stark wird, daß nur die ersten Gruppen bei normaler Belichtungszeit zu erhalten sind, und die Struktur von etwa der vierten Gruppe an erst bei Belichtungszeiten von Stunden mit dem Spektrographen aufgenommen werden kann. Insgesamt ergibt diese Parallelität der Intensitäten den Eindruck, als ob die Bandenstruktur nichts anderes sei als eine Intensitätsmodulation des Kontinuums. Dieses Kontinuum ist beim Chlorid sicher außerordentlich viel schwächer als beim Fluorid, aber auch vorhanden, da Kronig und Mitarbeiter ausdrücklich betonen, daß auch beim Chlorid der violette und ultraviolette Spektralbereich photochemisch besonders wirksam ist. Parallel

mit der stärkeren Betonung des Kontinuums beim Fluorid geht auch die Tatsache, daß die einzelnen Banden hier noch diffuser sind. Aus den Aufnahmen und den Photometerkurven in der Arbeit von Kronig und Mitarbeitern geht hervor, daß die Halbwertsbreite der Chloridbanden etwa

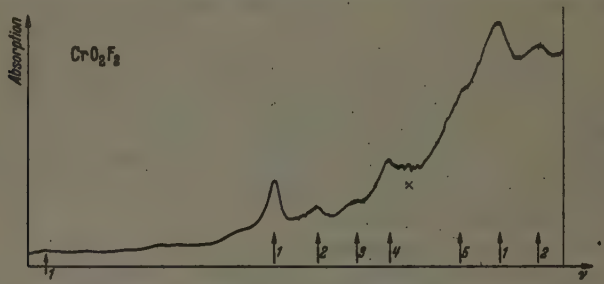


Fig. 1. Teil einer Aufnahme mit dem 6 m-Gitter, Photometerkurve.

zehnmal so groß ist wie die der Eisenlinien im Vergleichsspektrum. Beim Fluorid dagegen sind die Banden 70- bis 100mal so breit wie die Eisenlinien. Fig. 1 zeigt die Photometerkurve der beiden ersten und schwächsten Gruppen nach einer Aufnahme mit dem 6 m-Gitter. Schon die dritte Gruppe ist mit dem Gitter wegen der starken kontinuierlichen Absorption mit erträglichen Belichtungszeiten nicht mehr zu erhalten. Man sieht aber

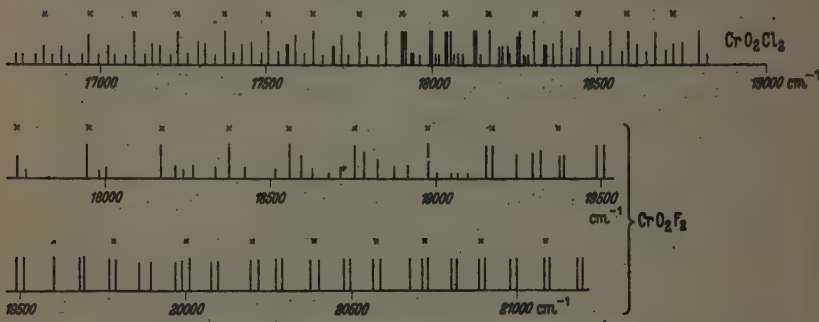


Fig. 2. Die Absorptionsspektren von CrO_2Cl_2 und CrO_2F_2.

auch hier in der zweiten Gruppe deutlich die durch Pfeile gekennzeichnete Fünfbandenstruktur. Der übrige Teil des Spektrums wurde mit dem Prismenapparat aufgenommen und vermessen. Wegen der Breite der einzelnen Banden und weil diese sich obendrein nur wenig von der kontinuierlichen Absorption abheben, sind die gemessenen Wellenlängen nicht so genau, daß ihre Wiedergabe sich lohnt. Es wurde deshalb in Fig. 2

das Spektrum zusammen mit dem des Chlorids auf der Frequenzskala gezeichnet. Die entscheidenden experimentellen Tatsachen kommen dabei klar zum Ausdruck und vor allem ergibt sich die volle Analogie zum Chloridspektrum.

4. Deutung. Beim ersten Anblick liegt es nahe, die sich wiederholenden Gruppen als Schwingungsstruktur des oberen stabilen Elektronenterms zu deuten, vor allem, da der Bandenabstand beim Fluorid etwa in dem Maße größer ist als beim Chlorid, wie es das Massenverhältnis erwarten läßt[1]). Man hätte dann aber in dem angeregten Elektronenzustand 20 aufeinanderfolgende Schwingungsquanten von je 200 cm^{-1} ohne jede Andeutung eines Zusammenrückens mit wachsender Schwingungsquantenzahl. Dieses völlige Fehlen einer Anharmonizität ist an sich schon sehr unwahrscheinlich. Dazu kommen noch folgende Schwierigkeiten. Das Fehlen jeglicher Kantenstruktur in den einzelnen Banden könnte man zunächst durch Prädissoziationserscheinungen deuten. Die durch Prädissoziation hervorgerufene Unschärfe ist aber im allgemeinen nicht über große Gebiete eines Spektrums dieselbe, sondern setzt bei einer bestimmten Frequenz ziemlich plötzlich ein oder ist doch wenigstens auf die Umgebung einer bestimmten Frequenz beschränkt. Das beschriebene Spektrum aber ist in seinem ganzen Bereich von 17500 bis 21500 cm^{-1} völlig diffus. Man könnte schließlich noch versuchen, folgenden Ausweg zu finden: In den Spektren zweiatomiger Moleküle sind Fälle bekannt, bei denen die Bandenkanten von Linien sehr hoher Rotationsquantenzahlen gebildet werden. Bei tiefen Temperaturen, bei denen diese hohen Rotationszustände nicht angeregt sind, treten die Kanten also im Spektrum nicht auf. Es wäre in diesem Falle aber zu erwarten, daß wenigstens die auf die Kanten zulaufenden Linien beobachtet werden und daß die beobachteten Banden zwar keine Kanten, aber immerhin eine unsymmetrische Intensitätsverteilung aufweisen. Nun treten tatsächlich in dem mit dem großen Gitter aufgenommenen Spektrum zwischen den diffusen fünf Hauptbanden der zweiten Gruppe einzelne schwache Linien auf, z. B. an der in Fig. 1 mit einem Kreuz gekennzeichneten Stelle. Diese Linien aber sind ebenfalls diffus, und zwar mindestens zehnmal so breit wie die Fe-Vergleichslinien. Ferner zeigen einige der Hauptbanden

[1]) Nimmt man z. B. wie Kronig und Mitarbeiter an, daß das Halogenmolekül gegen den Chromylrest schwingt, und rechnet man mit derselben Bindungsfestigkeit in beiden Molekülen, so folgt aus der Chloridfrequenz von 136 cm^{-1} eine Fluoridfrequenz von 160 cm^{-1}. Diese Frequenz muß zu niedrig sein, da in Wirklichkeit das Fluorid fester gebunden sein wird als das Chlorid. Die beobachtete Frequenz von 200 cm^{-1} würde also durchaus die richtige Größenordnung haben.

eine Art Dublettstruktur, was auch beim Chlorid beobachtet worden ist. Beide Tatsachen widerstreben der zuletzt vorgeschlagenen Deutungsmöglichkeit.

Als Ausweg aus allen diesen Schwierigkeiten haben Kronig und Mitarbeiter vorgeschlagen, das Spektrum durch Condonsche Beugungsbanden zu deuten. Danach erfolgt der Absorptionsakt aus dem stabilen Grundzustand zu einem instabilen oberen Zustand. Ist die durch die Lichtabsorption angeregte und zur Dissoziation führende Normalschwingung des Moleküls durch die Normalkoordinate $r = r(t)$ als Funktion der Zeit beschreibbar, und ist r_0 der Wert der Normalkoordinate, bei dem das Molekül im Grundzustand im Gleichgewicht ist, so soll die Abstoßungskurve des oberen Zustandes folgende spezielle Form haben: Für $r < r_0$ ist sie eine Parabel mit der Gleichung

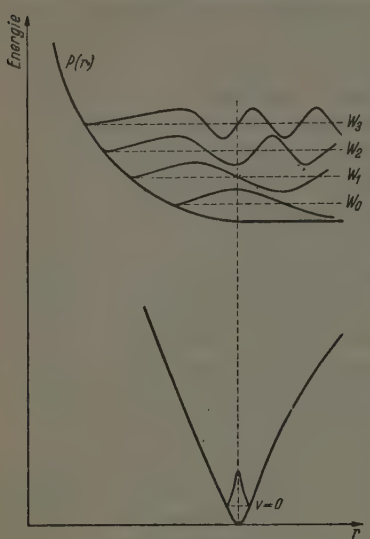


Fig. 3. Termschema.

$$P(r) = 2\pi^2\omega^2\mu(r - r_0)^2$$

(μ = reduzierte Masse der schwingenden Atomgruppen), wobei ω^2 eine Konstante ist. Für $r > r_0$ soll sie horizontal verlaufen. Für diesen Fall sind die Eigenfunktionen in dem Abstoßungsterm stehende Wellen, deren Phase bei festgehaltenem $r = r_0$ sich mit wachsender Anregungsenergie W verschiebt. In der Fig. 3 sind einige solcher Eigenfunktionen für die Energien W_0, W_1, W_2, ... schematisch eingezeichnet, und zwar so, daß die gerade indizierten Energiewerte solche sind, bei denen die Wellenfunktion für $r = r_0$ ein Maximum oder Minimum hat, die ungerade indizierten solche, bei denen die Wellenfunktion an dieser Stelle durch Null geht. Die Absorption erfolgt in dem Schema in erster Näherung vertikal über dem Punkt $r = r_0$. Denn das Übergangsmoment wird im wesentlichen bestimmt durch das Quadrat des Integrals

$$\int \psi_u \cdot r \cdot \psi_o \cdot dr$$

(ψ_u = Eigenfunktion im unteren Zustand; ψ_o = Eigenfunktion im oberen Zustand.) Es ist also von Null verschieden nur in der Nähe von $r = r_0$,

wo $\psi_u \neq 0$ ist, und hat maximale Werte für die Übergänge nach den gerade indizierten, minimale Werte für die Übergänge nach den ungerade indizierten Energiewerten des oberen Terms. Das Spektrum muß also abwechselnd intensive und schwache Absorptionen zeigen. Für die von uns vorausgesetzte Form der Abstoßungskurve haben nun die gerade indizierten Eigenwerte speziell den *konstanten* Abstand $2\,h\,\omega$. Damit ist das Auftreten äquidistanter diffuser Banden als eine Art Modulation in einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum verständlich. Die Konstante ω ist dann so zu wählen, daß die Periode für das Chlorid gerade 136 cm^{-1}, für das Fluorid aber 200 cm^{-1} wird. Die Struktur innerhalb der einzelnen Gruppen muß wahrscheinlich dadurch erklärt werden, daß außer vom schwingungslosen Grundzustand auch Übergänge von niedrigen, schon bei Zimmertemperatur besetzten Schwingungszuständen ausgehen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Das Spektrum des Chromoxyfluorids ist bis in die Einzelheiten dem des Chlorids analog. Insbesondere ist seine Deutung durch Condonsche Beugungsbanden im selben Maße notwendig und berechtigt. Der Vergleich beider Spektren ergibt als neue Tatsache eine größere Periode im Spektrum des Fluorids. Das widerspricht der Deutung durch Beugungsbanden nicht, würde aber auch einer (aus anderen Gründen zweifelhaften) Deutung der Periode als Schwingungsfrequenz nicht widersprechen.

Herrn Prof. Dr. H. v. Wartenberg bin ich für die Herstellung und Überlassung der Substanz, Herrn Prof. Dr. G. Joos für Diskussion zu Dank verpflichtet.

Göttingen, II. Physikalisches Institut, März 1941.

Zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen.

Eine einfache Methode und ihre Ergebnisse.

Von **Manfred von Ardenne.**

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1941.)

Methode zur Bestimmung von Brennweite, Öffnungsfehler und Bildfelddrehung, Einzelergebnisse. Zusammengefaßte Ergebnisse. Zusammenfassung.

Untersuchungen und Rechnungen über die Grenzen des Auflösungsvermögens des Elektronenmikroskopes [1]) zeigen, daß wesentliche Fortschritte nur dann zu erwarten sind, wenn es gelingt, die Daten der Mikroskopobjektive (Öffnungsfehlerkonstante, Brennweite) merklich zu verbessern. Aus diesem Grunde und besonders nachdem schon mehrere theoretische Arbeiten über Elektronenmikroskopobjektive vorliegen (Glaser, Rebsch, Scherzer), hat die Ausbildung und Anwendung einer einfachen Methode zur experimentellen Bestimmung der wichtigsten Objektivdaten aktuelle Bedeutung.

Eine Anordnung zur Messung des Öffnungsfehlers von Elektronenmikroskopobjektiven sowie einige mit ihr erzielte Ergebnisse finden sich bereits in einer früheren Mitteilung beschrieben [2]). Diese Einrichtung erfordert jedoch eine sehr sorgfältige Schärfeneinstellung und bei Übergang zu anderen Brennweiten mechanische Verstellungen im Vakuumraum. Im folgenden soll ein Verfahren besprochen werden, daß ohne Schärfenabgleich und z. T. auch Verstellungen im Vakuum auskommt und das bei der Entwicklung von Linsensystemen für ein neues *Universal-Elektronenmikroskop mit bis zu* 220 kV-*Strahlspannung* [3]) vorzügliche Dienste geleistet hat.

Methode zur Bestimmung von Brennweite, Öffnungsfehler und Bildfelddrehung. Dieses durch Fig. 1 veranschaulichte Verfahren entspricht der Hartmannschen Extrafokalmethode der Lichtoptik [4]). Von einer entfernt liegenden punktförmigen Strahlungsquelle werden durch Ausblendung unmittelbar vor der Linse nur verschiedene Bereiche der Linse oder Linsenfolge bestrahlt. Wird ein in größerem Abstand entworfenes Schattenbild

---

[1]) M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie. Verlag Julius Springer, 1940, und B. von Borries u. E. Ruska, Mikroskopie hoher Auflösung mit sehnellen Elektronen. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 19. Verlag Julius Springer, 1940, sowie die in diesen Veröffentlichungen angegebenen Literaturstellen. — [2]) M. von Ardenne, ZS. f. techn. Phys. **20**, 289, 1938. — [3]) M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie, l. c. S. 213. — [4]) Vgl. H. Kessler, „Methoden zur Prüfung von optischen Instrumenten" in Handb. d. Phys., Bd. 18, S. 800, Verlag Julius Springer, 1927.

der Blende untersucht, so kann aus Vergrößerung und Bildweite die resultierende *Brennweite* und aus der Verzeichnung der *Öffnungsfehler* bestimmt werden. In der Elektronenoptik läßt sich dieses Verfahren sehr vollkommen verwirklichen, weil die Bedingung der punktförmigen Strahlenquelle sehr viel besser als in der Lichtoptik zu realisieren ist, und die Beugung der Elektronenwellen an der Blende wegen der Kleinheit der Wellenlänge noch

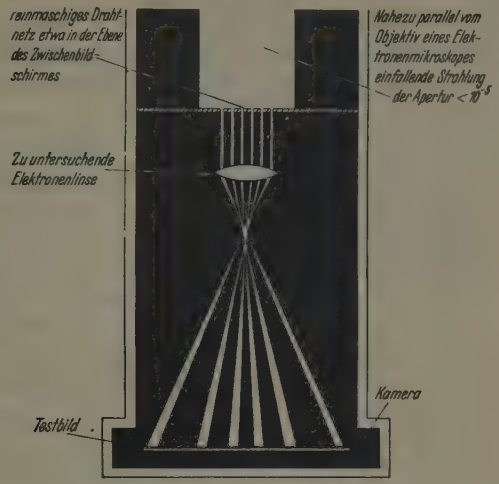


Fig. 1. Schaubild des Strahlenganges der Methode zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen

keine Bildverschlechterung bewirkt. Um die bei magnetischen Elektronenlinsen eintretende *Bildfelddrehung* mit erfassen zu können, und um die Zuordnung der Bündel zueinander auch bei komplizierten Linsenfehlern zu ermöglichen, hat es sich als nützlich erwiesen, ein Netz als Blende zu benutzen. Recht einfach läßt sich das Verfahren verwirklichen, wenn ein Elektronenmikroskop mit auswechselbarem Projektionslinseneinsatz zur Verfügung steht. Dann dient die vom Objektiv, also aus größerem Abstand mit einer Apertur von weniger als 10^{-5} einfallende Strahlung zur Beleuchtung. Die Blende wird als feinmaschiges Drahtnetz unmittelbar über der Linse, z. B. in der Ebene des Zwischenbildschirmes, angebracht. Die zu untersuchende Linse kann ohne weitere Blenden in den Strahlengang gebracht werden und das Testbild mit der normalen Vakuumkamera aufgenommen werden. Strahlengang und Beziehungen zur Bestimmung des Öffnungsfehlers aus dem erhaltenen Testbild sind der weiteren Darstellung Fig. 2

zu entnehmen. Auf die Änderung des Abbildungsmaßstabes durch den Einfluß der Kaustik bei der Schattenprojektion mit Elektronen wurde überdies kürzlich [1] in anderem Zusammenhang hingewiesen.

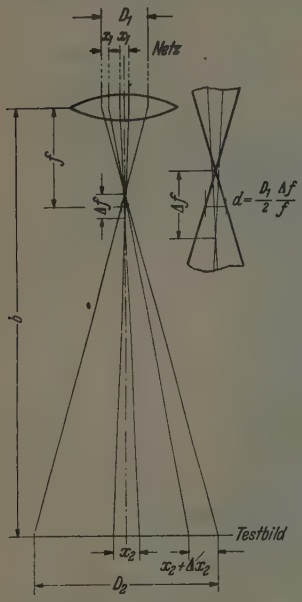


Fig. 2. Strahlengang und Beziehungen zur Bestimmung des Öffnungsfehlers aus der Verzeichnung.

$$d = \frac{D_2}{2}\,\frac{f}{b-f}\,\frac{\Delta x_2}{x_2+\Delta x_2},$$

für $d = C\cdot\left(\frac{D_1}{f}\right)^3\cdot f$:

$$C \approx \frac{1}{2}\,\frac{\Delta x_2}{x_2+\Delta x_2}\,\frac{(b-f)^2}{D_2^2}.$$

Bei Anwendung der Methode in der zunächst besprochenen Form trägt das ganze Linsenfeld zur Fokussierung bei. In vielen Fällen erreicht die Brennweite so niedrige Werte, daß das Objekt in das Linsenfeld hineinrückt, und daher die jenseits der Objektebene liegenden Anteile des Linsenfeldes nicht mehr als zur Objektivlinse, sondern zur Kondensorlinse gehörig betrachtet werden müssen (W. Glaser). Bei dieser Objektlage ergibt die Methode zu kurze Brennweiten. Durch Anordnung des feinmaschigen Drahtnetzes nicht vor der Linse, sondern in der vorgesehenen Objektebene kann solchen Verhältnissen Rechnung getragen werden.

Eine sehr wichtige Variation der vorgeschlagenen Methode besteht darin, dem feinmaschigen Drahtnetz keinen festen Ort zu geben, sondern es mit einer Vorrichtung zu verbinden, die eine *Verschiebung des Netzes längs der Hauptachse durch das ganze Linsenfeld hindurch* gestattet. Auf diesem, allerdings nur bei magnetischen Linsen einfach zu beschreitenden Wege gelingt es, durch nur eine mit verschiedenen Netzlagen hergestellte Aufnahmenreihe Unterlagen über das Linsenfeld selbst (getrennte Erfassung der Wirkung verschiedener Feldabschnitte) und über eventuell vorhandene Periodizitäten (Arbeiten im Bereich der zweiten Minimalbrennweite, siehe unten) zu gewinnen.

Bei neueren Objektiven des Verfassers ist das Linsenfeld so konzentriert, daß bei der kleinsten im Betriebe benutzten Brennweite das Objekt

[1] H. Börsch, Jahrbuch der AEG-Forschung **7**, 38, 1940.

noch nicht wesentlich in das Linsenfeld hineinrückt. Es genügte daher, die Testaufnahmen mit fester Lage des Drahtnetzes vor der Linse durchzuführen. Um die Ergebnisse übersichtlicher zu gestalten, sind im folgenden nur Linsensysteme symmetrischer Bauart behandelt.

Einzelergebnisse. Bei Elektronenobjektiven interessiert besonders der Wert der *Minimalbrennweite* des einzelnen Modelles für die Betriebsspannung des Mikroskopes. Nach Einstellung auf größte Vergrößerung (Änderung der Durchflutung bei magnetischen Linsen, Änderung der Mittelelektrodenspannung bei elektrostatischen Linsen) mit Hilfe des Endbildleuchtschirmes und nach Auswertung der Testaufnahme ergibt sich die Minimalbrennweite

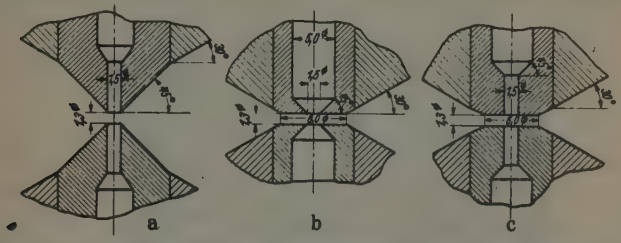


Fig. 3. Mit verschiedenen Formen der Polschuhenden (symmetrische Bauart) für 150 kV Strahlspannung erhaltene Minimalbrennweiten. Material Holzkohleneisen.

Ergebnisse:				
Voltgeschwindigkeit 150 kV	f_{min} =	5,15 mm	5 mm	4,45 mm
Aufwand an Amperewindungen		1800	2100	2900

unmittelbar aus Vergrößerungsmaßstab und der gegenüber der Brennweite stets groß zu bemessenden Bildweite. Mit der besprochenen Methode ermittelte Minimalbrennweiten magnetischer Polschuhlinsen mit verschiedenen Polschuhformen sind in Fig. 3 für eine Strahlspannung von 150 kV angegeben. Wir sehen, daß die Form c, die bei den *Objektiven* der *Universal-Elektronenmikroskope* (z. T. mit verschiedenen Durchmessern der beiden Bohrungen) benutzt wird, dank des großen Eisenquerschnittes in der Nähe der Polschuhspitzen die kürzesten Minimalbrennweiten liefert. Die weiter unten gebrachten Ergebnisse beziehen sich alle auf die Polschuhform c mit zylindrischer Bohrung. Die Durchführung großer Teile der Untersuchung bei der genannten *in der Übermikroskopie noch nicht angewendeten hohen Strahlspannung* erschien nicht nur im Rahmen der Entwicklung des erwähnten 200 kV-Elektronenmikroskopes angebracht, sondern auch mit Rücksicht auf die Tatsache, daß bei hohen Spannungen größere Brennweiten relativ zur Ausdehnung des Linsenfeldes längs der Achse (Halbwertsbreite) gegeben sind und daher die obenerwähnte Vorbedingung besser erfüllt wird.

Bei allen Elektronenaufnahmen diente das gleiche recht regelmäßig hergestellte Drahtnetz als Blende. Trotzdem es sich hier um ein Netz handelt, das über 10^4 Maschen/cm^2 besitzt, genügt es nur bei schwächeren Vergrößerungen zur Bestimmung des Öffnungsfehlers. Für eine spezielle Untersuchung des Öffnungsfehlers wäre ein Netz mit einer Gitterkonstante von mindestens 10^{-2} mm anzustreben, das beispielsweise auf elektronenphotographischem Wege durch verkleinerte Abbildung hergestellt werden kann, wobei die Bromsilberkörner auf eine stabile Kollodiumhaut aufgebracht werden müßten.

Von einer schwach erregten Polschuhlinse mit $f = 80$ mm bei 150 kV ergab sich das *Schattenbild* Fig. 4 im Zusammenhang mit den weiteren in

Fig. 4. Testbild einer schwach abgeblendeten symmetrischen Polschuhlinse mit zylindrischer Bohrung (Bohrungsdurchmesser $D_p = 1{,}5$ mm; Polschuhabstand $A_p = 1{,}3$ mm), eingestellt auf 40 mm mittlere Brennweite. $b = 600$ mm; $D_s = 10$ mm; $\frac{\Delta x_s}{x_s + \Delta x_s} = 0{,}5$; $C = 800$

der Bildunterschrift genannten Daten. Die Ausrechnung der hierbei gegebenen Linsenkonstanten C aus der Verzeichnung findet sich ebenfalls in der Bildunterschrift. Ein sehr heftiger Öffnungsfehler durch mangelnde Rotationssymmetrie der Linse kommt in dem Schattenbild Fig. 5 zum Ausdruck. Die Abweichungen von der Rotationssymmetrie sind hier durch Aufladungen an feinsten Fettfilmen im Innern der Linsenbohrung des nicht gut gereinigten Objektives bedingt Durch sehr gute Reinigung des Objektives und durch Vorschaltung einer hochgereinigten Blende (diese Rolle

übernimmt bei dem Elektronenmikroskopobjektiv der Objektträger selbst, der bekanntlich vor jeder neuen Präparierung peinlichst gesäubert wird) lassen sich solche *Verschlierungen des Linsenfeldes* mit Sicherheit vermeiden.

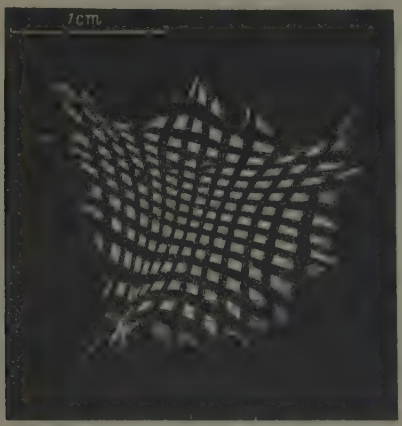


Fig. 5. Testbild einer unabgeblendeten, ungereinigten Polschuhlinse mit starkem Öffnungsfehler durch Aufladungsstörungen am Objektivrande bei ähnlichen Betriebsdaten wie in Fig. 4.

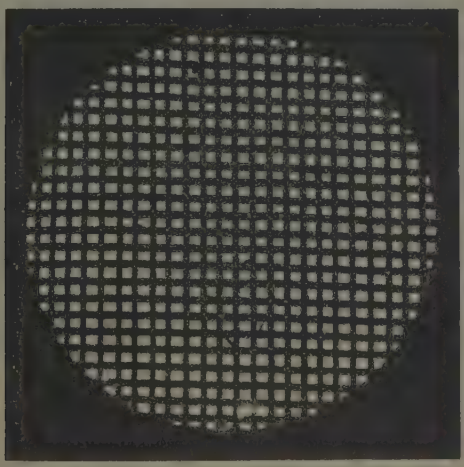


Fig. 6. Testbild einer Polschuhlinse mit Polschuhbohrung D_p = 10 mm und Polschuhabstand A_p = 30 mm bei 150 kV Strahlspannung. Minimalbrennweite 50 mm, Bildfelddrehung 90°

Die folgenden wieder mit 150 kV Strahlspannung gewonnenen Schattenbilder Fig. 6, 7 und 8 veranschaulichen die Abnahme der Minimalbrennweite, die entsprechende Zunahme der Vergrößerung und die Änderung der Bildfelddrehung mit der Variation gewisser Abmessungen der Linsen. Während in Fig. 6 die Minimalbrennweite 50 mm und die Bildfelddrehung 90° betrug, ist in Fig. 7 durch Verringerung des Polschuhabstandes die Minimal-

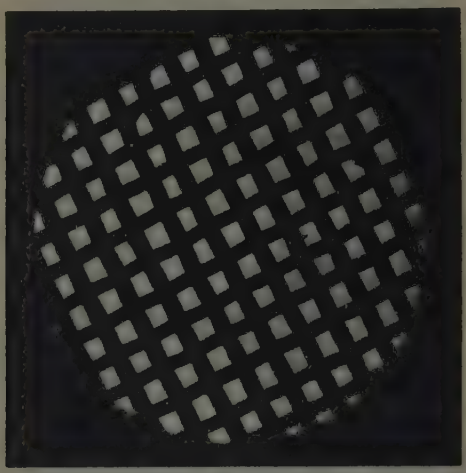


Fig. 7. Testbild der gleichen Linse wie Fig. 6 nach Verringerung des Polschuhabstandes auf A_p = 5 mm. Minimalbrennweite 23,5 mm, Bildfelddrehung 140°.

brennweite auf etwas über die Hälfte reduziert, die Bildfelddrehung dagegen auf 140° angestiegen. Bei der Aufnahme Fig. 6 besitzt die Objektivblende einen Durchmesser von 20% und in Fig. 7 einen Durchmesser von 10% der vollen Linsenöffnung. — Eine wesentlich kürzere Minimalbrennweite ergibt sich aus dem Testbild Fig. 8 für die Linse mit der Form und den Abmessungen der Fig. 8 *C*. Die Minimalbrennweite erreicht für 150 kV-Spannung den Wert 4,45 mm. Wieder ist die Bildfelddrehung etwa 140°. Bei den Aufnahmen Fig. 6 und Fig. 7 ist die erhaltene Brennweite nicht mehr als groß gegenüber der Ausdehnung des Linsenfeldes anzusehen, so daß in Wirklichkeit etwas größere Minimalbrennweiten bestehen. Interessant ist, daß die Minimalbrennweite bei allen hier wiedergegebenen Aufnahmen ungefähr bei der gleichen Amperewindungszahl des Erregermagneten sich einstellte.

Ruska [1]) hat bereits das Vorhandensein einer Minimalbrennweite bei der magnetischen Polschuhlinse festgestellt. Die Untersuchungen mit der

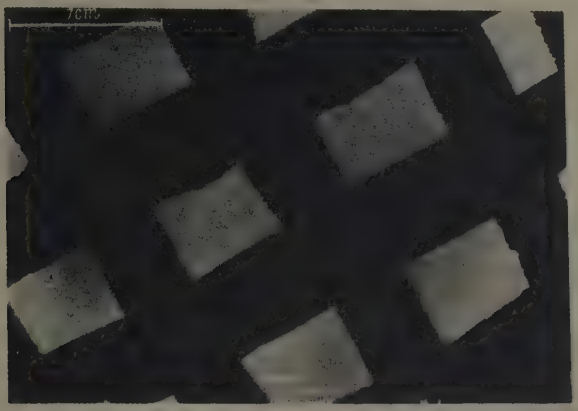


Fig. 8. Testbild einer Polschuhlinse mit Polschuhbohrung D_p = 1,5 mm und Polschuhabstand A_p = 1,3 mm; sonstige Daten wie in Fig. 3 c. f_{min_1} = 4,45 mm; b = 600 mm; V = 135; Bildfelddrehung 135°.

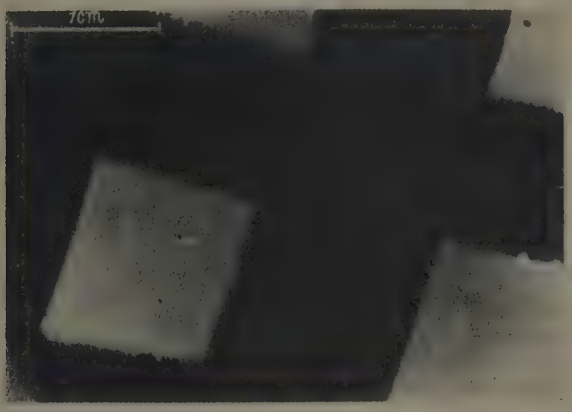


Fig. 9. Testaufnahme der gleichen Linse wie in Fig. 8, aufgenommen mit einer zweiten gefundenen Minimalbrennweite.

besprochenen Methode ergaben nun die Feststellung, daß bei weiterer Steigerung der Amperewindungszahl mindestens noch eine *zweite Minimal-*

[1]) E. Ruska, ZS. f. Phys. 89, 90, 1934.

brennweite für das Linsensystem resultiert, die weniger als den halben Wer der ersten Minimalbrennweite besitzt. So wurde die Aufnahme Fig. 9 mit der gleichen Optik ebenfalls bei 150 kV Strahlspannung in dem festgestellten zweiten Arbeitsbereich gewonnen. Die lineare Vergrößerung erreicht hier den doppelten Wert gegenüber Fig. 8.

Zusammengefaßte Ergebnisse. Eine Meßreihe über die Abhängigkeit der Brennweite einer weiteren Polschuhlinse von der Amperewindungszahl liegt der Fig. 10 zugrunde. Wir sehen hier, daß die Brennweite nach Erreichen eines der angegebenen Anodenspannung zugeordneten Minimalwertes von $f_{min_1} = 3{,}7$ mm wieder ansteigt; etwa bei der doppelten Zahl Amperewindungen nähert sich die resultierende Brennweite des Systems dem Wert ∞. Mit weiterer Steigerung der Erregung sinkt die resultierende Brennweite der durch den Einfluß der Sättigung sich auseinanderziehenden Linsenfolge wieder ab und erreicht im zweiten Minimum den *für 150 kV bisher nicht realisierbaren Wert von 1,6 mm*, sogar mit Polschuhen aus dem angegebenen Spezialeisen geringerer Eignung. Die Messungen Fig. 10 zeigen also nunmehr auch experimentell, daß der Fall der sogenannten „kurzen" Linse bei stärker erregten magnetischen Polschuhlinsen keineswegs gegeben ist. Bei Betrieb des *Objektives* im gefundenen zweiten Arbeitsbereich (Fig. 10), d. h. mit resultierenden Objektivbrennweiten nahe f_{min_2} wurden *hochvergrößerte elektronenmikroskopische Aufnahmen* von Diatomeen bei 150 kV hergestellt. — Ob der Betrieb nahe f_{min_2} in der Objektivstufe hinsichtlich des Auflösungsvermögens einen Fortschritt oder Rückschritt bringt, kann zur Zeit noch nicht entschieden werden. Sicher ist jedoch, daß diese Arbeitsweise in der Projektionsstufe bei höheren Spannungen recht vorteilhaft ist. So ließ sich auch bei *Strahlspannungen von 200 kV eine sehr erhebliche Vergrößerungsreserve mit normaler Bauhöhe (60 cm) von Objektiv- und Projektionsstufe stets erreichen.*

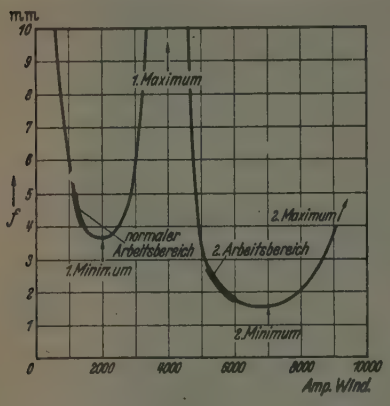


Fig. 10. Die erste und die zweite resultierende Minimalbrennweite einer magnetischen Polschuhlinse. Polschuhlinse: Modell c, $D_p = 0{,}8$ mm, $A_p = 0{,}7$ mm, Hyperm 7, Strahlspannung 150 kV.

Weitere Meßreihen über den Einfluß des Polschuhabstandes, der Strahlspannung und des Durchmessers der Polschuhbohrung auf den Wert f_{min_1} enthält Fig. 11. Der linken Darstellung liegen Messungen nur bis zum U-Wert 210 kV zugrunde. Systematische Messungen wurden auch über die Verbesserungen der Polschuhlinsen durch Anwendung spezieller Eisensorten im Bereich der Polschuhspitzen durchgeführt. Sie ergaben z. B. bei Übergang von Holzkohleneisen auf Kobaltweicheisen eine Herabsetzung der Minimalbrennweite f_{min_1} um etwa 8% bei gegebener Linsenform und Strahlspannung und zeigten, daß es nicht auf höchste Maximalpermeabilität, sondern auf höchste Sättigung ankommt.

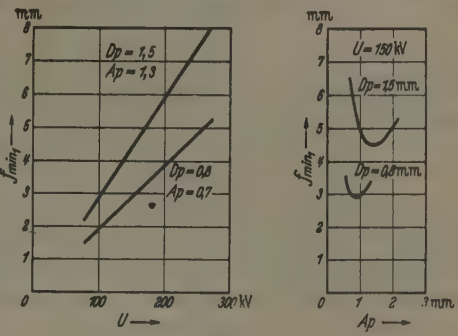


Fig. 11. Die erste Minimalbrennweite $f\,\mathrm{min}_1$ als Funktion der Beschleunigungsspannung U und des Polschuhabstandes A_p für eine Polschuhlinse Modell c (Polschuhe Holzkohleneisen).

Zusammenfassung. Eine Methode wird angegeben, um Brennweite (Minimalbrennweite), Öffnungsfehler und Bildfelddrehung kurzbrennweitiger Elektronenlinsen bzw. Linsensysteme aus einer einzigen ohne Schärfeneinstellung durchgeführten Elektronenaufnahme zu bestimmen. Der Einfluß der Aufladungen am Objektivrande, von Objektivblenden, Polschuhformen, Polschuhabmessungen und verschiedenen Anodenspannungen wird durch Einzelergebnisse und zusammengefaßte Ergebnisse gezeigt. Als wichtigstes Resultat für die Elektronenmikroskopie (insbesondere mit höheren Spannungen) ist die Feststellung hervorzuheben, daß die magnetischen Polschuhlinsen nicht nur eine, sondern bei stark vergrößerter Durchflutung mindestens noch eine zweite resultierende Minimalbrennweite von weniger als dem halben Wert der ersten Minimalbrennweite besitzen.

Die *Deutsche Forschungsgemeinschaft* hat die vorstehende Arbeit durch Bereitstellung von Mitteln für die Errichtung der hier benutzten Anlage des 200 kV-Universal-Elektronenmikroskopes entscheidend gefördert.

Intensitätsverteilung in den Quartett-Dublett-Banden. II.

Von **I. Kovács** in Budapest und **A. Budó** in Szeged.

(Eingegangen am 28. März 1941.)

Anschließend an eine frühere Arbeit wird die Intensitätsverteilung in den Zweigen der Quartett-Dublett-Banden $^4\Pi(a) - {}^2\Sigma$, $^4\Pi(b) - {}^2\Sigma$, $^4\Pi(a) - {}^2\Pi(a)$, $^4\Pi(a) - {}^2\Pi(b)$, $^4\Pi(b) - {}^2\Pi(a)$, $^4\Pi(b) - {}^2\Pi(b)$ berechnet und unter Berücksichtigung der schon früher erhaltenen Ergebnisse die Größenordnung der Zweige kurz diskutiert.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit[1]) haben wir einen Teil der Quartett-Dublett-Banden bezüglich der Intensitätsverteilung in ihren Zweigen behandelt. Jetzt bringen wir die entsprechenden Resultate für die andere Hälfte der Quartett-Dublett-Übergänge, d. h. für diejenigen Banden, in welchen der Quartett-Term ein Π-Zustand ist.

Tabelle 1. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi(a) - {}^2\Sigma$-Banden[2]).

Zweige	$^4\Pi(a) - {}^2\Sigma$	Zweige
$^OP_{12}$	$\frac{3(J-1/2)(J+1/2)}{J} C_1^2$	$^NP_{13}$
$^PQ_{12}$	$\frac{3(J+1/2)}{2J(J+1)} C_1^2$	$^OQ_{13}$
$^QR_{12}$	$\frac{3(J+1/2)(J+3/2)}{J+1} C_1^2$	$^PR_{13}$
$^PP_{22}$	$\frac{(J-1/2)(J+1/2)}{J}[C_2 \mp C_1]^2$	$^OP_{23}$
$^QQ_{22}$	$\frac{2(J+1/2)}{J(J+1)}[1/2\, C_2 \mp C_1(J+1/2)]^2$	$^PQ_{23}$
$^RR_{22}$	$\frac{(J+1/2)(J+3/2)}{J+1}[C_2 \pm C_1]^2$	$^QR_{23}$
$^QP_{32}$	$\frac{(J-3/2)(J-1/2)}{J} C_1^2$	$^PP_{33}$
$^RQ_{32}$	$\frac{2(J-1/2)(J+1/2)(J+3/2)}{J(J+1)} C_1^2$	$^QQ_{33}$
$^SR_{32}$	$\frac{(J+3/2)(J+5/2)}{J+1} C_1^2$	$^RR_{33}$
$^RP_{42}$	0	$^QP_{43}$
$^SQ_{42}$	0	$^RQ_{43}$
$^TR_{42}$	0	$^SR_{43}$

[1]) A. Budó u. I. Kovács, ZS. f. Phys. **116**, 693, 1940. Im folgenden als I zitiert. — [2]) Bei den Formeln mit zweifachen Vorzeichen gilt das obere Vorzeichen für das linksstehende, das untere für das rechtsstehende Zweigsymbol.

Tabelle 2. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi\,(b) - {}^2\Sigma$-Banden.

Zweige	$^4\Pi\,(b) - {}^2\Sigma$	Zweige	$^4\Pi\,(b) - {}^2\Sigma$
$^{O}P_{12}$	$\frac{3\,(J-5/2)\,(J-1/2)\,(J+1/2)}{2\,(J-1)\,J}\,[C_2-C_1]^2$	$^{N}P_{13}$	0
$^{P}Q_{12}$	$\frac{3\,(J-3/2)\,(J+1/2)}{4\,J^2\,(J+1)}\,[C_2-2\,C_1\,(J+1)]^2$	$^{O}Q_{13}$	$\frac{3\,(J-3/2)\,(J+1/2)}{4\,J^2\,(J+1)}\,C_1^2$
$^{O}R_{12}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{2\,(J+1)^2\,(J+1/2)}\,[C_2\,(J+1/2)+C_1\,(J+3/2)]^2$	$^{P}R_{13}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{2\,(J+1)^2\,(J+1/2)}\,C_1^2$
$^{P}P_{22}$	$\frac{J+1/2}{2\,J^2}\,[2\,C_2\,J-3\,C_1]^2$	$^{O}P_{23}$	$\frac{(J+1/2)\,(J-3/2)^2}{2\,J^2}\,[C_2-C_1]^2$
$^{Q}Q_{22}$	$\frac{1}{4\,J\,(J+1)^2}\,[2\,C_2\,(J+1)-C_1\,(5\,J+13/2)]^2$	$^{P}Q_{23}$	$\frac{\left[C_2\,(J-1/2)-C_1\,[(J-7/2)\,(J+3/2)+(J+5/2)\,(J+1/2)]\right]^2}{4\,J\,(J+1)^2}$
$^{R}R_{22}$	$\frac{2\,(J+2)}{(J+1)\,(J+1/2)}\,[C_2\,(J+1/2)+C_1]^2$	$^{Q}R_{23}$	$\frac{\left[2\,C_2\,(J+1/2)^2+C_1\,[(J-5/2)\,(J+5/2)+(J+7/2)\,(J+1/2)]\right]^2}{8\,(J+1)\,(J+2)\,(J+1/2)}$
$^{Q}P_{32}$	$\frac{\left[2\,C_2\,(J+1/2)^2+C_1\,[(J+7/2)\,(J-3/2)+(J-5/2)\,(J+1/2)]\right]^2}{8\,(J-1)\,J\,(J+1/2)}$	$^{P}P_{33}$	$\frac{2\,(J-1)}{J\,(J+1/2)}\,[C_2\,(J+1/2)-C_1]^2$
$^{R}Q_{32}$	$\frac{\left[C_2\,(J+3/2)+C_1\,[(J+9/2)\,(J-1/2)+(J-3/2)\,(J+1/2)]\right]^2}{4\,J\,(J+1)}$	$^{Q}Q_{33}$	$\frac{1}{4\,J^2\,(J+1)}\,[2\,C_2\,J-C_1\,(5\,J-3/2)]^2$
$^{S}R_{32}$	$\frac{(J+1/2)\,(J+5/2)^2}{2\,(J+1)^2}\,[C_2-C_1]^2$	$^{R}R_{33}$	$\frac{J+1/2}{2\,(J+1)^2}\,[2\,C_2\,(J+1)+3\,C_1]^2$
$^{R}P_{42}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{2\,J^2\,(J+1/2)}\,C_1^2$	$^{Q}P_{43}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{2\,J^2\,(J+1/2)}\,[C_2\,(J+1/2)+C_1\,(J-1/2)]^2$
$^{S}Q_{42}$	$\frac{3\,(J+1/2)\,(J+5/2)}{4\,J\,(J+1)^2}\,C_1^2$	$^{R}Q_{43}$	$\frac{3\,(J+1/2)\,(J+5/2)}{4\,J\,(J+1)^2}\,[C_2+2\,C_1\,J]^2$
$^{T}R_{42}$	0	$^{S}R_{43}$	$\frac{3\,(J+1/2)\,(J+3/2)\,(J+7/2)}{2\,(J+1)\,(J+2)}\,[C_2-C_1]^2$

Tabelle 3. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi(a) - {}^2\Pi(a)$-Banden.

Zweige	$^4\Pi(a) - {}^2\Pi(a)$	Zweige	$^4\Pi(a) - {}^2\Pi(a)$
$^OP_{12}$	$\frac{3(J-1/2)(J+1/2)}{J} D_1^2$	$^NP_{13}$	$\frac{3(J+1/2)(J+3/2)}{J} D_3^2$
$^PQ_{12}$	$\frac{6(J+1/2)^3}{J(J+1)} D_1^2$	$^OQ_{13}$	$\frac{6(J-1/2)(J+1/2)(J+3/2)}{J(J+1)} D_3^2$
$^QR_{12}$	$\frac{3(J+1/2)(J+3/2)}{J+1} D_1^2$	$^PR_{13}$	$\frac{3(J-1/2)(J+1/2)}{J+1} D_3^2$
$^PP_{22}$	$\frac{(J-1/2)(J+1/2)}{J} [D_2 - D_3]^2$	$^OP_{23}$	$\frac{(J+1/2)(J+3/2)}{J} D_1^2$
$^QQ_{22}$	$\frac{2(J+1/2)}{J(J+1)} [1/2\, D_2 + D_3(J+1/2)]^2$	$^PQ_{23}$	$\frac{2(J-1/2)(J+1/2)(J+3/2)}{J(J+1)} D_1^2$
$^RR_{22}$	$\frac{(J+1/2)(J+3/2)}{J+1} [D_2 + D_3]^2$	$^QR_{23}$	$\frac{(J+1/2)(J-1/2)}{J+1} D_1^2$
$^QP_{32}$	$\frac{(J-3/2)(J-1/2)}{J} D_4^2$	$^PP_{33}$	$\frac{(J-3/2)(J+3/2)}{J} D_2^2$
$^RQ_{32}$	$\frac{2(J-1/2)(J+1/2)(J+3/2)}{J(J+1)} D_4^2$	$^QQ_{33}$	$\frac{9(J+1/2)}{2J(J+1)} D_2^2$
$^SR_{32}$	$\frac{(J+3/2)(J+5/2)}{J+1} D_4^2$	$^RR_{33}$	$\frac{(J-1/2)(J+5/2)}{J+1} D_2^2$
$^RP_{42}$	0	$^QP_{43}$	$\frac{3(J-5/2)(J-3/2)}{J} D_4^2$
$^SQ_{42}$	0	$^RQ_{43}$	$\frac{6(J-3/2)(J+1/2)(J+5/2)}{J(J+1)} D_4^2$
$^TR_{42}$	0	$^SR_{43}$	$\frac{3(J+5/2)(J+7/2)}{J+1} D_4^2$

Tabelle 4. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi\,(a) - {}^2\Pi\,(b)$-Banden.

Zweige	$^4\Pi\,(a) - {}^2\Pi\,(b)$	Zweige	$^4\Pi\,(a) - {}^2\Pi\,(b)$
$^OP_{12}$	$\frac{3}{2J}[D_1(J-1/2)+D_3(J+3/2)]^2$	$^NP_{13}$	$\frac{3(J-1/2)(J+3/2)}{2J}[D_1-D_3]^2$
$^PQ_{12}$	$\frac{3(J-1/2)}{J(J+1)}[D_1(J+1/2)+D_3(J+3/2)]^2$	$^OQ_{13}$	$\frac{3(J+1/2)}{J(J+1)}[D_1(J+1/2)-D_3(J-1/2)]^2$
$^QR_{12}$	$\frac{3(J-1/2)(J+3/2)}{2(J+1)}[D_1+D_3]^2$	$^PR_{13}$	$\frac{3}{2(J+1)}[D_1(J+3/2)-D_3(J-1/2)]^2$
$^PP_{22}$	$\frac{1}{2J}[D_1(J+3/2)-(D_2-D_3)(J-1/2)]^2$	$^OP_{23}$	$\frac{(J-1/2)(J+3/2)}{2J}[D_1+D_2-D_3]^2$
$^QQ_{22}$	$\frac{J-1/2}{J(J+1)}[D_1(J+3/2)+1/2D_2+D_3(J+1/2)]^2$	$^PQ_{23}$	$\frac{J+3/2}{J(J+1)}[D_1(J-1/2)-1/2D_2-D_3(J+1/2)]^2$
$^RR_{22}$	$\frac{(J-1/2)(J+3/2)}{2(J+1)}[D_1+D_2+D_3]^2$	$^QR_{23}$	$\frac{1}{2(J+1)}[D_1(J-1/2)-(D_2+D_3)(J+3/2)]^2$
$^QP_{32}$	$\frac{J-3/2}{2J(J+1/2)}[D_2(J+3/2)-D_4(J-1/2)]^2$	$^PP_{33}$	$\frac{(J-3/2)(J-1/2)(J+3/2)}{2J(J+1/2)}[D_2+D_4]^2$
$^RQ_{32}$	$\frac{J+3/2}{J(J+1)}[3/2D_2-D_4(J-1/2)]^2$	$^QQ_{33}$	$\frac{J-1/2}{J(J+1)}[3/2D_2+D_4(J+3/2)]^2$
$^SR_{32}$	$\frac{(J-1/2)(J+3/2)(J+5/2)}{2(J+1)(J+1/2)}[D_2+D_4]^2$	$^RR_{33}$	$\frac{J+5/2}{2(J+1)(J+1/2)}[D_2(J-1/2)-D_4(J+3/2)]^2$
$^RP_{42}$	$\frac{3(J-5/2)(J-3/2)(J+3/2)}{2J(J+1/2)}D_4^2$	$^QP_{43}$	$\frac{3(J-5/2)(J-3/2)(J+3/2)}{2J(J+1/2)}D_4^2$
$^SQ_{42}$	$\frac{3(J-3/2)(J+3/2)(J+5/2)}{J(J+1)}D_4^2$	$^RQ_{43}$	$\frac{3(J-3/2)(J-1/2)(J+5/2)}{J(J+1)}D_4^2$
$^TR_{42}$	$\frac{3(J+3/2)(J+5/2)(J+7/2)}{2(J+1)(J+1/2)}D_4^2$	$^SR_{43}$	$\frac{3(J-1/2)(J+5/2)(J+7/2)}{2(J+1)(J+1/2)}D_4^2$

Tabelle 5. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi\,(b) - {}^2\Pi\,(a)$-Banden.

Zweige	$^4\Pi\,(b) - {}^2\Pi\,(a)$
$^{O}P_{12}$	$\frac{3\,(J-5/2)\,(J-1/2)\,(J+1/2)}{8\,(J-1)\,J}\,[D_2 - D_4 - D_1 - D_3]^2$
$^{P}Q_{12}$	$\frac{3\,(J-3/2)\,(J+1/2)}{4\,J^2\,(J+1)}\,[1/2\,D_2 - D_4\,(J+3/2) + (D_1+D_3)\,(J+1/2)]^2$
$^{Q}R_{12}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{8\,(J+1)^2\,(J+1/2)}\,[D_2\,(J+1/2) + D_4\,(J+5/2) + (D_1+D_3)\,(J+1/2)]^2$
$^{P}P_{22}$	$\frac{J+1/2}{8\,J^2}\,[D_2\,(J+3/2) + D_4\,(J-9/2) - 3\,D_1\,(J-1/2) - D_3\,(J+3/2)]^2$
$^{Q}Q_{22}$	$\frac{[1/2\,D_2\,(J+5/2) + D_4\,(J-7/2)\,(J+3/2) + 3\,D_1\,(J+1/2)^2 + D_3\,(J+1/2)\,(J+5/2)]^2}{4\,J\,(J+1)^2}$
$^{R}R_{22}$	$\frac{[D_2\,(J+1/2)\,(J+7/2) - D_4\,(J-5/2)\,(J+5/2) + 3\,D_1\,(J+1/2)\,(J+3/2) + D_3\,(J+1/2)\,(J+7/2)]^2}{8\,(J+1)\,(J+2)\,(J+1/2)}$
$^{Q}P_{32}$	$\frac{[D_2\,(J-5/2)\,(J+1/2) - D_4\,(J-3/2)\,(J+7/2) + 3\,D_1\,(J-1/2)\,(J+1/2) - D_3\,(J-5/2)\,(J+1/2)]^2}{8\,(J-1)\,J\,(J+1/2)}$
$^{R}Q_{32}$	$\frac{[1/2\,D_2\,(J-3/2) - D_4\,(J-1/2)\,(J+9/2) - 3\,D_1\,(J+1/2)^2 + D_3\,(J-3/2)\,(J+1/2)]^2}{4\,J^2\,(J+1)}$
$^{S}R_{32}$	$\frac{J+1/2}{8\,(J+1)^2}\,[D_2\,(J-1/2) + D_4\,(J+11/2) - 3\,D_1\,(J+3/2) + D_3\,(J-1/2]^2$
$^{R}P_{42}$	$\frac{3\,(J-1/2)\,(J+3/2)}{8\,J^2\,(J+1/2)}\,[D_2\,(J+1/2) + D_4\,(J-3/2) + D_1\,(J+1/2) - D_3\,(J+1/2]^2$
$^{S}Q_{42}$	$\frac{3\,(J+1/2)\,(J+5/2)}{4\,J\,(J+1)^2}\,[1/2\,D_2 + D_4\,(J-1/2) - (D_1-D_3)\,(J+1/2)]^2$
$^{T}R_{42}$	$\frac{3\,(J+1/2)\,(J+3/2)\,(J+7/2)}{8\,(J+1)\,(J+2)}\,[D_2 - D_4 - D_1 + D_3]^2$

Tabelle 5 (Fortsetzung).

Zweige	$^4\Pi(b) - {}^2\Pi(a)$
$^NP_{13}$	$\frac{3(J-5/2)(J+1/2)(J+3/2)}{8(J-1)J}[D_2 - D_4 - D_1 - D_3]^2$
$^OQ_{13}$	$\frac{3(J-3/2)(J+1/2)(J+3/2)}{4J^2(J+1)(J-1/2)}[3/2 D_2 - D_4(J+5/2) + (D_1+D_3)(J-1/2)]^2$
$^PR_{13}$	$\frac{3[D_2(J-1/2)(J+5/2) + D_4(J+5/2)(J+7/2) + (D_1+D_3)(J-1/2)(J+1/2)]^2}{8(J+1)^2(J+1/2)}$
$^OP_{23}$	$\frac{(J+1/2)(J+3/2)}{8J^2(J-1/2)}[D_2(J-9/2) - 3D_4(J-5/2) + D_1(J+3/2) + 3D_3(J-1/2)]^2$
$^PQ_{23}$	$\frac{J+3/2}{4J(J+1)^2(J-1/2)}[3/2 D_2(J-7/2) - 3D_4(J-3/2)(J+5/2) - D_1(J-1/2)(J+5/2) - 3D_3(J-1/2)(J+1/2)]^2$
$^QR_{23}$	$\frac{J-1/2}{8(J+1)(J+2)(J+1/2)(J+3/2)}[D_2(J-5/2)(J+5/2) + 3D_4(J+5/2)(J+7/2) - D_1(J+1/2)(J+7/2) - 3D_3(J+1/2)(J+3/2)]^2$
$^PP_{33}$	$\frac{J+3/2}{8(J-1)J(J-1/2)(J+1/2)}[D_2(J-3/2)(J+7/2) + 3D_4(J-5/2)(J-3/2) - D_1(J-5/2)(J+1/2) + 3D_3(J-1/2)(J+1/2)]^2$
$^QQ_{33}$	$\frac{J-1/2}{4J^2(J+1)(J+3/2)}[3/2 D_2(J+9/2) + 3D_4(J-3/2)(J+5/2) + D_1(J-3/2)(J+3/2) - 3D_3(J+1/2)(J+3/2)]^2$
$^RR_{33}$	$\frac{(J-1/2)(J+1/2)}{8(J+1)^2(J+3/2)}[D_2(J+11/2) - 3D_4(J+7/2) + D_1(J-1/2) - 3D_3(J+3/2)]^2$
$^QP_{43}$	$\frac{3[D_2(J-3/2)(J+3/2) + D_4(J-5/2)(J-3/2) + (D_1-D_3)(J+1/2)(J+3/2)]^2}{8J^2(J+1/2)}$
$^RQ_{43}$	$\frac{3(J-1/2)(J+1/2)(J+5/2)}{4J(J+1)^2(J+3/2)}[3/2 D_2 + D_4(J-3/2) - (D_1-D_3)(J+3/2)]^2$
$^SR_{43}$	$\frac{3(J-1/2)(J+1/2)(J+7/2)}{8(J+1)(J+2)}[D_2 - D_4 - D_1 + D_3]^2$

Tabelle 6. Intensitätsverteilung in den $^4\Pi(b) - {}^2\Pi(b)$-Banden.

Zweige	$^4\Pi(b) - {}^2\Pi(b)$
$^OP_{12}$	$\frac{3(J-5/2)(J+1/2)^2}{4(J-1)J}[D_2 - D_4 - D_1 - D_3]^2$
$^PQ_{12}$	$\frac{3(J+1)(J-3/2)}{2J^2(J-1/2)}[D_2 - D_4(J+3/2) + (D_1+D_3)(J-1/2)]^2$
$^QR_{12}$	$\frac{3(J+3/2)}{4(J+1)^2(J+1/2)^2}\{[D_2(J-1/2) + D_4(J+5/2)](J+3/2) + (D_1+D_3)(J-1/2)(J+1/2)\}^2$
$^PP_{22}$	$\frac{\{D_2(J+3/2) + D_4[(J-1/2)(J+5/2)-1] - D_1[(J-1/2)(J+1/2)+1] - D_3(J-1/2)(J+3/2)\}^2}{J^2(J-1/2)}$
$^QQ_{22}$	$\frac{\{D_2[(J-1)(J+5)-9/4] - D_4(J+3/2)[(J-3/2)(4J+5)-2] - D_1(J-1/2)[(J+3/2)(4J+1)+3] - D_3(J-1/2)(J+1/2)(4J+7)\}^2}{8J(J+1)^2(J-1/2)(J+1/2)}$
$^RR_{22}$	$\frac{(J+2)(J-1/2)}{(J+1)(J+1/2)^2}[D_2 - D_4(J+5/2) + (D_1+D_3)(J+1/2)]^2$
$^QP_{32}$	$\frac{\{D_2[(J-1/2)^2(J+3/2)-4] + D_4(J-3/2)[(J-7/2)(J+1/2)-3] + D_1(J+1/2)[(J-1/2)^2+2] + D_3(J-1/2)(J+1/2)(J+7/2)\}^2}{4(J-1)J(J-1/2)(J+1/2)^2}$
$^RQ_{32}$	$\frac{(J+3)^2(J-1/2)}{2J^2(J+1)(J+1/2)}\left\{D_2 + D_4\left[(J-7/2) + \frac{6}{J+3}\right] - D_1\left[(J-3/2) + \frac{6}{J+3}\right] - D_3(J+1/2)\right\}^2$
$^SR_{32}$	$\frac{(J-1/2)(J+5/2)^2}{4(J+1)^2}[D_2 - D_4 - D_1 - D_3]^2$
$^RP_{42}$	$\frac{3(J+3/2)}{4J^2(J+1/2)^2}[D_2 + D_4(J-3/2) - (D_1 - D_3)(J-1/2)]^2$
$^SQ_{42}$	$\frac{3(J-1/2)(J+5/2)}{8J(J+1)^2}[D_2 - D_4 - D_1 + D_3]^2$
$^TR_{42}$	0

Tabelle 6 (Fortsetzung).

Zweige	$^4\Pi(b) - {}^2\Pi(b)$
${}^NP_{13}$	0
${}^OQ_{13}$	$\frac{3(J-3/2)(J+3/2)}{8J^2(J+1)}[D_2 - D_4 - D_1 - D_3]^2$
${}^PR_{13}$	$\frac{3(J-1/2)}{4(J+1)^2(J+1/2)^2}[D_2 - D_4(J+5/2) + (D_1+D_3)(J+1/2)]^2$
${}^OP_{23}$	$\frac{(J-3/2)^2(J+3/2)}{4J^2}[D_2 - D_4 - D_1 + D_3]^2$
${}^PQ_{23}$	$\frac{(J-2)^2(J+3/2)}{2J(J+1)^2(J+1/2)}\left\{D_2 + D_4\left[(J+9/2) + \frac{6}{J-2}\right] - D_1\left[(J+5/2) + \frac{6}{J-2}\right] + D_3(J+1/2)\right\}^2$
${}^QR_{23}$	$\frac{\{D_2[(J+3/2)^2(J-1/2)+4] + D_4(J+5/2)[(J+1/2)(J+9/2)-3] + D_1(J+1/2)[(J+3/2)^2+2] - D_3(J-5/2)(J+1/2)(J+3/2)\}^2}{4(J+1)(J+2)(J+1/2)^2(J+3/2)}$
${}^PP_{33}$	$\frac{(J-1)(J+3/2)}{J(J+1/2)^2}[D_2 + D_4(J-3/2) - (D_1 - D_3)(J+1/2)]^2$
${}^QQ_{33}$	$\frac{\{D_2[J(J+6) - 9/4] + D_4(J-1/2)[(J+5/2)(4J-1)-2] + D_1(J+3/2)[(J-1/2)(4J+3)+3] - D_3(J+1/2)(J+3/2)(4J-3)]\}^2}{8J^2(J+1)(J+1/2)(J+3/2)}$
${}^RR_{33}$	$\frac{\{D_2(J-1/2) - D_4[(J+1/2)(J+7/2)-1] + D_1[(J+1/2)(J+3/2)+1] - D_3(J-1/2)(J+3/2)\}^2}{(J+1)^2(J+3/2)}$
${}^QP_{43}$	$\frac{3(J-1/2)}{4J^2(J+1/2)^2}\{[D_2(J+3/2) + D_4(J-3/2)](J-1/2) + (D_1 - D_3)(J+1/2)(J+3/2)\}^2$
${}^RQ_{43}$	$\frac{3J(J+5/2)}{2(J+1)^2(J+3/2)}[D_2 + D_4(J-1/2) - (D_1 - D_3)(J+3/2)]^2$
${}^SR_{43}$	$\frac{3(J+1/2)^2(J+7/2)}{4(J+1)(J+2)}[D_2 - D_4 - D_1 + D_3]^2$

Das in dem ersten Teil näher geschilderte Verfahren führte zu Ergebnissen, die wir in den Tabellen 1 bis 6 wiedergeben[1]).

Von den in diesen Tabellen vorkommenden reellen Konstanten C_1, C_2, D_1, D_2, D_3, D_4 (ebenso wie die Größen A_1, A_2, B_1, B_2 in I) ist z. B. der absolute Wert von C_1, durch die Formel

$$|C_1| = |f_1 \int \Phi_0^* ({}^2\Pi_{3/2}) \eta \Phi_0 ({}^2\Sigma_{1/2}) \, d\tau + h_2 \int \Phi_0^* ({}^4\Pi_{3/2}) \eta \Phi_0 ({}^4\Sigma_{1/2}) \, d\tau|$$

gegeben. Es ist dabei

$$f_1 = \frac{\int \Phi_0^* ({}^2\Pi_{3/2}) H_1 \Phi_0 ({}^4\Pi_{3/2}) \, d\tau}{W ({}^4\Pi_{3/2}) - W ({}^2\Pi_{3/2})}.$$

Ein ähnlicher Ausdruck gilt für h_2.

Es wurde auch hier vorausgesetzt, daß der gegenseitige Abstand zweier Terme in den Nennern der Konstanten f_1, h_2 usw. im Termschema des Moleküls groß ist im Vergleich zu den Multiplettaufspaltungen der einzelnen Terme. Im anderen Falle wäre die Zahl der numerisch nicht näher anzugebenden Konstanten $C_1 \ldots D_4$ doppelt so groß.

Als eine allgemeine Eigenschaft der Quartett-Dublett-Banden ergibt sich, daß bei allen Übergängen (die in der Arbeit I behandelten inbegriffen), in welchen die beiden beteiligten Terme dem Hundschen Falle *b* angehören, Zweige mit $\Delta K = 3$ (${}^NP_{13}$ und ${}^TR_{42}$) fehlen und die Zweige ${}^RP_{42}$, ${}^SQ_{42}$, ${}^QQ_{13}$, ${}^PR_{13}$ von der Ordnung $1/J$ sind. Ist überdies unter den genannten Übergängen der *eine* Term ein Σ-Term, so sind auch die Zweige ${}^QQ$ von der Ordnung $1/J$. Alle anderen (nicht verschwindenden) Zweige sind von der Ordnung J.

Wir bemerken noch, daß bei den $\Pi - \Pi$-Übergängen im Falle der Vernachlässigung der Λ-Verdoppelungen wegen der Entartung der Π-Terme die Intensitäten der einzelnen Zweige in unseren Tabellen doppelt zu nehmen sind.

---

[1]) Hinsichtlich der Bezeichnung der Zweige werden die $\Pi(a)$-Terme überall als normal angenommen.

(Mitteilung aus dem Elektrophysikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule München.)

Die Steuerung von edelgasgefüllten Niederdruck-Bogenentladungen mit Hilfe eines Gitters im Plasma der Entladung*).

Von **E. Leimberger** in München.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 2. April 1941.)

Es werden Edelgas-Niederdruckbögen mittels positiver Raumladungsschichten am Gitter gesteuert. Im Falle der statischen Steuerung wird die Abhängigkeit der Löschspannung vom Entladungsdruck, Gittermaschenweite und Anodenbetriebsspannung gemessen, bei hochfrequenter Steuerung wird der Gitterspannungs-Anodenspannungsverlauf bei verschiedenen Drücken oszillographisch aufgenommen. Die Steuerung des Bogens ist nach höherem Druck zu begrenzt durch die Einschnürung des Bogens. Diese wird für den Fall der leicht und schwer ionisierbaren Gase besprochen. Die hochfrequente Leistungsverstärkung wird am Beispiel der He-Entladung gezeigt, wobei der für die Verstärkung optimale Druck bei zwei verschieden weitmaschigen Gittern ermittelt wird.

I. Einleitung und Versuchsanordnung.

Eine Sonde, deren Potential negativ gegenüber dem sie umgebenden Plasma ist, ist mit einem Raumladungsgebiet positiver Träger [Langmuir-Schicht[1])] umgeben. Dieses Raumladungsgebiet ist für die Elektronen des Plasmas, deren Voltgeschwindigkeit gering ist, undurchdringlich. Bringt man im Plasma der Entladung ein netzartiges Gitter an, so daß die Gitterebene senkrecht zur Strombahn der Entladung steht, so wird dieses Gitter im Prinzip sich wie eine Sonde verhalten. Bei negativem Gitter werden die am Gitter auftretenden Ionenschichten für die Elektronen des Plasmas eine Verengung des Entladungsquerschnittes darstellen.

Da die Dicke der positiven Raumladungsschichten von der Größe der negativen Gitterspannung abhängt, wird je nach deren Größe durch die Verengung des Entladungsquerschnittes auch eine Veränderung des Anodenstromes — kurz als Steuern bezeichnet — bzw. ein vollständiges Unterbrechen — mit Löschen bezeichnet — erreicht. H. Fetz[2]) hat vor kurzem eingehende Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge bei dieser

*) D 91.

[1]) J. Langmuir, Gen. Elektr. Rev. **27**, 449, 1924. — [2]) H. Fetz, Ann. d. Phys. **37**, 1, 1940.

Art der Bogensteuerung mittels Langmuir-Schichten vorgenommen. Da bisher nur Versuche an Quecksilber durchgeführt sind, war es das Ziel dieser Arbeit, die Untersuchungen an mehreren Gasen vorzunehmen, deren verschiedene elektrische Eigenschaften eine Erweiterung der bisher gewonnenen Vorstellungen über die physikalischen Vorgänge bei der Löschung und Steuerung ermöglichen.

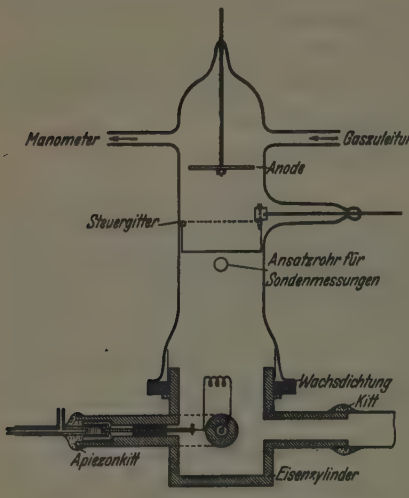


Fig. 1. Das Versuchsthyratron. Maße 1:4,5.

Die nachfolgenden Versuche erforderten ein Versuchsrohr, dessen Steuergitter leicht auswechselbar war. Fig. 1 gibt die verwendete Konstruktion wieder [1]).

II. Die statische Steuerung.

Vorversuche. Der Vorgang der Bogenlöschung sei kurz phänomenologisch für den Fall der Argonentladung beschrieben. Die Maschen des verwendeten Steuergitters sollen eine Öffnungsfläche von 1 mm² besitzen (10 M./cm), der Entladungsdruck soll zwischen $9 \cdot 10^{-3}$ und $4 \cdot 10^{-2}$ Torr liegen. Das Entladungsrohr liegt über einen (möglichst induktionsfreien) veränderlichen Außenwiderstand an der Anodenbetriebsspannung ($U_m = 400$ Volt).

Mit ansteigender negativer Gitterspannung stellen wir zunächst eine Zunahme der Anodenspannung U_A fest und eine Abnahme des Anodenstromes i_A. Dabei steigt die Anodenspannung, ausgehend vom Brennspannungswert der Entladung bei isoliertem Gitter $U_{A\,i} = 32$ Volt mit zunehmenden negativen Gitterspannungswerten bis zu einem Brennspannungswert $U_A = 100$ bis 120 Volt. Bei diesen Brennspannungswerten löscht die Entladung und die Anodenspannung nimmt den Wert der Betriebsspannung ($U_m = 400$ Volt) an. Wir beobachten ferner, daß mit zunehmender

[1]) Der Kathodenkörper und der Fuß des Glasgefäßes saßen zur Kühlung in einem strömenden Wasserbad. Emissionsfähigkeit der Oxydkathode etwa 2,5 Amp.

negativer Gitterspannung der Ioneneinstrom ins Gitter (Gitterstrom) ansteigt und seinen größten Wert kurz vor dem Löschen des Bogens erreicht.

Mit ansteigender Anodenspannung sieht man, daß die Plasmafarbe des Anodenraumes sich von dem unverändert rot-violett leuchtenden Kathodenraum durch ein graublaues Leuchten abhebt. Dabei ist die farbenmäßige Trennung der beiden Plasmaräume streng durch das Gitter gegeben. Diese veränderte Anregung des Anodenraumes ist ein Hinweis dafür, daß dem Anodenraum bei der Steuerung eine besondere Bedeutung zuzuschreiben ist.

Von den Untersuchungen an Hg [2]) ist bekannt, daß die Zunahme der Anodenspannung mit negativ werdendem Gitter identisch mit dem Aufbau einer elektrischen Doppelschicht ist, die der Bogen infolge der Verkleinerung des Entladungsquerschnittes durch die Ausbildung der Langmuir-Schichten aufbaut. Ebenso wie der Anstieg der Anodenspannung ist die oben beobachtete veränderte Anregung des Anodenraumes auf das Vorhandensein dieser Gitterdoppelschicht zurückzuführen, da die aus dem Kathodenraum in den Anodenraum eintretenden Elektronen durch diese nachbeschleunigt werden. Die Nachbeschleunigung der in den Anodenraum eintretenden Elektronen bewirkt im wesentlichen eine verstärkte Ionisation des Plasmas im Anodenraum, um so, rückwirkend auf die Dicke der Gitterschichten (nämlich dickenvermindernd), das Abreißen der Entladung zu verhindern.

Andererseits bewirkt das Entstehen der Doppelschicht und der damit verbundene Anodenspannungsanstieg eine Abnahme des Anodenstromes, da die Betriebsspannung U_m und der Außenwiderstand R_a bei der Steuerung konstant eingestellt bleiben. Dadurch nimmt aber die Trägerdichte im ganzen Bogenraum ab, so daß schließlich bei höheren Doppelschichtwerten die Nachionisation im Anodenraum nicht mehr ausreicht, um das Abreißen des Bogenstromes verhindern zu können.

Für die weitere Versuchsdurchführung ist zunächst die Frage von Bedeutung, welches Edelgas auf Grund seiner elektrischen Eigenschaften die günstigsten Verhältnisse bei der statischen Löschung aufweisen wird.

Im Falle einer negativen ebenen Sonde im Plasma ist die Beziehung zwischen Schichtdicke d, der Spannung U der Sonde gegenüber dem Plasma und dem bei dieser Spannung in die Sonde eintretenden Ionenstrom j^+ gegeben durch die Raumladungsformel (freie Weglänge des Gases $\gg d$):

$$U^{3/2} = 9 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{2e}} \cdot j^+ \cdot d^2.$$

[2]) H. Fetz, Ann. d. Phys. 37, 1, 1940.

Angenommen, daß die Raumladungsformel auch für die Gitterlöschung gültig ist, d. h. daß die Schichtdicke d angenähert durch die Gittermaschenweite vorgegeben ist, so ist die Druckabhängigkeit der Löschspannung im wesentlichen durch die Druckabhängigkeit der Trägerdichte j^+ bestimmt.

Die Ionenmasse M wird für alle Edelgase als praktisch druckunabhängig angenommen.

In Fig. 2 ist der positive Trägerstrom j^+, gemessen am ungesteuerten (gitterlosen) Bogen, mit He, Ne und Ar, Kr, Xe als Entladungsgas als

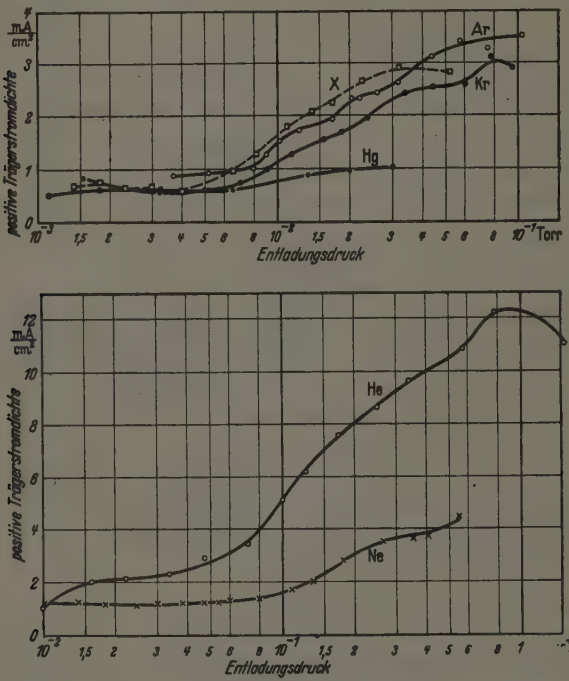


Fig. 2. Positive Trägerstromdichte j^+ in Abhängigkeit vom Entladungsdruck. Anodenstromstärke $i_A = 1{,}8$ Amp. Bogenentladung ohne Steuergitter.

Funktion des Druckes aufgetragen. Die j^+-Werte sind dabei auf das Plasmapotential extrapoliert (Sondenpotential = Plasmapotential).

Wir erhalten folgendes Ergebnis: Nach einem nahezu konstanten Verlauf im Bereich der niederen Drücke (He und Ne $10^{-2} < p < 10^{-1}$ Torr, Ar, Kr, Xe $10^{-3} < p < 10^{-2}$ Torr) steigt bei allen Edelgasen bei weiterer Zunahme des Gasdruckes die positive Trägerdichte um ein Vielfaches an.

Wie man aus gaskinetischen Überlegungen leicht ableiten kann, ist der positive — und ebenso der negative — Trägereinstrom ein Produkt aus der Plasmadichte N und der mittleren Trägergeschwindigkeit v^+:

$$j^+ = \tfrac{1}{4} e \cdot N \cdot v^+.$$

Um nun den Grund für die Zunahme des positiven Trägerstromes in seiner Abhängigkeit vom Entladungsdruck zu klären, müssen wir noch den einen der beiden Faktoren N oder v^+ in seiner Druckabhängigkeit in einem weiteren Diagramm darstellen. Die nachfolgenden Messungen wurden bei einer konstanten Stromstärke $i_A = 1{,}8$ Amp. ausgeführt, der Rohrquerschnitt betrug 23,8 cm² und somit die konstante gerichtete Stromdichte: $j_g = 75{,}5$ mA/cm².

Fig. 3 gibt die an Hand der Sondenmessungen bestimmten Trägerdichten N als Funktion des Entladungsdruckes wieder und aus deren Verlauf ersehen wir nun, daß

1. auch die Plasmadichte N aller Gase im niederen Druckgebiet (Helium, Neon, 10^{-2} bis 10^{-1} Torr und Xenon, Argon, Krypton, 10^{-3} bis 10^{-2} Torr) weitgehendst konstant bleibt und

2. daß im anschließenden Druckbereich mit zunehmenden Drücken ein Anstieg der Trägerdichte erfolgt. Der Verlauf der j^+-Werte in Fig. 2 und der der Trägerkonzentrationen in Fig. 3 läßt erkennen, daß der Anstieg der Trägerkonzentrationen, betrachtet über den gleichen Druckbereich etwas größer ist als die Zunahme des ungerichteten Trägerstromes j^+. Damit ist die j^+-Zunahme allein auf die Zunahme der Trägerkonzentration N zurückzuführen. Dementsprechend nimmt die mittlere Ionengeschwindigkeit v^+ bei zunehmenden Drücken in geringem Maße ab.

In Fig. 3 sind außer den Edelgaswerten noch die Ergebnisse einiger orientierender Quecksilberversuche mit aufgetragen [1]). Auch beim Quecksilberdampf steigt die Trägerdichte mit zunehmendem Druck an [der gemessene Druckbereich entspricht etwa einem Temperaturbereich von 20 bis 60° C [2])].

---

[1]) Diese Messungen wurden gesondert in einem zweiten Entladungsgefäß unter gleichen Versuchsbedingungen (gleiche Anodenstromdichte und gleiche Sondenanordnung wie bei den Edelgasmessungen) durchgeführt. Das Entladungsgefäß befand sich zur Einstellung des gewünschten Dampfdruckes in einem Wasserthermostaten. — [2]) Die an Quecksilber von H. Fetz vorgenommenen Sondenmessungen ergeben etwas höhere Trägerdichtenwerte, die *nahezu unabhängig vom Dampfdruck* sind. Die Druckunabhängigkeit ist vermutlich auf den geringen Abstand zwischen Meßsonde und Glühkathode seiner Anordnung zurückzuführen.

Für den gerichteten Stromfluß im Plasma und somit für die gesamte Entladungsstromstärke i_A ist die mittlere Geschwindigkeit v_g der Ladungsträger maßgebend

$$i_g = \frac{i_A}{F} = e \cdot N \cdot v_g,$$

F = Entladungsquerschnitt, i_g = gerichtete Trägerdichte. Da bei anwachsenden Drücken — entsprechend der Bewegungsgleichung von Langevin $v_g = C \cdot \frac{E}{p \cdot w_e}$ — die gerichtete Geschwindigkeit abnimmt (gegenüber der Druckabhängigkeit von λ_e ist die Druckabhängigkeit der mittleren

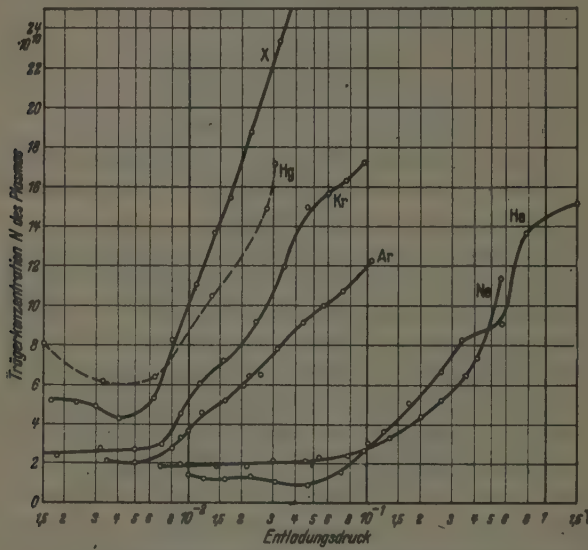


Fig. 3. Die Trägerkonzentration N des Plasmas im ungesteuerten Bogen in Abhängigkeit vom Entladungsdruck. Anodenstromstärke i_A = 1,8 Amp.

Elektronengeschwindigkeit w_e und des Plasmagradienten E in dem in Frage kommenden Druckgebiet zu vernachlässigen), so muß sich bei konstant gehaltener Entladungsstromstärke, d. h. konstantem i_g, die Trägerkonzentration N des Plasmas erhöhen. Dabei wird angenommen, daß sich die Stromdichteverteilung über den Rohrquerschnitt innerhalb des betrachteten Druckbereiches nicht wesentlich ändert.

Die Abhängigkeit der Löschspannungen von den Betriebsbedingungen. Die vorangegangenen Messungen des Trägereinstromes j^+ an Edelgasen

lassen erkennen, daß bei Helium die größte Druckabhängigkeit von j^+ auftritt, und daß Helium das am schwersten ionisierbare Gas darstellt.

Das Versuchsrohr wird deshalb zunächst mit Helium betrieben. Im Plasma der Entladung befindet sich das Steuergitter und es wird bei verschiedenen Entladungsdrücken die zum Löschen notwendige negative Gitterspannung, bezogen auf Kathodenpotential, festgestellt. Fig. 4 gibt die Löschspannungskurven am 8-M./cm-, 6-M./cm-, 10-M./cm- und 40-M./cm-Gitter wieder:

1. Bei gleichen Entladungsdrücken (d. h. $j^+ = \text{const}$) nimmt — wie erwartet — die Gitterlöschspannung U_{gL} mit abnehmender Gittermaschenweite ab.

2. Für ein bestimmtes Gitter ($d = \text{const}$) beobachtet man ein Ansteigen der Löschspannung bei zunehmendem Entladungsdruck. Diese Zunahme der Löschspannung ist auf zwei verschiedene Gründe zurückzuführen: Für die Bildung der Langmuir-Schichten ist maßgebend die positive Trägerdichte des Anodenplasmas *und* des Kathodenplasmas. Nach den vorangegangenen Messungen an den Edelgasen ist zu berücksichtigen, daß die Plasmadichte (wie auch der ungerichtete Ionenstrom) im Kathodenraum — und im ungesteuerten Zustand ebenso im Anodenraum — ohne eine Steuerwirkung allein durch die Erhöhung des Entladungsdruckes ansteigt.

Nach früheren Messungen [1]) steigt mit zunehmender negativer Gitterspannung als Folge der Gitterdoppelschicht die Trägerdichte des Anodenplasmas an und erreicht vor dem Löschen des Bogens durchwegs ein Vielfaches ihres Betrages gegenüber dem ungesteuerten Zustand. Die Intensität dieser zusätzlichen Ionisation ist um so größer, je größer der Entladungsdruck ist.

3. Der Druckbereich, innerhalb dessen der Bogen noch durch eine bestimmte negative, statisch angelegte Gitterspannung löschbar ist, liegt bei um so höheren Gasdrucken, je engmaschiger das Gitter ist. (d-Verringerung erfordert für konstantes U eine j^+-Zunahme, p-Zunahme.) Die Löschspannungskurven zeigen am Beispiel des Heliums, als einem Gas mit sehr kleiner Ionisierungsausbeute, besonders deutlich, wie weit die Löschdruckbereiche bei verschiedenmaschigen Gittern auseinanderliegen können.

An dem Verlauf der Löschspannungskurven ist noch bemerkenswert das Ergebnis, daß die Gitterlöschspannung um so weniger vom Druck abhängig wird, je engmaschiger das Steuergitter ist. So kann man z. B. die Löschspannungskurve des 40-Maschengitters im Falle des Helium als

[1]) Vgl. Anmerkung 2, S. 621.

nahezu druckunabhängig bezeichnen. Einen den Heliummessungen durchaus analogen Verlauf weisen auch die Löschspannungen für Argon als Entladungsgas auf (Fig. 4), also bei Verwendung eines relativ leicht ionisier-

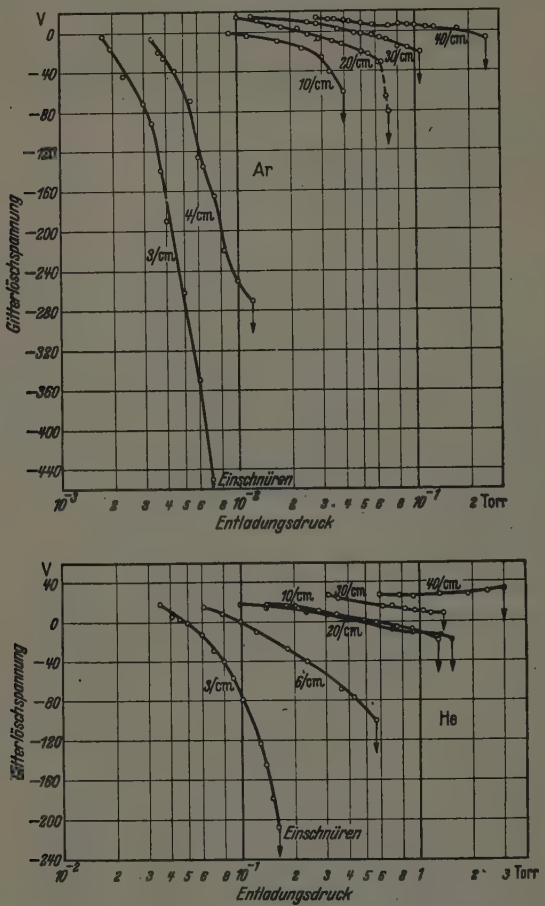


Fig. 4. Statische Gitterlöschspannungen in Abhängigkeit vom Entladungsdruck für Helium und für Argon als Entladungsgas. Entladungsstromstärke $i_A = 1{,}8$ Amp.

baren Gases. Nur ist das „Abflachen" der Löschspannungskurven nicht so ausgeprägt wie bei Helium. Entsprechend der zunehmenden Druckunabhängigkeit der Löschspannung weist auch der Gitterlöschstrom (Gitter-

strom kurz vor dem Abreißen der Entladung) ein langsameres Ansteigen nach höheren Drucken zu auf. Die Größe der Löschspannung wird wesentlich *mit* bestimmt von der maximalen Dichte, die das Plasma des Anodenraumes durch Nachionisieren beim Steuern erreicht.

Dabei ist anzunehmen, daß die maximale Plasmadichte im Anodenraum — abgesehen von den elektrischen Konstanten des Versuchsgases, wie z. B. Ionisierungsspannung — usw. abhängt vom Gasdruck p der Entladung und von der Geschwindigkeit v_p der Elektronen, mit der diese infolge der beschleunigenden Wirkung der Doppelschicht in den Anodenraum gelangen. Dabei ist die Geschwindigkeit v_p der in den Anodenraum eintretenden Elektronen kurz vor dem Löschen des Rohres bestimmt durch den maximalen Wert der Gitterdoppelschichtspannung ΔU_p, den wir annähernd als die Differenz aus der Anodenabreißspannung U_{AL} und der ungestörten Anodenspannung U_{Ai} des Rohres bei isoliertem Gitter messen. Für den Fall, daß das Plasmapotential des Bogens innerhalb des Löschdruckbereiches des verwendeten Gitters sich nur wenig ändert, genügt es als ungestörte Anodenspannung U_{Ai} des Rohres, die Anodenspannung bei höheren Drücken (z. B. nahe des Einschnürdruckes) zugrunde zu legen, und zwar deshalb bei höheren Drücken, da das isolierte Gitter im niederen Löschdruckbereich des Gitters von sich aus durch die umgebende Langmuir-Schicht eine Erhöhung der Anodenspannung bewirkt.

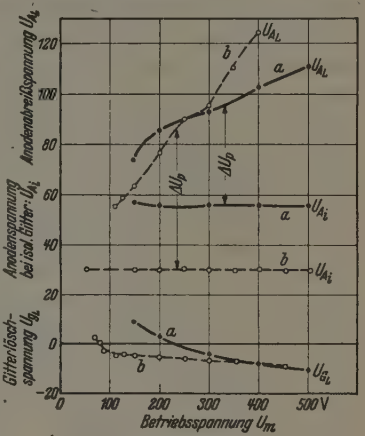


Fig. 5. Gitterlöschspannung U_{gL} in Abhängigkeit von der Anodenbetriebsspannung U_m bei konstantem Entladungsdruck. Gittermaschenweite 20 M./cm.
a) Entladungsgas mit relativ geringer Ionisierungsausbeute: Helium, $p = 0{,}7$ Torr;
b) Entladungsgas mit großer Ionisierungsausbeute: Krypton, $p = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Torr.

Bei *konstantem Entladungsdruck* wird die *Abhängigkeit der Löschspannung* U_{gl} von der Größe der Gitterdoppelschicht ΔU_p dadurch gemessen, daß das Entladungsrohr mit verschiedenen Betriebsspannungen U_m betrieben wird. Dabei wird durch Veränderung des Außenwiderstandes der Entladungsstrom ($i_A = 1{,}8$ Amp.) im ungesteuerten Zustand konstant gehalten. Aus Fig. 5 ist ersichtlich, daß die U_m-Abhängigkeit (ΔU_p-Ab-

hängigkeit) der Löschspannung sowohl bei Helium wie bei Krypton nach niedrigen U_m-Werten zu größer wird. Das erklärt sich aus dem Verlauf der differentialen Ionisierungskurve für Gase[1]), da die Ionisierungsfähigkeit der Elektronen für Helium — als einem schwer ionisierbaren Gas — bei Beschleunigungsspannungen von etwa 30 Volt abwärts, für Krypton — als einem relativ leicht ionisierbaren Gas — bei Spannungen von etwa 20 Volt abwärts, eine merkliche Abnahme erfährt.

Bei der Diskussion der Fig. 4 wurde darauf hingewiesen, daß der Verlauf der Löschspannungskurve beim Übergang zu engmaschigen Gittern (Heliumdrücke über 1 Torr, Argondrücke über 0,1 Torr) nahezu druckunabhängig

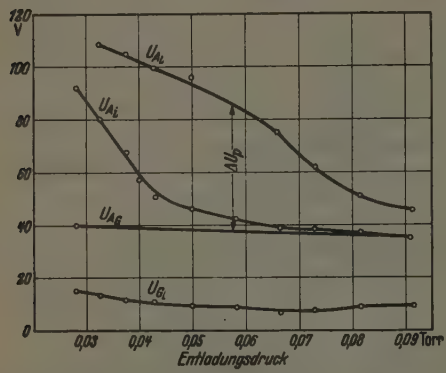


Fig. 6. Die Druckabhängigkeit der maximalen Gitterdoppelschicht-Spannung ΔU_p (Doppelschicht-Spannung beim Abreißen der Bogenentladung) im Bereich hoher Entladungsdrücke (en g maschiger Steuergitter). Versuchsbeispiel: Gittermaschenweite 40 Maschen prc cm, Versuchsgas: Argon. U_{GL} = Gitterlöschspannung, U_{AG} = Brennspannung des Bogens bei mit Anode verbundenem Gitter, U_{Ai} = Brennspannung des Bogens bei isoliertem Gitter, U_{AL} = Anodenspannung beim Abreißen der Entladung.

wird. Zu dieser Erscheinung geben die Daten des in Fig. 6 dargestellten Argonversuches weiteren Aufschluß. Über den Löschspannungswerten des 40-Maschengitters sind noch die entsprechenden Spannungswerte ΔU_p aufgetragen, die die Doppelschicht unmittelbar vor dem Abreißen der Entladung erreicht. Der Verlauf dieser ΔU_p-Werte weist nun eine Abnahme nach ansteigenden Drücken auf. Die ΔU_p-Verringerung hat zur Folge, daß die Elektronen mit geringerer Geschwindigkeit aus dem Kathodenraum in den Anodenraum eintreten und diese Tatsache spricht dafür, daß trotz des anwachsenden Entladungsdruckes die Nachionisation beim Steuern erschwert und das Löschen des Bogens damit erleichtert wird. Aus der Druckabhängigkeit der positiven und negativen Trägerstromdichte j^+ und j^- im ungesteuerten Bogen kann man annehmen, daß die Dicke der Doppelschicht in geringerem Maße druckabhängig ist als die freie Weglänge der Elektronen. So läßt sich die Abnahme der Doppelschichtspannung

[1]) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen, Bd. 1, S. 35.

nach höheren Drücken zu vielleicht dadurch erklären, daß die Elektronen auf ihrem Weg durch die beschleunigende Doppelschicht in steigendem Maße unelastische (anregende und ionisierende) Stöße erleiden und so, abgesehen von der Rückwirkung auf das elektrische Feld innerhalb der Schicht, mit verringerter Geschwindigkeit in den Anodenraum gelangen [1]). Damit würde auch die Fähigkeit der Elektronen, im Anodenraum zu ionisieren, geringer werden, so daß beim Löschen sich die Anodenabreißspannung (und damit ΔU_p) erniedrigt.

Für diese Annahme spricht auch die Beobachtung der Plasmafarbe des Anodenraumes beim Löschen des Heliumbogens in verschiedenen Gitter- (bzw. Druck-) Bereichen. Bei niedrigen Heliumdrücken, z. B. im Löschbereich des 3-Maschengitters, sendet das Plasma des Anodenraumes beim Steuern mit zunehmender negativer Gitterspannung, vom gelb-orangen Leuchten ausgehend, immer mehr ein grünes Leuchten aus, was darauf zurückzuführen ist, daß der Anodenraum durch die raschen Elektronen beim Steuern stärker angeregt wird als das Plasma des Kathodenraumes. Mit engmaschigen Gittern (10, 20 und 40 Maschen) zeigt sich dann, daß das grüne Leuchten des Anodenplasmas beim Steuern mit zunehmenden Drücken zurückgeht und das gelb-orange Leuchten (ebenso wie der Kathodenraum) aussendet.

Die Löschspannungswerte in Abhängigkeit vom Entladungsgas. Nach der ebenen Sondenformel $U^{3/2} = 9 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{2\,e}} \cdot j^+ \cdot d^2$ ist die Größe der negativen Gitterspannung auch von der Ionenmasse m_p abhängig. Ist $\sqrt{m_p}$ zweier Gase sehr verschieden, so wäre bei gleichem Gittereinstrom j^+ und bei gleicher Gittermaschenweite für das Entladungsgas mit kleinerem Atomgewicht auch eine geringere Löschspannung zu erwarten. Fig. 7 gibt die für ein 20-M./cm-Gitter erforderlichen Löschspannungen in einer Xenon-,

[1]) Für die ebene Doppelschicht gilt — unter der Voraussetzung der raumladungsbegrenzten Nachlieferung der Träger — die bekannte Beziehung:

$$j^{+(-)} = \frac{9}{16 \cdot \pi} \sqrt{\frac{2\,e}{M\,(m)}} \cdot \frac{(\Delta U_p)^{3/2}}{d^2}.$$

Die Versuchswerte für Helium bei 1 Torr Entladungsdruck (positive Trägerstromdichte $j^+ = 12$ mA/cm² und eine durchschnittliche Doppelschichtspannung $\Delta U_p \approx 50$ Volt) eingesetzt, ergeben eine Schichtdicke $d \approx 0{,}7$ mm und für Argon bei 0,1 Torr ($j^+ = 3{,}5$ mA/cm²; $\Delta U_p \approx 50$ Volt) eine Schichtdicke $d \approx 0{,}7$ mm. Die so errechneten Schichtdicken stimmen größenordnungsmäßig mit den freien Elektronenweglängen überein: für eine Elektronengeschwindigkeit entsprechend einer Beschleunigungsspannung von 50 Volt beträgt die freie Weglänge in Helium bei 1 Torr etwa 0,8 mm und in Argon bei 0,1 Torr etwa 0,3 mm.

Krypton-, Argon- und Heliumentladung wieder. Die Versuche sind am gleichen Entladungsgefäß und bei gleichem Entladungsstrom i_A ausgeführt worden. Die Ergebnisse lehren nun, daß trotz des großen Massenunterschiedes ($\sqrt{m_{He}} = 2$, $\sqrt{m_{Xe}} = 11{,}4$) die Löschspannungswerte zwischen Helium und Xenon sich kaum unterscheiden. Der Unterschied zwischen

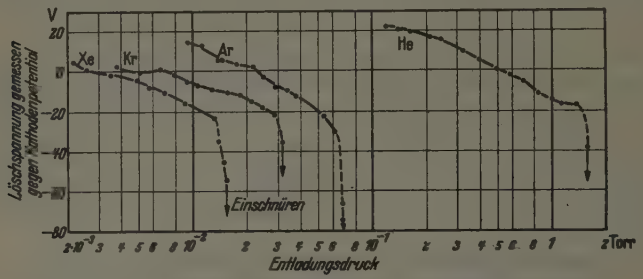


Fig. 7. Druck-Löschspannungsverlauf des 20-Maschengitters für Helium, Argon, Krypton und Xenon als Entladungsgas.

den einzelnen Löschspannungskurven besteht darin, daß sie in verschiedenen Druckgebieten verlaufen. Darin liegt aber auch die Begründung für den geringen Löschspannungsunterschied: der größere positive Trägereinstrom j^+ bei Helium kompensiert den Einfluß der Ionenmasse.

III. Die Löschung durch hochfrequente Spannungen.

Bei der Steuerung durch hochfrequente Gitterspannungen kommt zu dem bisher allein betrachteten Vorgang der Löschung noch die Wiederzündung des Bogens hinzu. Fig. 8 gibt den oszillographisch aufgenommenen Gitterspannungs-Anodenspannungsverlauf am 20-M./cm-Gitter mit Helium als Entladungsgas wieder. An den horizontalen Ablenkplatten (Abszisse) des Braunschen Rohres liegt die steuernde Gitterspannung, an den vertikalen (Ordinate) die gesteuerte Anodenspannung. Die Steuerfrequenz betrug immer $1{,}5 \cdot 10^6$ Hz, außer der Wechselspannung konnte dem Gitter noch eine Gleichspannung überlagert werden. Daß die Werte der Löschspannungen bei diesen Frequenzen noch nicht erheblich von denen der statischen Löschung abweichen, zeigt Tabelle 1, die die hochfrequenten Löschspannungswerte — den Oszillographenaufnahmen entnommen — mit den statischen Löschwerten vergleicht. Beiden Meßreihen liegt das 20-Maschengitter zugrunde. Bei der hochfrequenten Löschung ist diejenige Gitterspannung angenähert als Löschspannung bezeichnet, bei der die Anodenspannung auf 100 Volt angestiegen ist. Die bei den statischen

Versuchen gemessene Abhängigkeit der Löschspannung vom Entladungsdruck und von der Maschenweite gilt auch für die hochfrequente Löschung. Beim Löschen im mittleren Druckbereich des 20 M./cm-Gitters, $p = 0{,}3$ Torr (Fig. 8) steigt mit dem Anlegen der negativen Gitterspannung die Anodenspannung U_A bis etwa $^4/_5$ des Wertes der Betriebsspannung U_m (im vorliegenden Falle 220 Volt) rasch an. Bei vollkommener Löschung des Rohres

Fig. 8. Gitterspannungs-Anodenspannungs-Diagramm. Frequenz der Gitterwechselspannung $n = 1{,}5 \cdot 10^6$ Hertz. Entladungsdruck $p = 0{,}3$ Torr, Entladungsgas: Helium. Anodenstrom im ungesteuerten Zustand (Anodenruhestrom) $i_A = 1{,}5$ Amp. Gittermaschenweite: 20 M./cm.

muß die Anodenspannung den Wert der Betriebsspannung erreichen. Dieser Zustand tritt aber erst ein, wenn das Rohr vollkommen entionisiert ist [1]). An den ersten Löschspannungsanstieg anschließend beginnt dann die lang-

Tabelle 1.

Torr Entladungsdruck		0,18	0,19	0,25	0,35	0,74	1,03	1,97	3,25
Hochfrequente Löschspannung (Volt)	gemessen gegen Kathodenpot.	+ 20	+ 20	+ 0	− 8	− 15	− 22	− 27	− 18
	gemessen gegen Plasmapotential	− 20	− 20	− 40	− 48	− 55	− 62	− 67	− 58
Statische Löschspannung (Volt)	gemessen gegen Kathodenpot.	+ 14	+ 14	+ 10	+ 6	− 8	− 12	Einschnürung	
	gemessen gegen Plasmapotential	− 26	− 26	− 30	− 34	− 48	− 52		

[1]) G. Wehner, ZS. f. techn. Phys. 21, 53, 1940.

samer verlaufende Entionisierung des Rohres, angedeutet im Löschdiagramm durch den nahezu horizontal verlaufenden Löschast. Durch die Entionisierung erreicht die Anodenspannung fast den vollen Wert der Anodenbetriebsspannung. Nimmt die Gitterspannung beim Rücklauf wieder positivere Werte an, so zündet schließlich der Bogen wieder durchs Gitter. Nach hohen Drücken zu macht sich im U_g-U_A-Diagramm wieder die Zunahme der positiven Trägerdichten (besonders bei Helium) insofern bemerkbar, als die Anodenspannung zu Beginn der Steuerung nahezu unabhängig von der Gitterspannung verläuft und erst ansteigt, nachdem das Gitter größere negative Spannungen angenommen hat.

IV. Das Einschnüren des Bogens bei statischer und bei hochfrequenter Steuerung.

Nach höheren Drücken zu ist beim Löschen eine obere Druckgrenze (kritischer Druck) dadurch gegeben, daß der Bogen durch keine (wenn auch noch so große) Gitterspannung mehr löschbar ist. Versucht man bei einem Entladungsdruck, der über diesem kritischen Druck liegt, den Bogen zum Löschen zu bringen, so bemerkt man, wie sich das Plasma der Entladung auf einen Teil des Gitters konzentriert, bis schließlich bei weiterer negativer Gitterspannung die Entladung einschnürt und dabei meistens durch ein Gitterloch zur Anode brennt.

An Helium, als einem Gas mit kleiner Ionisierungsausbeute, wird festgestellt, daß für die weiten Gitter (2, 3, 4, 6 M./cm) der statische Einschnürvorgang ähnlich wie bei Quecksilber verläuft.

So findet z. B. das Einschnüren beim 6-M./cm-Gitter, He, bei einem Druck von 0,55 Torr statt und bei einer negativen Gitterspannung von etwa 100 Volt, bezogen auf Kathode. Dabei steigt mit negativer Gitterspannung die Anodenspannung von 45 Volt (Brennspannung bei isoliertem Gitter) bis etwa 100 Volt an und springt im Augenblick des Einschnürens auf 60 Volt zurück. Im Zustand des Einschnürens brennt die gesamte Entladung durch ein Gitterloch zur Anode. Die erhöhte Brennspannung von 60 Volt im eingeschnürt brennenden Zustand gegenüber der ungestörten Brennspannung von 45 Volt ist, abgesehen von einer an der Einschnürstelle vorhandenen geringen Doppelschichtspannung, auch durch den erhöhten Trägerverlust mit bedingt (Wandwirkung) als Folge der starken Trägerkonzentration an der Einschnürstelle des Gitters.

Beim Übergang zu engen Gittern (10, 20, 40 M./cm) brennt der Bogen im eingeschnürten Zustand nicht mehr durch *ein* Gitterloch, sondern es konzentriert sich die Entladung auf einen Teil des Rohrquerschnittes, und zwar wird der Entladungsquerschnitt um so enger, je negativer die Gitter-

spannung wird. Die Verengung des Entladungsquerschnittes ist außer am verstärkten Leuchten des Plasmas am Gitter noch dadurch erkenntlich, daß der vom Bogen bevorzugte Querschnittanteil des Gitters zu glühen beginnt (das negative Gitter entzieht der Entladung rund 0,8 Amp. Ionenstrom). Mit ansteigendem negativen Gitterpotential steigt die Anodenspannung (im vorliegenden Falle des 10-Maschengitters) von etwa 50 bis 110 Volt an und brennt mit dieser Spannung dann im eingeschnürten Zustand durchs Gitter. Ein Zusammenbrechen der Doppelschicht, wie im Falle des Quecksilberbogens oder der weitmaschig gesteuerten Heliumbögen, ist am Verlauf der Anodenspannung nicht mehr zu beobachten. Bei den durchgemessenen Edelgasen und bei allen Gitterweiten war der Übergang vom löschbaren Druckbereich des Gitters zum Einschnürdruck stetig, und zwar kündigte sich sozusagen das Einschnürgebiet vorher in einem kleinen Druckintervall an. In diesem Gebiet (z. B. 6-M./cm-Gitter, Helium, $0{,}33 < p < 0{,}6$) ist der Bogen zwar noch löschbar, aber Löschspannung und Löschstrom steigen mit zunehmendem Druck rasch an.

Beispielsweise macht sich im Falle der engmaschigen Gitter (20 M./cm) bei den Gasen Xenon und Krypton das Übergangsgebiet vor dem Einschnüren durch folgende Plasmaerscheinung bemerkbar: Mit negativ werdendem Gitter bildet sich an der der Kathode zugewandten Gitterseite von einer bestimmten Gitterspannung an eine Plasmakugel (im vorliegenden Beispiel des 20-M./cm-Gitters, Xenon, bei -3 Volt gegen Kathode gemessen, $p = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ Torr, $i_A = 1{,}8$ Amp.). Diese Plasmakugel ist nach den Ergebnissen der Einschnürungsversuche an Quecksilber [1]) als die tropfenförmig zum Kathodenraum durchgebogene elektrische Doppelschicht zu deuten. Wird die Gitterspannung negativer, so bildet sich bei -16 Volt noch eine zweite Plasmakugel am Gitter aus und erst bei einer weiteren Erhöhung der Gitterspannung gelingt es, den Bogen zum Löschen zu bringen. Der steile Anstieg der Löschspannung im Übergangsgebiet (Fig. 7) ist nun gerade auf die Ausbildung dieser Plasmasäcke am Gitter zurückzuführen, da an diesen einzelnen Gitterstellen die Plasmadichte stark erhöht wird und für die Löschspannung die Stellen maximaler Trägerdichte ausschlaggebend sind.

Bei den Heliumbögen mit engmaschigen Gittern kündigt sich das endgültige Einschnüren dadurch an, daß der Entladungsquerschnitt des Plasmas mit ansteigender Gitterspannung sich immer mehr verengt, so daß dadurch die Löschspannung erheblich ansteigt.

---

[1]) H. Fetz, a. a. O.

Ebenso wie die Löschspannung U_{gL} ist auch *der Einschnürdruck von der Betriebsspannung* U_m *abhängig*, da ja die Größe der Betriebsspannung den maximalen Spannungswert der Doppelschicht und somit die Ionisation im Anodenraum beim Abreißen der Entladung bestimmt. Im Falle der schwer ionisierbaren Gase, z. B. Helium, kann bei kleiner Betriebsspannung U_m und bei hohen Entladungsdrücken erreicht werden, daß ein Einschnüren des Bogens nicht mehr zustande kommt.

Ein Versuch mit dem 30-M./cm-Gitter und Helium als Entladungsgas zeigt, daß noch vollständiges Einschnüren mit der Betriebsspannung $U_m = 400$ Volt bei 1,5 Torr erreicht wird; dagegen nimmt im Falle der

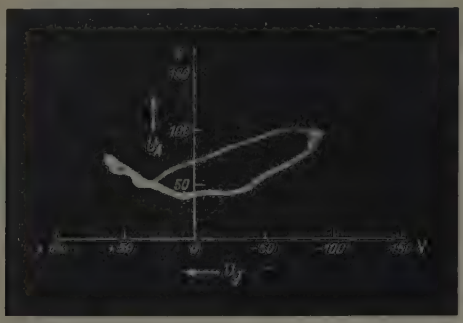


Fig. 9. Gitterspannungs-Anodenspannungs-Verlauf bei hohen Entladungsdrücken. Gasdruck $p = 4$ Torr (Einschnürbereich). Steuerfrequenz $n = 1{,}5 \cdot 10^6$ Hertz. Anodenruhestrom $i_A = 1{,}8$ Amp. Steuergitter: 20 M./cm.

Betriebsspannung $U_m = 110$ Volt die Löschspannung mit ansteigendem Entladungsdruck sogar etwas ab (von $p = 1$ Torr bis $p = 2$ Torr um etwa 3 bis 4 Volt). Bei der Steuerung mit dem 4-M./cm-Gitter schnürt die Entladung im Falle der Betriebsspannung $U_m = 400$ Volt bei einem Druck von 0,2 Torr, mit $U_m = 110$ Volt erst bei 0,35 Torr ein.

Bei der Steuerung mit *hochfrequenten Gitterspannungen* ist ein vollständiges *Einschnüren* erst bei zwei- bis dreimal höheren Drücken als bei der statischen Löschung festzustellen.

Dabei ließen oszillographische Aufnahmen (an Helium) erkennen, daß der Zustand des Einschnürens sich kontinuierlich aus dem Löschzustand entwickelt. Die Steigerung des Entladungsdruckes bewirkt eine immer geringere Entionisierung des Bogens, was in den Diagrammen dadurch wiedergegeben ist, daß der negative Löschast und der Zündast sich immer mehr nähern, bis man schließlich — die Hysterese der Kurve deutet immer

noch auf eine geringe Entionisierung des Bogens hin - den Bogen als weitgehendst eingeschnürt ansprechen kann (Fig. 9). Der Verlauf der Anodenspannung entspricht dabei im Prinzip dem Verlauf der statischen Einschnürung (He 20 M./cm). Das Ansteigen und das Zurückgehen der Anodenspannung verlaufen vollkommen stetig. Auch an weitmaschigen Gittern 3 M./cm wurde — abweichend von den statischen Messungen — bei der Steuerfrequenz $1{,}5 \cdot 10^6$ Hz ein Zurückspringen der Anodenspannung auf einen niederen Brennspannungswert nicht mehr beobachtet. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß bereits bei diesen kurzen Steuerzeiten die Plasmadichte im Anodenraum nicht mehr genügend stark anwachsen kann, um ein Zusammenbrechen der Gitterdoppelschicht zu erreichen.

V. Die Leistungsverstärkung.

Die Versuchsanordnung. Fig. 10 gibt die verwendete Versuchsanordnung mit dem zu steuernden Versuchsrohr wieder. Der Spannungsabfall am

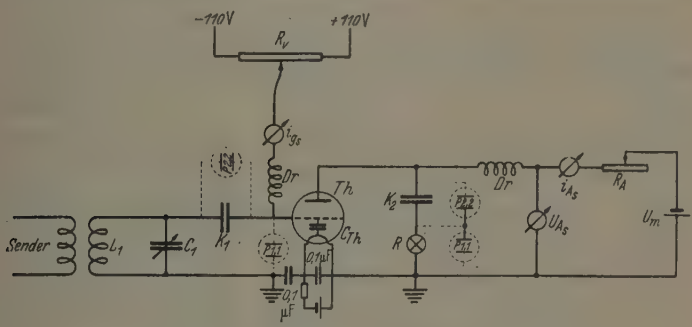


Fig. 10. Schaltbild für die Leistungsverstärkung.
K_1, $K_2 \approx 500$ pF (verlustfreie Kapazität), $R \sim 60$ Watt Glühlampe.

Meßkondensator K_1 und die Wirkkomponente der zwischen Gitter und Kathode liegenden Spannung an die Ablenkplatten des Braunschen Rohres gelegt, ergeben nach der bekannten Meßmethode eine Lissajoussche Figur, deren Flächeninhalt ein Maß für die im Gitterkreis zum Steuern notwendige Wirkleistung N_g ist. Ebenso wird an K_2 und R die gesteuerte Anodenleistung N_w bestimmt.

Dem Entladungsrohr wird gitterseitig zur Steuerung nach Möglichkeit immer die gleiche Steuerleistung N_g zugeführt. Dadurch wird, je nach dem Entladungsdruck, die gesteuerte Anodenleistung (Anodenwechselleistung) N_w verschiedene Werte annehmen und der Quotient der beiden Leistungsverhältnisse, das Verstärkungsmaß $q = N_g/N_w$, wird dann in seiner Ab-

hängigkeit vom Entladungsdruck — allerdings nur in erster Näherung — den günstigsten Betriebsdruck erkennen lassen.

Versuchsergebnisse. In Fig. 11 ist für ein 20-M./cm-Gitter und ein 3-M./cm-Gitter mit Helium als Entladungsgas der Leistungsquotient N_g/N_w als Funktion des Entladungsdruckes aufgetragen. Die am Potentiometer vom Netz entnommene *Gittergleichspannung* wurde bei jeder Messung so eingestellt, daß sich ein optimales Verstärkungsverhältnis q (da N_g = const, also gleichbedeutend mit maximalem N_w) ergab. Bei beiden Gittern tritt ein für die Steuerung günstiger Druckbereich auf [1]).

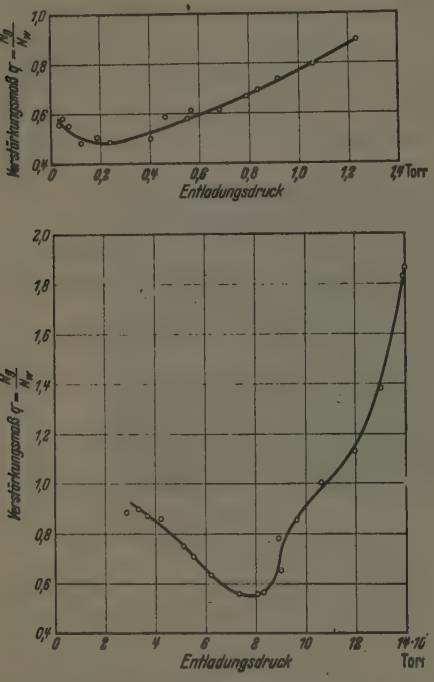


Fig. 11. Leistungsverstärkung q (Gittersteuerleistung N_g : Anodenwechselleistung N_w) in Abhängigkeit vom Entladungsdruck.

Ist der Entladungsdruck höher als der optimale Druck, so kann wegen der zunehmenden Löschspannungen und Löschströme mit der vorgegebenen Gitterleistung die Anodenspannung und der Anodenstrom nicht mehr vollständig ausgesteuert werden, weshalb N_w mit zunehmendem Druck abnimmt und q zunimmt. Ist der Entladungsdruck kleiner als der optimale Druck, so nimmt q wegen der Erhöhung der niedrigsten Anodenspannung U_0, die der Bogen beim Durchgang der positiven Halbwelle am Gitter erreichen

[1]) Den Messungen in Fig. 11 ist noch hinzuzufügen, daß die verhältnismäßig geringe Leistungsverstärkung vom Faktor 2 beim optimalen Druck durch die für die Leistungsmessung notwendige Schaltanordnung bedingt ist. Denn der Meßkondensator K_2 stellt einen relativ hohen Hochfrequenzwiderstand dar. Eine zehnfache Leistungsverstärkung war für die Betriebsspannungen von 500 bis 800 Volt ohne weiteres zu erreichen, wenn die Meßkapazität durch eine entsprechend hohe Blockkapazität (etwa 1 μF) ersetzt wurde.

kann, ebenfalls zu. U_0 ist zunächst einmal vom Druck abhängig, da sich bei vermindertem Druck ein Anodenspannungsanstieg allein durch eine Zunahme des Plasmagradienten und durch eine Vergrößerung des Kathodenfalles bemerkbar macht.

Von größerem Einfluß auf den minimalen Wert der Anodenspannung U_0 ist die momentane *Gitterspannung*, besonders bei engmaschigen Steuergittern und gleichzeitig niedrigen Entladungsdrücken. Denn in diesem Falle macht sich bei isoliertem Gitter bereits die Wirkung der Langmuir-Schichten auf die Anodenspannung erheblich bemerkbar. Der niedrigste momentane Anodenspannungswert, der sich dann bei der Steuerung erreichen läßt, hängt von der Größe der positiven Spannungen ab, die mit der positiven Halbwelle ans Gitter gelangen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Größe der Gittervorspannung außerdem die Zeitdauer des brennenden Zustandes t_1 und des gelöschten Zustandes t_2 des Bogens festlegt und daß dieses Verhältnis den Verstärkungsgrad q mit bestimmt.

Aus den nachfolgenden Daten geht hervor, inwieweit die Gittervorspannung bei einem bestimmten Entladungsdruck die Verstärkung q beeinflußt.

Tabelle 2. Beispiel: Helium, 3 M./cm, $U_m = 400$ Volt, $i_A = 1{,}5$ Amp., U_{gs} = Gittergleichspannung im gesteuerten Zustand, i_{gs} = Mittelwert des Gittergleichstromes im gesteuerten Zustand.

$p = 0{,}06$ Torr	U_{AS} (Volt)	i_{AS} (Amp.)	U_{gs} (Volt)	i_{gs} (Amp.)	q
(Mittlerer Druckbereich)	120	1,27	− 2,2	+ 0,215	1,1
	123	1,24	− 8,8	+ 0,175	1,0
	155	1,09	− 18,4	+ 0,1	0,6

Variiert man den Entladungsdruck von hohen (entsprechend dem Druckbereich des Gitters) nach niedrigen Drücken und wählt man die Gittervorspannungen so, daß sich immer günstigste Leistungsverstärkung q ergibt, so stellt man fest, daß die günstigste Gittervorspannung mit abnehmenden Drücken sich immer mehr von negativen nach positiven Spannungswerten verlegt.

In dem Maße, wie der Mittelwert der Gitterspannung mit abnehmenden Drücken sich ins Positive verlagert, ändert auch der Mittelwert des Gitterstromes, über die Lösch- und Zündperiode betrachtet, mit abnehmenden Drücken seine Polarität. Da mit zunehmenden Entladungsdrücken und folglich mit zunehmender Plasmadichte beim Löschen der Ioneneinstrom ins Gitter erheblich ansteigt, überwiegt im hohen Druckbereich, während

eines Lösch- und Zündvorganges, der Ioneneinstrom gegenüber dem Elektroneneinstrom, der in der positiven Halbwelle beim Zünden des Bogens erfolgt. Der Mittelwert des Gitterstromes wird deshalb negativ sein. Bei abnehmenden Drücken tritt dagegen mit vermindernder Plasmadichte der Ioneneinstrom beim Löschen gegenüber dem Elektroneneinstrom beim Zünden des Bogens zurück, so daß der mittlere Gitterstrom positiv werden kann. Wie sich die Polarität des mittleren Gittergleichstromes i_{gs} mit dem Druck ändert, wird mit einigen Meßdaten am Beispiel des 20-M./cm-Gitters mit Helium als Entladungsgas gezeigt:

Tabelle 3.

p Torr	Mittlere Gittergleichspannung U_{gs} (Volt)	Mittlerer Gittergleichstrom i_{gs} (Amp.)
1,23	− 10	− 0,33 (Ioneneinstrom)
0,68	− 13	− 0,21 „
0,2	0	+ 0,25 (Elektroneneinstrom)
0,05	+ 20	+ 0,6 „

Abschließend seien noch die Ergebnisse einiger Steuerversuche, die an Wasserstoff-Bogenentladungen durchgeführt wurden, mitgeteilt. Die Versuchsanordnung, insbesondere das Entladungsrohr, war dabei im wesentlichen beibehalten worden. Der Wasserstoff wurde durch ein elektrisch geheiztes Palladiumrohr eingelassen, das innerhalb eines weiten zylinderförmigen Glasrohres sich dauernd in einem reinen Wasserstoffstrom befand.

Unter Verwendung von Steuergittern mit verschiedener Maschenweite wurde das Wasserstoffrohr durch Rückkoppelung zu Eigenschwingungen erregt. Zur Selbsterregung des Rohres besonders geeignet (auch bis zu Frequenzen von 10^8 Hz) erwies sich dabei eine zwischen Anode und Gitter angeschlossene Lecher-Leitung, die an ihrem Ende kapazitiv überbrückt war und so gleichzeitig Anode und Gitter gleichstrommäßig abblockte. Das Steuergitter besaß im allgemeinen keine oder nur eine geringe negative Gittervorspannung.

Tabelle 4. Abhängigkeit des Schwingdruckes von der Gittermaschenweite.

Gittermaschenzahl	Anodengleichstrom beim Schwingen des Rohres: i_{AS} (Amp.)	Anodenbetriebsspannung U_m (Volt)	Schwingdruck p_s (Torr)	Wellenlänge
20 M./cm	0,5	300	0,35	11 m
10 M./cm	0,5	300	0,08	6 m
6 M./cm	1,0	400	0,06	5 m
3 M./cm	0,1	500	0,05	10 m

Ändert man den Entladungsdruck kontinuierlich, so setzen dann bei einem bestimmten Entladungsdruck (mit Schwingdruck bezeichnet) die Schwingungen ein. Aus Tabelle 4 ist die Abhängigkeit des Schwingdruckes von der Gittermaschenweite ersichtlich.

Die vorliegende Arbeit wurde im Elektrophysikalischen Laboratorium der Technischen Hochschule München ausgeführt. Herrn Professor Dr. W. O. Schumann möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu der Arbeit und für sein förderndes Interesse meinen besten Dank aussprechen. Ferner danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Berlin, für die Gewährung eines Forschungsstipendiums. Der Firma Linde, München-Höllriegelskreuth, die, immer hilfsbereit, die verwendeten Edelgase zur Verfügung stellte, danke ich verbindlichst.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien.

Von **F. Borgnis**, Graz.

(Eingegangen am 15. April 1941.)

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mittleren Energie einer monochromatischen elektromagnetischen Welle wird für Wellen allgemeinerer Art berechnet und der Zusammenhang mit dem Wert der üblicherweise definierten Gruppengeschwindigkeit beleuchtet.

1. Übersicht[1]). Als Phasengeschwindigkeit einer Welle, deren Phase durch den Ausdruck $e^{j(\omega t - hz_i)}$ gekennzeichnet ist, bezeichnet man den Wert

$$v = \frac{\omega}{h}; \tag{1}$$

es ist die Geschwindigkeit, mit der Flächen konstanten Phasenwinkels in der x_i-Richtung fortschreiten. Von wenigen Wellentypen einfachster Art abgesehen, besteht zwischen der „Wellenzahl" h und der Kreisfrequenz ω eine nicht lineare funktionelle Beziehung $h = h(\omega)$; als Gruppengeschwindigkeit — die Bezeichnung wurde von Rayleigh geprägt — wird der Wert

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}h(\omega)} \tag{2}$$

bezeichnet. Für die erwähnten einfachsten Wellentypen, z. B. die ebene elektromagnetische Welle in nicht dispergierenden Medien, ist der Wert ω/h eine Konstante, nämlich nach (1) die Phasengeschwindigkeit der Welle. Der Definition (2) entsprechend besitzen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit hier den gleichen Wert.

Die meist verbreitete elementare Deutung des physikalischen Sinns der unter (2) definierten Gruppengeschwindigkeit beruht auf der Betrachtung einer Wellengruppe, deren Frequenzen sich über einen schmalen

---

[1]) Folgende Bezeichnungen werden verwendet: $\omega = 2\pi\nu$, Kreisfrequenz; $h = 2\pi/\lambda$, (Kreis)-Wellenzahl; $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ = elektrische, magnetische Feldstärke; E_i, H_i = Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der x_i-Richtung; ε = Dielektrizitätskonstante ($= 0{,}886 \cdot 10^{-13}$ für Vakuum); μ = Permeabilität ($= 1{,}256 \cdot 10^{-8}$ für Vakuum); $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$; Λ_n^2 = n-ter Eigenwert der Differentialgleichung $\Delta U + \Lambda_n^2 U = 0$; $j = \sqrt{-1}$.

Bereich (2ε) in der Umgebung einer Frequenz ω_0 erstrecken; die Abhängigkeit der Wellenzahl von der Frequenz wird in Form einer nach dem zweiten Glied abbrechenden Taylor-Entwicklung berücksichtigt:

$$h = h_0 + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega}(\omega - \omega_0) + \cdots. \tag{3}$$

Beschreibt man eine solche Wellengruppe durch den Ausdruck

$$G = \int_{\omega_0 - \varepsilon}^{\omega_0 + \varepsilon} A(\omega_0) e^{j(\omega t - hx)} \mathrm{d}\omega, \tag{4}$$

so folgt unter Benutzung von (3) und mit Ausführung der Integration:

$$G = 2A(\omega_0) \frac{\sin \varepsilon \left(t - x \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega}\right)}{t - x \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega}} e^{j(\omega_0 t - h_0 x)}. \tag{5}$$

Die maximale Amplitude liegt bei $t - x\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} = 0$; sie pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}h$ fort. u wird daher als Amplitudengeschwindigkeit der Gruppe und in erweitertem Sinne häufig als Signalgeschwindigkeit bzw. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie der Gruppe gedeutet.

Die Herleitung erscheint nicht allzu befriedigend, wenn sie auch in vielen Punkten das Wesentliche trifft. Eine streng monochromatische Welle, d. h. eine Welle konstanter Amplitude im eingeschwungenen Zustand kann keinerlei Signal übertragen; dazu ist vielmehr eine zeitliche „Modulation" der Wellenamplitude notwendig. Mit Hilfe des Fourier-Integrals läßt sich ein solches Signal stets durch eine Wellengruppe beschreiben, die sich über einen endlichen Frequenzbereich erstreckt. Daß bei der Übertragung einer solchen Gruppe nicht allein die h-Werte der eigentlichen Übertragungsfrequenz ω_0, sondern auch die Werte in der Umgebung von $h(\omega_0)$ mitwirken, leuchtet ein. Nicht so leicht einzusehen ist, warum nur das erste Glied der Taylor-Entwicklung nach Potenzen von $(\omega - \omega_0)$ für die Signalgeschwindigkeit verantwortlich sein soll.

Für die Fortpflanzung freier elektromagnetischer Wellen in dispergierenden Medien sind die Verhältnisse durch die Untersuchungen von Sommerfeld und Brillouin[1]) klargelegt worden: Im Bereich normaler Dispersion definiert die Gruppengeschwindigkeit nach (2) die Ankunft

[1]) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **44**, 177, 1914; L. Brillouin, ebenda **44**, 203, 1914.

des Signals mit merklicher Amplitude; merklich gemeint im Verhältnis zu den stets mit Lichtgeschwindigkeit forteilenden Vorläufern. Im Bereich anomaler Dispersion verliert jedoch die Gruppengeschwindigkeit ihren Sinn als Signalgeschwindigkeit.

Die Frage nach der Gruppengeschwindigkeit einer monochromatischen Welle im Sinne einer Signalgeschwindigkeit ist nach dem Gesagten unsinnig; berechtigt dagegen ist die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich die mittlere Energie einer Welle im eingeschwungenen Zustand fortpflanzt. Für elektromagnetische Wellen läßt sich die Energiegeschwindigkeit mit Hilfe des Poyntingschen Vektors $\mathfrak{S}$ definieren. Bewegt sich die Welle und ihre Energie in Richtung der Koordinate x_i und denken wir uns senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung die Fläche $x_i = \text{const}$, so gibt die x_i-Komponente von $\mathfrak{S}$ die sekundlich durch die Fläche tretende Energiemenge an. Den mittleren Energiefluß setzen wir gleich dem Produkt aus der mittleren elektromagnetischen Energie $\overline{W}$ der Welle und der Energiegeschwindigkeit u_E:

$$\int \overline{\mathfrak{S}}_{x_i} \, df = \int [\overline{\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}}]_{x_i} \, df = \overline{W} \cdot u_E. \tag{6}$$

Die im folgenden durchgeführte Rechnung gestattet es, den Wert von u_E für elektromagnetische Wellen sehr allgemeinen Charakters zu bestimmen.

Für freie monochromatische Wellen mit beispielsweise ebenen, zylindrischen oder sphärischen Phasenflächen fallen Energie- und Phasengeschwindigkeit zusammen, diese Wellentypen interessieren daher in unserem Zusammenhang nicht. Anders liegt der Fall z. B. bei geführten Wellen, d. h. Wellen, die sich längs irgendwelcher (im folgenden als unendlich gut leitend betrachteter) metallischer Begrenzungen bewegen. Bei den betrachteten Wellentypen besteht zwischen Wellenzahl h und Kreisfrequenz ω ein funktioneller Zusammenhang der Form:

$$h = \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - \Lambda^2}. \tag{7}$$

Auch wenn die Materialkonstanten ε und μ frequenzunabhängig sind, liegt somit eine Dispersion in dem Sinne vor, daß die Phasengeschwindigkeit nach (1) eine Funktion der Frequenz ist.

Die folgende Untersuchung zeigt nun, daß sich allgemein für die unter (6) definierte Energiegeschwindigkeit einer monochromatischen elektromagnetischen Welle der Wert

$$\underline{u_E = \frac{h}{\omega \varepsilon \mu}} \tag{8}$$

ergibt. Bezeichnen wir $1/\sqrt{\varepsilon\,\mu}$ als Lichtgeschwindigkeit c in dem betreffenden Medium, so folgt aus (8) mit (1) auch

$$\underline{v \cdot u_E = c^2}, \tag{9}$$

eine auch aus anderen Gebieten der Physik bekannte Beziehung, welche besagt, daß das Produkt aus Energie- und Phasengeschwindigkeit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit gleich ist.

Liegt keine Dispersion des Mediums vor, so folgt weiter die Tatsache, daß die Energiegeschwindigkeit u_E der monochromatischen Welle mit einer nach (2) definierten Gruppengeschwindigkeit identisch wird.

Bei Vorhandensein einer Dispersion des Mediums [$\varepsilon(\omega)$ oder $\mu(\omega)$] werden sich beide Geschwindigkeiten jedoch prinzipiell voneinander unterscheiden, da dann bei der Berechnung der Gruppengeschwindigkeit nach (2) die Ableitungen $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\omega$ einen Beitrag liefern. Diese Ableitungen spielen aber bei der Energiegeschwindigkeit der monochromatischen Welle keine Rolle, wie man ohne weiteres einsieht, da hier die Frequenz ω_0 der Welle eben allein die Werte $\varepsilon(\omega_0)$ und $\mu(\omega_0)$ und damit den Wert von u_E nach (8) bestimmt.

Der physikalische Grund für die Verschiedenheit von Energie- und Phasengeschwindigkeit für die betrachteten elektromagnetischen Vorgänge wird in Abschnitt 5 erläutert.

2. Das Lösungssystem von Bromwich. Wir legen die Maxwellschen Gleichungen im praktischen Maßsystem zugrunde in der Form

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= j\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{E}, \\ -\operatorname{rot}\mathfrak{E} &= j\,\omega\,\mu\,\mathfrak{H}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch (10) werden rein periodische Vorgänge mit der Kreisfrequenz ω in dielektrischen Medien ohne Leitfähigkeit beschrieben. Nach Bromwich[1]) läßt sich ein allgemeines Lösungssystem von (10) angeben; die Lösungen zerfallen in zwei Gruppen, die wir als elektrischen und magnetischen Typ bezeichnen; die eine Gruppe besitzt in einer vorgegebenen Koordinatenrichtung x_i nur eine elektrische Feldkomponente E_i, dagegen keine magnetische Komponente, wir bezeichnen sie als *elektrischen* Typ. Umgekehrt besitzt der *magnetische* Typ in der Koordinatenrichtung x_i allein eine magnetische Feldkomponente H_i. In allgemeinen orthogonalen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) mit dem Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = e_1^2\,\mathrm{d}x_1^2 + e_2^2\,\mathrm{d}x_2^2 + e_3^2\,\mathrm{d}x_3^2 \tag{11}$$

[1]) T. S. Bromwich, Phil. Mag. (6) **38**, 143, 1919.

erhält man die Feldkomponenten aus partiellen Ableitungen einer einzigen skalaren Ortsfunktion U; es gilt[1]):

Elektrischer Typ

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, & H_1 &= 0, \\ E_2 &= \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, & H_2 &= j\omega\varepsilon\frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, \\ E_3 &= \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}, & H_3 &= -j\omega\varepsilon\frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \quad (12\,a)$$

Magnetischer Typ

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= 0, & H_1 &= k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \\ E_2 &= j\omega\mu\frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, & H_2 &= \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ E_3 &= -j\omega\mu\frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}, & H_3 &= \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}. \end{aligned}\right\} \quad (12\,b)$$

Die Funktion U hat der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right\} + k^2 U = 0 \quad (13)$$

mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ zu genügen. Die Grundvektoren sind der Bedingung: $e_1 = 1$, e_2/e_3 unabhängig von x_1 unterworfen. Die Lösung (12) erfüllt die Beziehungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Um zum speziellen Fall elektromagnetischer Wellen, die in der positiven x_i-Richtung fortschreiten, überzugehen, hat man die Abhängigkeit von der Koordinate x_i in der Form $e^{j(\omega t - h x_i)}$ zu spezialisieren. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $x_i = x_1$ setzen. Mit $\partial/\partial x_1 = -jh$ folgt aus (12)

Elektrischer Typ

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= (k^2 - h^2)\, U, & H_1 &= 0, \\ E_2 &= -jh\frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}, & H_2 &= j\omega\varepsilon\frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, \\ E_3 &= -jh\frac{1}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, & H_3 &= -j\omega\varepsilon\frac{1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \quad (15\,a)$$

[1]) Über die Herleitung s. a. F. Borgnis, Ann. d. Phys. (5) **35**, 359, 1939.

Magnetischer Typ

$$\left.\begin{array}{l|l} E_1 = 0, & H_1 = (k^2 - h^2)\, U, \\ E_2 = j\omega\mu \dfrac{1}{e_3} \dfrac{\partial U}{\partial x_3}, & H_2 = -jh \dfrac{1}{e_2} \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \\ E_3 = -j\omega\mu \dfrac{1}{e_2} \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, & H_3 = -jh \dfrac{1}{e_3} \dfrac{\partial U}{\partial x_3}. \end{array}\right\} \quad (15\,\mathrm{b})$$

Aus (13) folgt für U die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{e_2 e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right\} + (k^2 - h^2)\, U = 0. \quad (16)$$

Der erste Term ist mit dem Ausdruck div grad $U = \Delta U$ identisch, an Stelle von (16) läßt sich schreiben

$$\Delta U + (k^2 - h^2)\, U = 0. \quad (16\mathrm{a})$$

Die Grenzbedingungen folgen aus den speziellen geometrischen Verhältnissen des Problems; setzen wir z. B. voraus, daß die Wellen sich längs unendlich gut leitender Flächen ausbreiten, so muß an diesen Flächen die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes verschwinden. Wie man aus (15) erkennt, liefert dies die Randbedingung

$$\left.\begin{array}{l} U = 0 \text{ am Rande für den Elektrischen Typ,} \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ am Rande für den Magnetischen Typ.} \end{array}\right\} \quad (17)$$

Erstreckt sich die Welle ins Unendliche, so ist im Unendlichen aus energetischen Gründen ein Verschwinden von U von entsprechend hoher Ordnung zu verlangen.

Die Differentialgleichung (16) zusammen mit den Randbedingungen (17) bestimmt die Eigenwerte $k^2 - h^2$; nennen wir den n-ten Eigenwert Λ_n^2, so gilt

$$k_n^2 - h_n^2 = \Lambda_n^2. \quad (18)$$

Bei diesen Wellentypen liegt also allgemein eine Dispersion der Form

$$h_n^2 = \omega_n^2 \varepsilon \mu - \Lambda_n^2 \quad (19)$$

vor. In gewissen Sonderfällen kann $\Lambda_n = 0$ werden; dann ist eine Dispersion im Sinne von (19) nicht vorhanden, es folgt $h = k$. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit werden hier gleich der Lichtgeschwindigkeit. Beispielsweise ist dies der Fall bei der Fortpflanzung ebener Wellen längs zylindrischen Leitern (Lecher-Systeme). Dort verschwinden sowohl die elektrische als auch die magnetische Feldkomponente in der Fortpflanzungsrichtung. Dies bedingt mit (15) $E_1 = 0$, falls man vom elektrischen, $H_1 = 0$, falls man vom magnetischen Typ ausgeht, d. h. $k^2 - h^2 = 0$ oder $h = k$.

3. Berechnung der Energiegeschwindigkeit. Entsprechend der Definition (6) führen wir die Bestimmung von u_E zunächst für Wellen des elektrischen Typs durch. Es ist

$$\int [\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{H}}]_{x_1} \mathrm{d}f = \tfrac{1}{2} \int (E_2 H_3^* - E_3 H_2^*) \mathrm{d}f, \tag{20}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}\mathfrak{E}^* + \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}\mathfrak{H}^* \right) \mathrm{d}f = \frac{1}{2} \int \varepsilon \mathfrak{E}\mathfrak{E}^* \mathrm{d}f. \tag{21}$$

Der Faktor $^1/_2$ in (20) rührt von der zeitlichen Mittelung des Energieflusses über eine Periode, in (21) von der räumlichen Mittelung über die Koordinate x_1 her. Bei (21) ist davon Gebrauch gemacht, daß die mittlere magnetische Energie der Welle gleich der mittleren elektrischen Energie ist. Diese bekannte Tatsache wird in Abschnitt 4 nochmals aus unseren Ausgangsgleichungen bewiesen werden.

Gleichung (6) liefert mit (15a), (20) und (21)

$$\frac{1}{2} \frac{\omega \varepsilon}{h} \int (E_2 E_2^* + E_3 E_3^*) \mathrm{d}f = u_E \frac{\varepsilon}{2} \int (E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + E_3 E_3^*) \mathrm{d}f. \tag{22}$$

Aus (15a) folgt

$$\int (E_2 E_2^* + E_3 E_3^*) \mathrm{d}f = h^2 \int \left\{ \left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right)^2 \right\} \mathrm{d}f = h^2 \int (\mathrm{grad}\, U)^2 \mathrm{d}f.$$

Wir verwenden den Greenschen Satz in der Form

$$\int (\mathrm{grad}\, U)^2 \mathrm{d}f = -\int U \, \Delta U \, \mathrm{d}f - \int_{\text{Rand}} U \, \mathrm{grad}\, U \, \mathrm{d}s.$$

Zufolge der Differentialgleichung (16a) für U wird

$$-\int U \, \Delta U \, \mathrm{d}f = (k^2 - h^2) \int U^2 \mathrm{d}f$$

und mit (15a)

$$= \frac{1}{k^2 - h^2} \int E_1 E_1^* \mathrm{d}f.$$

Der Term

$$\int_{\text{Rand}} U \, \mathrm{grad}\, U \, \mathrm{d}s = \int_{\text{Rand}} U \frac{\partial U}{\partial n} \mathrm{d}s$$

(grad U wird auf der Begrenzung mit $\partial U / \partial n$ identisch) verschwindet zufolge den Grenzbedingungen (17). Damit erhält man

$$\int (E_2 E_2^* + E_3 E_3^*) \mathrm{d}f = \frac{h^2}{k^2 - h^2} \int E_1 E_1^* \mathrm{d}f. \tag{23}$$

Mit (22) ergibt sich

$$\frac{\omega \varepsilon}{h} \frac{h^2}{k^2 - h^2} = u_E \varepsilon \left(1 + \frac{h^2}{k^2 - h^2} \right) = u_E \varepsilon \frac{k^2}{k^2 - h^2}$$

und

$$u_E = \frac{\omega h}{k^2} = \frac{\omega h}{\omega^2 \varepsilon \mu}$$

oder

$$\underline{u_E = \frac{h}{\omega \varepsilon \mu}},$$

womit die Behauptung (8) bewiesen ist.

Für den magnetischen Typ verläuft der Beweis analog; man rechnet nur statt mit der elektrischen Energie in (21) mit der magnetischen Energie und erhält an Stelle von (22)

$$\frac{1}{2} \frac{\omega \mu}{h} \int (H_2 H_2^* + H_3 H_3^*) \, \mathrm{d}f = u_E \frac{\mu}{2} \int (H_1 H_1^* + H_2 H_2^* + H_3 H_3^*) \, \mathrm{d}f.$$

Nach dem gleichen Verfahren wie oben erhält man den nämlichen Wert für u_E wie in (8).

Liegt keine Dispersion des Mediums vor, d. h. hat man allein mit einer Dispersion nach (19) zu rechnen, so folgt mit (19)

$$2 h \, \mathrm{d}h = 2 \omega \varepsilon \mu \, \mathrm{d}\omega$$

oder für die Gruppengeschwindigkeit entsprechend der Definition (2)

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}h} = \frac{h}{\omega \varepsilon \mu}.$$

Wie in Abschnitt 1 behauptet, fällt der Wert der Energiegeschwindigkeit mit dem Wert der üblicherweise definierten Gruppen- bzw. Signalgeschwindigkeit zusammen, falls das Medium keine Dispersion aufweist.

4. Gleichheit von mittlerer elektrischer und magnetischer Energie der fortschreitenden Welle. Die in (21) benutzte Tatsache der Gleichheit von mittlerer elektrischer und magnetischer Energie läßt sich aus dem Lösungssystem (15) beweisen. Wir führen den Beweis für den elektrischen Typ, der Beweis für den magnetischen Typ verläuft analog.

Die Gleichheit der mittleren Energien — die Mittelung über die Koordinate x_1 liefert den Faktor $1/2$ — verlangt für den elektrischen Typ folgende Identität:

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} \int (E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + E_3 E_3^*) \, \mathrm{d}f = \frac{1}{2} \frac{\mu}{2} \int (H_2 H_2^* + H_3 H_3^*) \, \mathrm{d}f$$

oder

$$\varepsilon (h^2 - k^2)^2 \int U^2 \, \mathrm{d}f + \varepsilon h^2 \int (\mathrm{grad}\, U)^2 \, \mathrm{d}f = \mu \omega^2 \varepsilon^2 \int (\mathrm{grad}\, U)^2 \, \mathrm{d}f. \quad (24)$$

Aus dem Greenschen Satz folgt unter den gleichen Voraussetzungen wie oben

$$\int (\mathrm{grad}\, U)^2 \, \mathrm{d}f = (k^2 - h^2) \int U^2 \, \mathrm{d}f$$

und damit aus (24)

$$\varepsilon\,(k^2 - h^2)^*(k^2 - h^2 + h^2) = \mu\,\omega^2\,\varepsilon^2\,(k^2 - h^2)$$

oder

$$k^2 = \omega^2\,\varepsilon\,\mu\,,$$

d. h. eine Identität; damit ist der Beweis geführt.

5. Zur physikalischen Begründung der Verschiedenheit von Phasen- und Energiegeschwindigkeit. Bei Vorliegen einer Dispersion entsprechend (19) ist gemäß Gleichung (9) die Energiegeschwindigkeit kleiner, die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit. Der physikalische Grund dafür, daß die Energiegeschwindigkeit kleiner als die Geschwindigkeit der Phasenflächen ist, liegt letzlich in unserer Definition (6). Zu dem mittleren Energiefluß in der Fortpflanzungsrichtung x_1 tragen die Feldkomponenten E_2, E_3, H_2, H_3 bei, nicht aber die Komponente E_1 beim elektrischen Typ, bzw. H_1 beim magnetischen Typ. Diese Komponenten bewirken eine Energiependelung *senkrecht* zur Fortpflanzungsrichtung mit dem zeitlichen Mittelwert Null. In den elektromagnetischen Energieinhalt gehen diese Komponenten jedoch ein; der in diesen Feldkomponenten enthaltene Energieanteil „strömt" aber nicht. Je größer der von E_1 bzw. H_1 herrührende Energieanteil an der mittleren Gesamtenergie ist, desto kleiner ergibt sich der Wert der Energiegeschwindigkeit. Verschwinden dagegen die in Richtung der Fortpflanzung liegenden Komponenten E_1 bzw. H_1, so strömt die *gesamte* Energie in Richtung der Wellenbewegung; bei solchen „rein transversalen" Wellen müssen daher Energie- und Phasengeschwindigkeit identisch werden.

Zusammenfassung. Die Phasengeschwindigkeit monochromatischer elektromagnetischer Wellen allgemeinerer Art ist, von Ausnahmefällen abgesehen, eine Funktion der Übertragungsfrequenz der Welle; sie ist größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Medium. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mittleren elektromagnetischen Energie solcher Wellen wird berechnet. Es zeigt sich, daß das Produkt aus Phasen- und Energiegeschwindigkeit stets gleich der Lichtgeschwindigkeit ist; die Energiegeschwindigkeit ist daher kleiner oder höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit. Für Medien ohne Dispersion, d. h. mit frequenzunabhängiger Dielektrizitätskonstante und Permeabilität, wird der Wert der Energiegeschwindigkeit identisch mit dem Wert der üblicherweise definierten Gruppen- oder Signalgeschwindigkeit. Der physikalische Grund für die Verschiedenheit von Phasen- und Energiegeschwindigkeit wird erläutert.

Graz, I. Physikalisches Institut der Universität.

Über das Eindringen von Edelgasen in Metalle.

Von **W. Bartholomeyczyk, W. Funk** und **R. Seeliger.**

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Mai 1941.)

Kurze vorläufige Übersicht über bisher erzielte Ergebnisse einer Untersuchung der Gasaufzehrung in Edelgasentladungen. Anzustreben und wahrscheinlich möglich ist eine Erklärung der experimentellen Befunde durch eine Auflösung des integralen Aufzehrungseffektes in gewisse Elementareffekte. Als solche erweisen sich letzten Endes der Einschuß von Ionen in das Kathodenmetall, dessen Abstäubung durch den Ionenaufprall und Wiederauflagerung durch die Rückdiffusion.

Es ist seit langem bekannt und in zahlreichen experimentellen sowie theoretischen Arbeiten untersucht worden, daß unedle Gase in Metalle eindringen können. Da demgegenüber Edelgase von Metallen unter normalen Bedingungen nicht in nachweisbaren Mengen aufgenommen werden, ist es von allgemeinerem Interesse, daß man sogar sehr erhebliche Mengen von Edelgasen in Metalle hineinbringen kann, wenn man diese als Kathode einer Glimmentladung benutzt. Eingehender wurde diese „Gasaufzehrung" (GA.) von Alterthum, Lompe und Seeliger[1]) untersucht und damals bereits erklärt durch die einfache Vorstellung eines Hineinschießens der Gasteilchen als Ionen in die Kathode (Ionenschußtheorie); aber trotz des anschließend von Alterthum und Lompe[2]) gesammelten umfangreichen Beobachtungsmaterials blieben viele, und zwar auch grundsätzliche Fragen unbeantwortet. Wir haben uns nun inzwischen mit dem Problem der GA. von Edelgasen weiter beschäftigen können und geben im folgenden eine kurze vorläufige Übersicht über bisher erzielte Ergebnisse. Es handelt sich um mühsame und insbesondere sehr zeitraubende Messungen aus einem umfangreichen systematischen Versuchsprogramm, worüber später noch ausführlicher berichtet werden wird.

I. Untersuchungsmethodik. Die GA. = Zahl der aus dem Entladungsraum pro Zeit- und Stromeinheit verschwindenden Atome, wird bestimmt aus der Abnahme des Fülldruckes. Dies erfordert bei Dauer und Serienmessungen (bisher handelt es sich immerhin bereits um rund 10000 überwachte Brennstunden) vor allem ein einfaches und zuverlässiges Druck-

[1]) H. Alterthum, A. Lompe u. R. Seeliger, ZS. f. techn. Phys. **17**, 407, 1936. — [2]) H. Alterthum u. A. Lompe, ebenda **19**, 113, 116, 1938.

meßgerät; erst ein verbessertes Pirani-Manometer[1]) genügte allen Anforderungen und wurde deshalb ausschließlich benutzt. Erforderlich ist ferner, mit ganz reinen Gasen und Röhren zu arbeiten. Abgesehen davon, daß alle Messungen selbstverständlich an von der Pumpe abgeschmolzenen Röhren vorgenommen werden müssen, war es zur Erzielung vergleichbarer und reproduzierbarer Bedingungen notwendig, eine möglichst schematisierte Formier- und Fülltechnik zu entwickeln: Formieren der Röhren durch Ausbrennen, Ausheizen und Auswirbeln nach in Vorversuchen erprobten und dann stets genau innegehaltenen Vorschriften, Nachfüllen bzw. Nachpumpen stets nur über magnetisch zu öffnende Verschlüsse, Reinigung des Gases durch Vorbrennen in einer Hilfsentladung usw. Als ein Illustrationsbeispiel kann etwa das in Fig. 1 dargestellte Ergebnis dienen. Mit dem eigentlichen Versuchsrohr V war ein Reinigungsrohr R verbunden, und es wurde nun erst nachdem der Druck durch eine Entladung in R bis auf den gewünschten Anfangsdruck (der hier etwa 1 Torr betrug) heruntergebrannt worden war, in V der eigentliche Aufzehrversuch begonnen. Wie man sieht, fehlt in dem so vorgereinigten (an sich bereits als spektralrein bezogenen) Gas der steilere Anfangsteil mit größerer Aufzehrgeschwindigkeit, ein Befund, der allerdings gar nicht einfach zu verstehen ist und hier auch im einzelnen noch nicht erörtert werden soll. Fig. 2 zeigt das benutzte R-V-Rohr als typisches Beispiel mit dem Manometer und dem Nachfüll- bzw. Abpumpstern aus einer Reihe magnetischer Verschlüsse. Erhebliche, restlos übrigens noch nicht überwundene Schwierigkeiten macht das Kathodenmaterial. Anfangs wurden Kathoden aus verschiedenen technischen Eisensorten, später nur noch solche aus vakuumgeschmolzenem Elektrolyteisen verwendet und damit die Zahl der Parameter, von denen die GA. abhängen kann, eingeschränkt; aber es gibt wahrscheinlich weitere unbekannte Materialparameter, deren Einfluß noch untersucht werden muß.

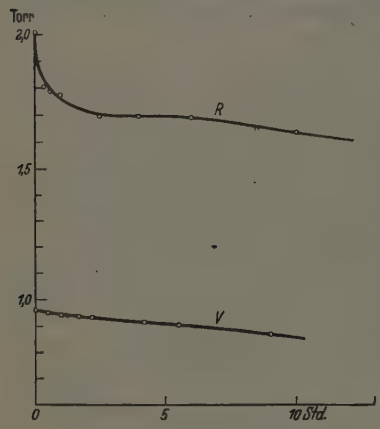


Fig. 1. GA. in Rohgas (R) und in vorgereinigtem Gas (V).

[1]) W. Bartholomeyczyk, ZS. f. techn. Phys. **21**, 25, 1941.

II. Der Zeiteffekt. Erschwert wird die Übersicht über die Sachlage und die Deutung der Meßergebnisse dadurch, daß die GA. unter im übrigen gleichen Bedingungen abhängt nicht nur vom Druck, sondern auch von der Dauer einer vorhergehenden Beanspruchung der Kathode durch die Entladung und von den Drucken, bei denen diese Beanspruchung stattgefunden hat. Die GA. läßt sich also auch bei konstanter Stromstärke darstellen

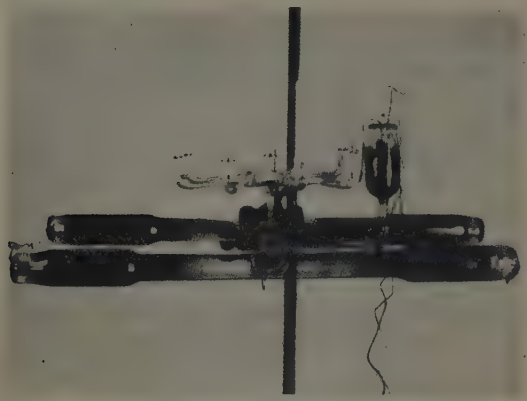


Fig. 2. Versuchsrohr mit Reinigungsrohr, Füllstern und Manometer.

nur durch ein räumliches Diagramm, d. h. durch eine Fläche über der Druck-Zeitebene; diese Fläche sieht z. B. für Hohlkathoden so aus, daß die GA. abnimmt mit zunehmendem Druck und mit zunehmender Beanspruchungszeit. Zur Erklärung wird man auf die Annahme geführt, daß zu jedem Druck eine bestimmte Beschaffenheit der Oberfläche gehört, die sich in der Entladung erst im Laufe der Zeit ausbildet; simultane Messungen des Kathodenfalls sprechen für die Richtigkeit dieser Annahme.

III. Einschuß und Zerstäubung. Als Leitgedanke zum Verständnis der Meßergebnisse hat sich bisher die Annahme bewährt, daß letzten Endes als Elementarprozesse eine Rolle spielen einerseits der Ioneneinschuß und andererseits die Abtragung der schon jeweils mit Gasatomen durchsetzten Metallschichten durch die Kathodenzerstäubung. Die letztere wiederum resultiert aus der primären Abstäubung und aus der Wiederauflagerung von Metallatomen, die durch Rückdiffusion aus dem Gasraum zur Kathode gelangen, und zwar in einem vom Druck und von der geometrischen Situation abhängenden Bruchteil. Vernachlässigt werden darf bei den hier vor-

kommenden Kathodentemperaturen die Verschiebung der eingeschlossenen Gasteilchen im Metall durch Diffusion (die eine Rolle spielt erst bei wesentlich höheren Temperaturen). Erforderlich sind aber noch zwei ergänzende Annahmen, nämlich 1. daß die Ionen nicht nach einem exponentiellen Absorptionsgesetz, sondern innerhalb eines gegen die Einschußtiefe schmalen Reichweitestreifens im Metall steckenbleiben, und 2. daß die primäre Absträubung abhängt von der Gasbeladung, und zwar mit dieser zunehmend.

IV. Ebene und konvexe Kathoden. Zunächst schien es, als ob die Verhältnisse an Scheibenkathoden und Zylinderkathoden, die nur an der

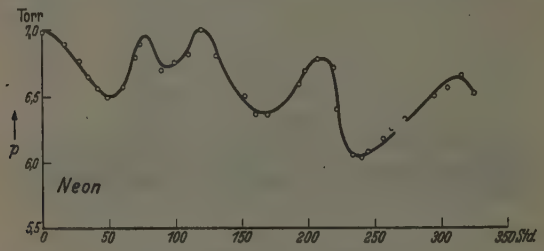


Fig. 3. Periodizitäten (Feinstruktur) der GA.

Außenseite brennen, besonders einfach und übersichtlich gegenüber den an Hohlkathoden wären, und unmittelbar Aussagen über die genannten Elementarprozesse erlauben würden. Versuchsreihen über lange Beobachtungszeiten zeigten dann aber, daß auch hier grundsätzlich dieselben Verhältnisse wie an Hohlkathoden vorzuliegen scheinen. Hervorheben wollen wir an dieser Stelle nur, daß der zeitliche Druckverlauf Periodizitäten zeigt, d. h. also, daß abwechselnd eine Aufzehrung und ein Wiederaustritt des Gases aufeinanderfolgen. Fig. 3 gibt einen Ausschnitt aus einer typischen derartigen Meßkurve. Durch die oben skizzierten Vorstellungen würden diese Befunde eine zwanglose Erklärung finden.

V. Hohlkathoden. In Hohlkathoden — untersucht wurden beiderseits offene bzw. an einer Seite geschlossene Zylinder, die nur an der Innenseite brannten — hängt die Verteilung der Stromdichte über die Oberfläche vom Druck und von der Stromstärke ab, und es findet eine Materialwanderung von gewissen Teilen der Oberfläche zu anderen Teilen statt. So kommt es, daß es Stellen gibt, an denen im Zeitmittel Material aufgetragen wird und demgemäß die GA. überwiegt, und andere Stellen, an denen Material abgetragen wird und demgemäß keine dauernde Aufzehrung stattfindet. Man kann dies erkennen und daraus dann weitere Schlüsse

ziehen aus der Oberflächenbeschaffenheit nach einem Dauerversuch (~ 1000 Brennstunden; vgl. Fig. 5). Aber abgesehen davon, daß auch in Hohlkathoden der unter II. erwähnte Zeiteffekt eine Rolle spielt und sich wegen der unter IV. erwähnten auch hier auftretenden Periodizitäten

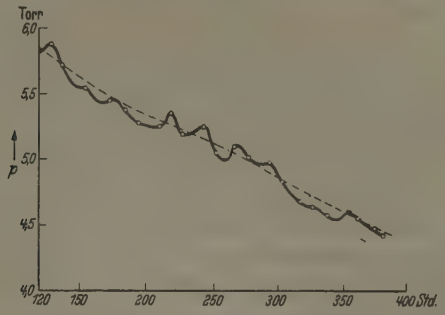


Fig. 4. Mittlerer Druckverlauf und Feinstruktur der GA. in Hohlkathoden.

eine GA. nur im Zeitmittel definieren läßt (vgl. als Beispiel den Ausschnitt Fig. 4 aus einer Meßkurve; punktiert eingezeichnet ist der mittlere

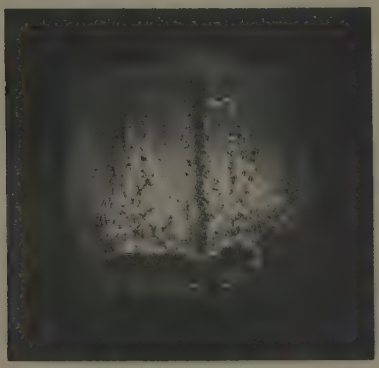


Fig. 5. Oberflächenbild der Innenseite einer Hohlkathode nach einer Dauerbeanspruchung.

Druckabfall ohne die „Feinstruktur"), machen sich bei der Materialwanderung Oberflächeninhomogenitäten störend bemerkbar. Es ist dies zu ersehen z. B. aus dem in Fig. 5 gezeigten Oberflächenbild der Innenseite einer nach einem Dauerbrennversuch aufgeschnittenen und auf-

gerollten Kathode, das auch eine azimutal inhomogene Verteilung der Stellen zeigt, an denen vorwiegend eine Abstäubung bzw. eine Wiederauftragung des zerstäubten Materials stattgefunden hat. Diese „makroskopischen" Inhomogenitäten der Oberfläche sind unter anderem verursacht durch die unvermeidlichen mechanischen Beanspruchungen des Metalls bei der Herstellung der Kathoden. Aus meßtechnischen Gründen ist es nun natürlich erforderlich, physikalisch homogene Oberflächen herzustellen, wobei sich bereits gezeigt hat, daß hier grenzflächenphysikalisch recht interessante und grundsätzliche Probleme vorliegen. Abgesehen davon läßt sich jedoch insgesamt bereits sagen, daß eine befriedigende Erklärung aller experimentellen Befunde an Hohlkathoden im Rahmen der entwickelten Vorstellungen möglich sein dürfte. Erwähnt sei nur noch, daß sich Hinweise auf die Gültigkeit gewisser Ähnlichkeitsgesetze ergeben haben, deren Bestätigung natürlich die vollständige Entwirrung aller Einzelheiten wesentlich erleichtern würde.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung sind wir für die gewährten Unterstützungen zu großem Dank verpflichtet.

Greifswald, Physikalisches Institut.

Über ein 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop mit Objektabschattungsvorrichtung.

Von **Manfred von Ardenne.**

Mit 20 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Mai 1941.)

Der Einfluß der Steigerung der Strahlspannung auf die elektronenmikroskopische Abbildung und auf die Möglichkeit der Untersuchung lebender Substanz wird an Hand aufgestellter Gleichungen abgeschätzt. Während das Auflösungsvermögen bei der Abbildung feinster Teilchen sich mit wachsender Strahlspannung zunächst kaum ändert, nimmt dasselbe bei der Abbildung innerer Schichten von Objekten größerer Massendicke proportional der Spannung zu. Die Belastungsverhältnisse lebender Substanz verbessern sich etwa mit der 2,5. Potenz der Strahlspannung. Nach den beiden zuletzt erwähnten Abhängigkeiten muß die Schaffung eines Elektronenmikroskopes mit wesentlich heraufgesetzter Strahlspannung und speziell den Erfordernissen und Möglichkeiten der hohen Spannung angepaßter Bauweise der übermikroskopischen Forschung weite neue Gebiete erschließen. Seit Mitte 1939 in dieser Richtung betriebene Entwicklungsarbeiten führten zur Ausbildung des 200 kV-*Universal-Elektronenmikroskops*, dessen Ausführung eingehend besprochen wird. Es erlaubt Hellfeld-, Dunkelfeld- und Stereoaufnahmen hoher Auflösung von Objekten großer und kleiner Massendicke. Als erstes Mikroskop besitzt dieses Instrument eine Objektabschattungsvorrichtung. *Durch diese Einrichtung in Verbindung mit der Strahlspannung von bis zu 220 kV ist u. a. zum ersten Male die Aufnahme von Bildpaaren (oder Bildreihen) lebender Substanz gelungen.* Einige wiedergegebene Elektronenbilder vermitteln einen Überblick über das Leistungsvermögen der Anlage.

Inhalt: Einfluß der Beschleunigungsspannung auf die elektronenmikroskopische Abbildung. — Einfluß der Beschleunigungsspannung auf Intensität, Objektbelastung und Bestrahlungsempfindlichkeit lebender Substanz. — Gesamtkonstruktion. — Praktische Ausführung der Anlage: a) Strahlerzeugungssystem und Beschleunigungsstufen; b) Kondensor und Objektivsystem; c) Objektabschattungsvorrichtung zur Untersuchung lebender oder empfindlicher Substanz; d) Projektionssystem und Reihenbildkamera; e) Hochspannungsanlage. — Ergebnisse.

Die bisher für das praktische Arbeiten in den Elektronen-Übermikroskopen angewandten Beschleunigungsspannungen liegen fast ausschließlich in dem Bereich von 50 bis 85 kV [1]). Nachdem aus theoretischen [2]) und neuerdings auch experimentellen [3]) Untersuchungen die Überlegenheit höherer

[1]) Vgl. M. von Ardenne, ZS. f. Phys. **115**, 339, 1940; B. von Borries u. E. Ruska, Siemens ZS. **20**, 217, 1940; H. Mahl, Kolloid-ZS. **91**, 105, 1940; L. Marton, Phys. Rev. **58**, 57, 1940. — [2]) M. von Ardenne, ZS. f. Phys. **108**, 338, 1938. — [3]) B. von Borries u. E. Ruska, ZS. f. Phys. **116**, 249, 1940; E. Kinder, ZS. f. techn. Phys. **21**, 222, 1940, sowie die erst nach Niederschrift dieser Mitteilung erschienene Arbeit: H. O. Müller u. E. Ruska, Kolloid-ZS. **95**, 21, 1941.

Strahlspannungen für die Abbildung von Objekten größerer Massendicke übereinstimmend hervorgeht, und nachdem zum Teil deren Abbildung überhaupt erst durch die stärkere Durchdringungsfähigkeit der höher beschleunigten Elektronen gelingen kann, muß fast zwangsläufig die Schaffung eines Elektronenmikroskopes mit wesentlich heraufgesetzter Strahlspannung der übermikroskopischen Forschung weite neue Gebiete erschließen.

Mitte 1939 begann der Verfasser umfangreichere Entwicklungsarbeiten mit dem Ziel, Strahlspannungen von 200 bis 300 kV bei einem speziell für Spannungen dieser Höhe bemessenen Mikroskop anzuwenden. Im Frühjahr 1940 wurden nach teilweiser Fertigstellung eines für Beschleunigungsspannungen bis zu 300 kV projektierten Elektronenmikroskopes, dessen wesentliche konstruktive Merkmale und elektronenoptische Daten im Rahmen eines Buches[1]) bekanntgegeben und hierdurch die Aufmerksamkeit aller Entwicklungsstellen in diese Richtung gelenkt. Nach wiederholten, das Instrument verbessernden Umbauten sowie gründlicher Durcharbeitung und Erprobung soll nunmehr nach über Jahresfrist eine eingehende Beschreibung der endgültigen Anlage, sowie ein Bericht über eine Auswahl charakteristischer Ergebnisse veröffentlicht werden.

Der Entschluß zur Investierung des ungewöhnlich hohen Aufwandes an Arbeitsstunden und Material, der in Kriegszeiten naturgemäß schwer fallen mußte, wurde dem Verfasser erleichtert durch die bestimmte Erwartung, daß gerade die für das normale Universal-Elektronenmikroskop[2]) ausgebildeten *Objektivsysteme mit sehr feinen, durch das Mikroskop selbst zentrierbaren Blenden* eine genügend kontrastreiche Abbildung auch von Objekten sehr kleiner Massendicke ermöglichen würden. Hieraus folgte die Hoffnung, mit der hohen Strahlspannung nicht nur Objekte großer Massendicke, sondern nach Einschaltung kleiner Objektivblenden auch feinste Teilchen in übermikroskopischen Hell- und Dunkelfeldbildern untersuchen zu können. Entscheidend ist für den Entschluß der Umstand gewesen, daß durch die neue Anlage und die Entwicklung einer *Objektabschattungsvorrichtung* die Möglichkeit erschlossen wird zur *Abbildung lebender Substanz mit dem Elektronen-Übermikroskop.*

Einfluß der Beschleunigungsspannung auf die elektronenmikroskopische Abbildung.

Diejenigen Abbildungsfehler, die heute die Qualität übermikroskopischer Bilder maßgebend begrenzen, sind der *Beugungsfehler* d_{Beug} und der

[1]) M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie. Berlin, Verlag Julius Springer, 1940, S. 213 u. a. — [2]) M. von Ardenne, ZS. f. Phys. **115**, 339, 1940.

Öffnungsfehler des Objektivs $d_{Öffn}$, sowie bei Objekten größerer Massendicke zusätzlich der *Fehler durch räumliche Elektronenstreuung* d_{Streu} und der *chromatische Fehler infolge von Geschwindigkeitsstreuung* d_{Chrom}. Die beiden ersten Fehler bestimmen bekanntlich nach gegenseitiger Anpassung[1])

$$d_{Beug} = \sqrt{3}\, d_{Öffn} \tag{1}$$

durch Wahl des günstigsten Objektiv-Öffnungsverhältnisses $(D/f)_{opt}$ die *Grenze des Auflösungsvermögens*. Die Änderung dieser Grenze mit der Beschleunigungsspannung hängt von dem *Zusammenhang zwischen Linseneigenschaften und Beschleunigungsspannung* ab. Eine experimentelle Untersuchung über diesen Zusammenhang wurde mit einer einfachen, in diesem Heft beschriebenen[2]) Methode an magnetischen Polschuhlinsen durchgeführt. Sie lieferte für die erreichbare Minimalbrennweite von magnetischen Mikroskopobjektiven folgende Näherung:

$$f_{min} = \text{konst} \cdot D_p \cdot U. \tag{2}$$

Hierin bedeutet *konst* eine Zahl, die von der *Form* und dem *Material der Polschuhspitzen* sowie den auf S. 673 besprochenen Maßnahmen abhängt. Bei günstiger Ausgestaltung des Polschuhsystems erreicht diese Zahl leicht den Wert $2{,}5 \cdot 10^{-5}$. D_p ist der Durchmesser der Polschuhbohrung bzw. bei unsymmetrischer Bauart (siehe unten) etwa der arithmetische Mittelwert aus den beiden Bohrungsdurchmessern. Aus (2) folgt die auch aus den Linsenformeln bekannte Tatsache, daß die *Brennweite eines gegebenen Mikroskopobjektivs proportional mit der Strahlspannung* U steigt. Der *Gültigkeitsbereich des Ausdrucks* (2) ist in bezug auf D_p eingeschränkt durch die Bedingungen, daß etwa $D_p < 0{,}7\, f_{min}$ (weil sonst wesentliche Feldanteile nicht mehr zur Fokussierung beitragen) und daß $D_p > 0{,}5$ mm bleiben soll (weil sonst offenbar als Folge von Sättigungseinflüssen der magnetisch wirksame freie Polschuhdurchmesser größer bleibt als der Durchmesser der Bohrung). In Richtung hoher U-Werte wird der Ausdruck (2) ungenau durch den vergrößernden Einfluß der relativistischen Massenkorrektur auf f_{min}. Die praktisch mit verschiedenen mittleren D_p-Werten bei den angegebenen Spannungen noch relativ leicht erzielbaren Brennweiten sind aus Fig. 1 A zu entnehmen. Die besonders eingetragenen Meßpunkte entsprechen älteren Objektiven des Universal-Elektronenmikroskops. Der Gültigkeitsbereich von (2) hinsichtlich D_p und U ist in Fig. 1 A und den unten besprochenen

[1]) M. von Ardenne, ZS. f. Phys., 1938, l. c., S. 341 u. 348, sowie B. von Borries u. E. Ruska, Mikroskopie hoher Auflösung mit schnellen Elektronen. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 19, 1940. Verlag Julius Springer, S. 268. — [2]) M. von Ardenne, ZS. f. Phys. **117**, 602, 1941.

Ausrechnungen Fig. 1 B und 1 C ausreichend berücksichtigt. Praktisch empfiehlt es sich, nicht genau mit f_{min} zu arbeiten, sondern mit etwa 10% größerer Brennweite (u. a. um die Scharfstellung zu erlauben).

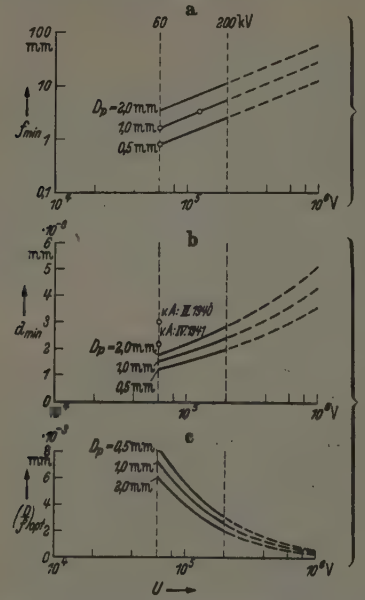


Fig. 1. Einfluß der Beschleunigungsspannung U auf Objektivbrennweite f_{min}, Auflösungsvermögen d_{min} und Öffnungsverhältnis $(D/f)_{opt}$.

Durch Einsetzen von (2) in die bekannte Gleichung für den Öffnungsfehler von Elektronenlinsen ergibt sich folgende Beziehung

$$d_{Öffn} = \frac{K}{2} \cdot \text{konst}^3 \cdot D_p \cdot U^3 \left(\frac{D}{f_{min}}\right)^3. \qquad (3)$$

Hierin stellt K eine von der Güte der Feldform (Rotationssymmetrie, Öffnungsfehlerkorrektion) abhängige Größe dar, die bei sehr sauberer mechanischer Ausführung der Linse etwa den Wert $K = 0{,}66$ hat. Die Senkung von D_p unter 0,5 mm ist auch in bezug auf K heute noch sehr problematisch, weil in der Regel der zunehmende Unsymmetriegrad eine den Fortschritt wieder aufhebende Vergrößerung von K bewirkt.

Aus den Gleichungen (1) und (3) sowie aus der Beziehung für den Beugungsfehler

$$d_{Beug} = \frac{\lambda}{A - A_K} = \frac{1}{D} \cdot \lambda \qquad (4)$$

$\left(\lambda = \sqrt{\frac{150}{U_{Volt}}} \cdot 10^{-7}\,\text{mm},\ \text{Objektivapertur}\ A = \text{Kondensorapertur}\ A_K\right)$

und ferner aus folgender Formel für die Fehlersuperposition

$$d_{min}^2 = d_{Öffn}^2 + d_{Beug}^2 \tag{5}$$

ergibt sich die nachstehende, wichtige *Beziehung für das erreichbare Auflösungsvermögen*:

$$d_{min} = 9 \cdot 10^{-5} \sqrt[4]{\frac{K}{2} \cdot \text{konst}^3 \cdot D_p} \cdot \sqrt[8]{U^3}. \tag{6}$$

Die höchste Auflösung wird jeweils erreicht mit dem zugeordneten *günstigsten Öffnungsverhältnis*:

$$\left(\frac{D}{f}\right)_{opt} = 2{,}9 \cdot 10^{-2} \sqrt[4]{\frac{2}{K} \cdot \frac{1}{\text{konst}^3 \cdot D_p}} \cdot \frac{\sqrt[8]{U}}{U}. \tag{7}$$

Wir sehen, daß die *Objektivlinsengüte*

$$G_{ob} = \frac{2}{K \cdot \text{konst}^3 \cdot D_p} \tag{8}$$

mit der dritten Potenz der Konstanten aus Gleichung (2) sich ändert. Nach Erschöpfung aller Möglichkeiten zur Verbesserung dieser Konstanten nimmt das Auflösungsvermögen gemäß Gleichung (6) nur noch sehr langsam zu, so daß (für jeden U-Wert) eine nur sehr schwer hinausschiebbare Grenze vorliegt. Zahlenwerte für d_{min} bzw. $(D/f)_{opt}$ als Funktion von U bringen die Ausrechnungen Fig. 1 B und C auf Grund der Daten aus Fig. 1 A und der übrigen Annahmen.

Nach Gleichung (6) verschlechtert sich das Auflösungsvermögen entgegen der allgemeinen bisherigen Auffassung mit der steigenden Spannung, wenn auch nur mit $\sqrt[8]{U^3}$. Diese Feststellung führte den Verfasser dazu, von 300 kV-Strahlspannung auf nur 200 kV als Betriebsspannung zurückzugehen. *Bei 200 kV sind bereits die unten näher besprochenen Vorteile des Betriebes mit höherer Strahlspannung gegeben, ohne daß schon eine kritische Minderung des Auflösungsvermögens erfolgt.* Praktisch tritt diese Minderung bei Übergang von beispielsweise 60 auf bis zu 200 kV-Strahlspannung deswegen noch wenig hervor, weil im Bereich der kleineren Spannung das Objektsystem so nahe an die Spitze des einen Polschuhes heranreicht, daß die Konstante der Gleichung (2) ungünstiger wird (Schwächung des Eisenquerschnittes, ein Anteil des Magnetfeldes geht für die Fokussierung verloren). Bei den längeren Brennweiten der höheren Spannung fällt dagegen dieser das Auflösungsvermögen verschlechternde Einfluß fort. — Solange für den Spannungsbereich um 60 kV durch die Genauigkeit der Mechanikerarbeit und durch die Mindestabmessungen handlicher Objekt-

trägerblenden der Betrieb mit den theoretisch erreichbaren kleinen Brennweiten auf Schwierigkeiten stößt, bringt das Arbeiten mit etwas heraufgesetzten D_p-Werten (Verminderung des Öffnungsfehlers bei vorgegebener Brennweite) eine Verbesserung.

In Darstellung Fig. 1 B ist auch das zur Zeit höchste und praktisch vom Verfasser erreichte Auflösungsvermögen[1]) (2,2 mμ) mit eingetragen, das nur noch wenig hinter den theoretisch heute erzielbaren Werten zurückbleibt.

Gleichung (7) bzw. die Ausrechnung Fig. 1 C zeigen, daß für steigende Strahlspannung das günstigste Öffnungsverhältnis des Objektivs (bzw. die günstigste Kondensorapertur) mit $\frac{\sqrt[8]{U}}{U}$ kleiner wird. Hierauf muß bei der Bemessung und Einstellung des Kondensorsystems Rücksicht genommen werden. Die Abnahme der günstigsten Objektivapertur mit der Spannung bedingt eine weitere Steigerung der an sich schon ungewöhnlichen Tiefenschärfe der Elektronenmikroskope und vereinfacht sehr die Aufrechterhaltung bester Abbildungsschärfe.

Wie schon einleitend angedeutet, ist Voraussetzung für die Wahrnehmbarkeit feinster, an der Grenze der Auflösung liegender Teilchen, daß die Kontrastverhältnisse ungeändert bleiben. Dies dürfte beim Übergang zu höheren Spannungen dann der Fall sein, wenn die durch die Objektivblende bestimmte reelle Objektivapertur umgekehrt proportional der Spannung herabgesetzt wird. Hierzu sei auf die Darstellung Fig. 2 und die dort enthaltenen Beziehungen verwiesen. Aus ihr und der Beziehung (2) für die Abhängigkeit der Minimalbrennweite von der Spannung läßt sich abschätzen, daß die Kontrasterkennbarkeit feinster Teilchen unabhängig von U nur von der absoluten Größe der Objektivblende abhängt. Jedoch erst bei sehr hohen Strahlspannungen kann die Kontrastmodulationskurve (Gradationskurve) durch Wahl anderer, größerer Objektivblenden (durch Betätigung des Blendenzungenvorschubes bei dem unten beschriebenen Instrument) der Massendicke des jeweiligen Objektes angepaßt werden.

Während das Auflösungsvermögen bei der Abbildung feinster Teilchen durch den Übergang auf bis zu 200 kV-Strahlspannung, wie wir gesehen haben, praktisch noch nicht wesentlich verschlechtert wird, nimmt das Auflösungsvermögen bei der Abbildung von Objekten größerer Massendicke schnell mit der Spannung zu. Der *Fehler durch räumliche Elektronenstreuung*

[1]) M. von Ardenne, Phys. ZS. 42, 72, 1941.

im Objekt *sinkt umgekehrt proportional mit der Beschleunigungsspannung*[1]), *so daß das Innere dickerer Objekte bei U-Zunahme von 60 auf 200 kV mit über 3,3mal höherem Auflösungsvermögen, d. h. mit über 10mal höherer Bildelementzahl abgebildet wird.* Diese Tatsache zusammen mit der *durch Wahl größerer und kleinerer reeller Objektivblenden dem Objekt anpaßbaren*

$$\text{Kontrast-steuerung} = \frac{\text{durchgelassene Elektronenintens.}}{\text{auffallende Elektronenintensität}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2f\vartheta}\right)^2;$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Vor.: Einzelstreuung}\\ \text{rel. Massenver-}\\ \text{änderung}\\ \text{vernachlässigt}\end{array}\right) \quad \vartheta = \frac{8}{U}\cdot\frac{U+511}{U+1022}\cdot Z\cdot\sqrt{\frac{\varrho\cdot\Delta x}{A}}$$

Bedingung für gleiche Kontrasterkennbarkeit eines Objektteilchens bei verschiedener Beschl.-Spg.:

$$\frac{D}{f}\cdot U\cdot\frac{U+1022}{U+511} = \text{Konst.}$$

Δx = Schichtdicke in 10^{-3} mm, Z = Ordnungszahl, ϱ = Dichte, U = Beschleunigungsspannung in kV, A = Atomgewicht, ϑ = Winkel der wahrscheinlichsten Ablenkung.

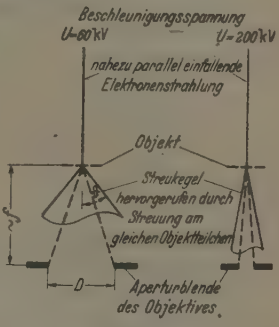


Fig. 2. Darstellung zur Wahrnehmbarkeit feinster Teilchen beim 200 kV-Elektronenmikroskop.

„Durchdringungsfähigkeit" der höher beschleunigten Elektronenstrahlung rechtfertigt schon allein die in dieser Mitteilung beschriebene neue Elektronenmikroskopanlage.

Einfluß der Beschleunigungsspannung auf Intensität, Objektbelastung und Bestrahlungsempfindlichkeit lebender Substanz.

Die Stromdichte des Endbildes hat beim Elektronenmikroskop den Wert[2])

$$j_E = \left(\frac{A_{ob}}{A_0}\right)^2\cdot\frac{1}{V^2}\cdot j_0 \qquad (9)$$

(A_0 = Apertur der Elektronenquelle, j_0 = Stromdichte der Kathode $A_{ob} = \frac{1}{2}(D/f)_{opt}$ = Objektivapertur, V = Gesamtvergrößerung). Mit steigender Spannung verbessert sich der Richtstrahlwert der Strahlerzeugung mit $\frac{1}{\sqrt{U}}$ und verschlechtert sich die Objektivapertur gemäß Gleichung (7) mit $\frac{\sqrt[8]{U}}{U}$. Es resultiert eine Abnahme der Stromdichte mit $\frac{\sqrt[4]{U}}{U}$. Die für Leuchtschirmhelligkeit und Belichtungszeit maßgebende *Energiedichte in der Endbildebene*, bei der in erster Näherung die Änderung

[1]) M. von Ardenne, ZS. f. Phys. 1938, l. c. — [2]) M. von Ardenne, ebenda **112**, 744, 1939.

der kinetischen Energie der Strahlelektronen zu berücksichtigen ist, vergrößert sich daher mit $\sqrt[4]{U}$ bei wachsender Strahlspannung.

Um den Einfluß der Strahlspannung auf die Belastungsverhältnisse lebender Substanz abzuschätzen, empfiehlt es sich, zunächst die *Ladungsdichte in der Objektivebene* $j_{ob} \cdot t$ zu ermitteln, die gerade noch eine ausreichende Schwärzung ($S = 0{,}5$) von n photographischen Aufnahmen gestattet. Diese ist

$$j_{ob} \cdot t = V^2 \cdot n \cdot j_{E_{(S=0,5)}} \cdot t \,\text{Coul/cm}^2. \tag{10}$$

Wird das Mikroskop mit der hinsichtlich Objektbelastung günstigsten Vergrößerung

$$V_{opt} = \frac{d_p}{d} \tag{11}$$

betrieben (d_p = Auflösungsvermögen der photographischen Schicht, d = Mikroskopauflösungsvermögen) und bezeichnet $j'_{ob} \cdot t'$ diejenige Zahl Coul/cm², die eine Abtötung lebender Substanz bewirkt, so ergibt sich folgender Ausdruck für *das höchste bei Untersuchung lebender Substanz erreichbare Auflösungsvermögen*:

$$d_{min_L} = d_p \cdot \sqrt{n \cdot \frac{j_{E_{(S=0,5)}} \cdot t}{j'_{ob} \cdot t'}}. \tag{12}$$

Bei Schumann-Platten ist $d_p = 10^{-2}$ mm und mit heraufgesetzter Schichtdicke für 200 kV etwa ein Wert $j_{E_{(S=0,5)}} \cdot t = 2 \cdot 10^{-12}$ Coul/cm² zu erreichen. Bei der gleichen Strahlspannung hat für einfache biologische Systeme (z. B. Sporen) die abtötende Elektronenbelastung nach Extrapolation[1]) von Messungen C. P. Haskins, sowie nach eigenen Beobachtungen mit der hier beschriebenen Mikroskopanlage ungefähr den Wert $j'_{ob} \cdot t' = 10^{-5}$ Coul/cm².

Für $n = 2$ (die Abtötung von 50% der Sporen tritt dann am Ende der Belichtungszeit der zweiten Aufnahme ein) berechnet sich unter vorstehenden Annahmen:

$$d_{min_L} \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ mm}.$$

Wir sehen, daß dieser Wert für das höchste zur Zeit bei der Untersuchung lebender Substanz anwendbare Auflösungsvermögen nur noch wenig größer ist, als das günstigste bei dieser Spannung überhaupt erreichbare Auflösungsvermögen d_{min}. Durch absichtliche Beschränkung der Mikroskopauflösung auf z. B. $d = 2 \cdot 10^{-5}$ mm ist die Schädigung bei der ersten Aufnahme auf $^1/_{20}$, und bei der zweiten Aufnahme auf $^1/_{10}$ der Abtötungs-

[1]) Vgl. M. von Ardenne, ZS. f. techn. Phys. **20**, 239, 1939 und Elektronen-Übermikroskopie, l. c., S. 106.

dosis leicht zu verringern. *Zum ersten Male werden übermikroskopische Untersuchungen an lebendem Material möglich.*

Die Steigerung der Strahlspannung hat an diesem Ergebnis einen praktisch ausschlaggebenden Anteil, denn die *Belastungsverhältnisse lebender Substanz bessern sich mit etwa* $U^{2,5}$, und zwar dank der Abnahme von $j_{E,S=0,5)} \cdot t$ mit etwa $1/U$ und der Verringerung der Empfindlichkeit lebender Substanz mit etwa $1/U^{1,5}$ in dem vorliegenden Spannungsbereich.

Die angestellten theoretischen Betrachtungen und Abschätzungen über Fehlergrößen, Kontrastempfindlichkeit und Objektbelastung als Funktion der Strahlspannung führten zusammen mit weitergehenden Untersuchungen über die Bemessung eines Elektronenmikroskops für 200 kV-Strahlspannung und darüber zu der Auffassung, daß nicht Erweiterung und Umbau eines Instruments für die bisher üblichen Strahlspannungen, sondern allein die Schaffung einer der *hohen Betriebsspannung in allen Teilen angepaßten Neukonstruktion* die zu erwartenden Vorteile gleichzeitig zur Wirkung bringen würde.

Gesamtkonstruktion.

Eine *Schnittzeichnung* des *200 kV-Universal-Elektronenmikroskops* ist in Fig. 3 wiedergegeben. Die *Außenansicht* des Instruments bringt die Photographie Fig. 4. Das Instrument erhebt sich bis zu einer Höhe von $3^1/_2$ m über dem Boden. Um einen für bis zu 300 kV ausreichenden Isolationsabstand gegen die Zimmerdecke zu erhalten, mußte eigens für das Instrument ein Raum mit zum Teil fast $4^1/_2$ m Deckenhöhe angebaut werden. Die große Bauhöhe des Instruments folgt aus den zur Isolierung notwendigen Abständen im Beschleunigungssystem und aus dem Wunsch, auch bei Spannungen über 200 kV hohe elektronenoptische Vergrößerungen mit den üblichen zwei Vergrößerungsstufen erzielen zu können.

Im Hinblick auf die sehr hohe Beschleunigungsspannung ist das Instrument nur für den Betrieb mit magnetischen Polschuhlinsen nach Ruska und von Borries eingerichtet. Wie bei dem normalen Universal-Elektronenmikroskop (l. c.) können fast alle für die Wirkung wesentlichen Bestandteile einzeln aus dem fertig montierten Instrument herausgenommen werden. In dieser Hinsicht geht die konstruktive Übereinstimmung sogar so weit, daß zum Teil die gleichen Objekt-Objektiveinsätze, die gleichen Projektionslinseneinsätze und die gleichen Beobachtungsmikroskope mit Einkristall-Leuchtschirm wahlweise in das eine oder andere Mikroskop eingesetzt werden können. Auch das *200 kV-Instrument ist für Hellfeld-, Dunkelfeld- und Stereobildbetrieb eingerichtet.*

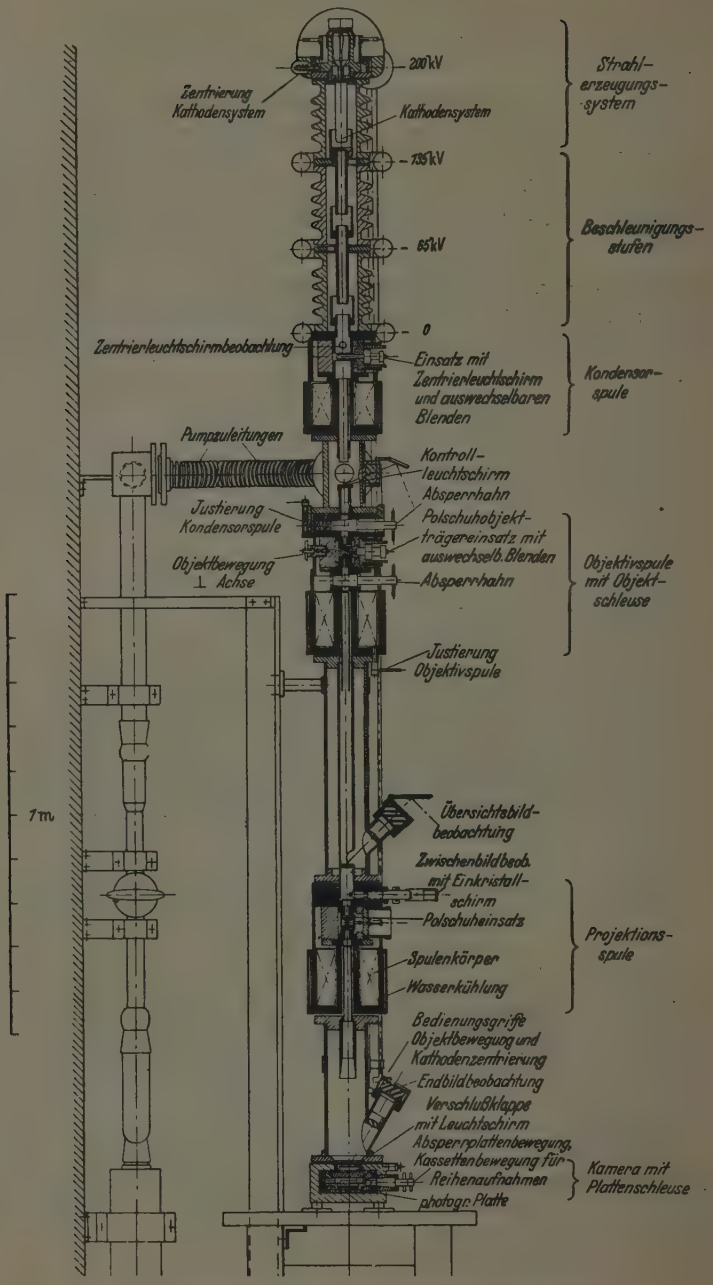


Fig. 3. Schnitt durch das 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop.

Die Beschleunigungsspannung ist gleichmäßig auf drei Stufen verteilt. In der zunächst gebauten Mikroskopausführung für 300 kV waren vier

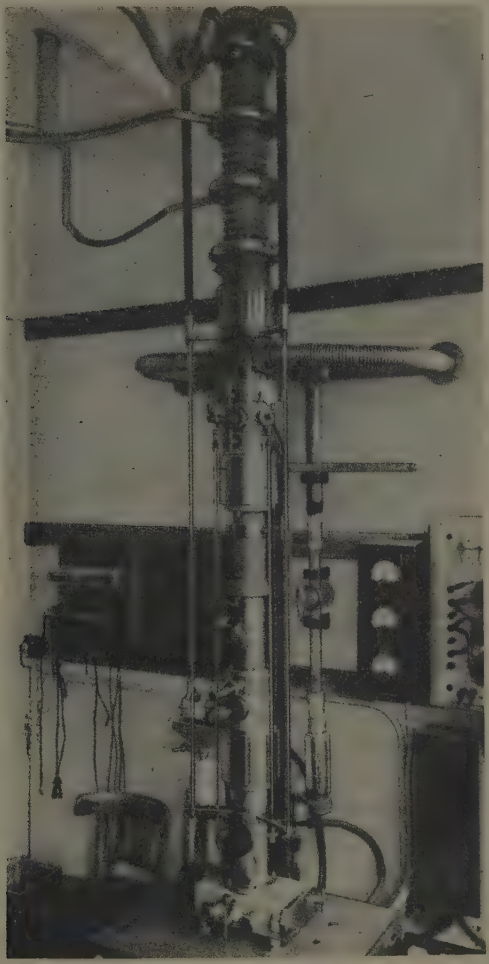


Fig. 4. Gesamtansicht des 200 kV-Universal-Elektronenmikroskops. Auflösungsvermögen bei Hellfeld z. Z. 4 mμ.

Beschleunigungsstufen der unten besprochenen Bauart enthalten. In allen Teilen des Instruments, besonders aber im Strahlerzeugungs- und Beschleuni-

gungssystem sowie im Kondensorsystem sind große Durchströmungsöffnungen vorgesehen, um eine vorzügliche Evakuierung des gesamten Innenraumes über die unterhalb der Kondensoreinheit mündenden Pumpleitungen von weitem Querschnitt zu gestatten. Bei den Linsensystemen wurde der stark heraufgesetzten Voltgeschwindigkeit der Elektronen durch Bemessung des Objektivsystems gemäß der oben gegebenen Theorie, durch Verdoppelung des Wickelraumes (Arbeiten nahe f_{min}) sowie durch Anwendung von Blenden größerer Massendicke Rechnung getragen. Verbesserungen der magnetischen Schirmung (größere Wandstärke der Eisenrohre) und die durch die höhere Strahlspannung herabgesetzte Empfindlichkeit gegen magnetische Störungen erlaubten auf die verschiebbare Permalloy-Außenabschirmung des ganzen Objektiv-Objektschleusen-Systems zu verzichten. Dank der sehr kleinen wirksamen Objektivapertur genügt in vielen Fällen die Scharfstellung des Mikroskops an Hand der Spannungs- und Strommesser auf Grund einer einmaligen Eichung. Eine in den Objektiveinsatz eingebaute *Abschattungsvorrichtung bringt die Erfüllung der experimentellen Vorbedingung für Aufnahme von Bildpaaren oder Bildreihen lebender Objekte.* Weitere elektronenoptische und konstruktive Einzelheiten sollen im folgenden Abschnitt in Verbindung mit den einzelnen Baueinheiten, aus denen sich das Instrument zusammensetzt, besprochen werden.

Praktische Ausführung der Anlage.

a) Strahlerzeugungssystem und Beschleunigungsstufen. Das *Strahlerzeugungssystem* und die ihm zugeordnete erste Beschleunigungsstufe sind im Prinzip genau so ausgebildet wie die entsprechenden Bauteile des normalen Universal-Elektronenmikroskops. Diejenigen Abmessungen, die die Durchgriffsverhältnisse bestimmen, konnten sogar völlig unverändert bleiben, da der Spannungssprung in der ersten Beschleunigungsstufe etwa die gleiche Größe hat wie die gesamte Betriebsspannung des älteren Instruments. Wieder befindet sich die Wolfram-Haarnadelkathode in einer einfach auswechselbaren Patrone. An Stelle der Glasteile sind durchweg keramische Isolierkörper und Konstruktionselemente aus Metall getreten, die durch Gummiringe vakuumdicht miteinander verbunden sind. Die die Kathodenpatrone enthaltende Wehnelt-Zylindereinheit kann gegenüber der Anodenbohrung, d. h. in der Ebene senkrecht zur Hauptachse des Instruments während des Betriebes verstellt und zentriert werden. Die Mechanik hierzu und das Übertragungsgestänge sind auf verschiedenen Photographien dieser Arbeit abgebildet. Die Auswechslung der Kathodenpatrone geschieht nach Querstellung des oberen Schleusenhahnes, Luft-

einlaß in den oberen Mikroskopteil und Lösung eines Andrückringes. Dieser Ring und die übrige äußere Gestaltung des Strahlerzeugungssystems sind in Fig. 5 photographiert.

Zur *Ausführung der Beschleunigungsstufen* sei auf die Aufnahme Fig. 6 verwiesen. Die zweite und dritte Stufe sind gleichartig ausgeführt und

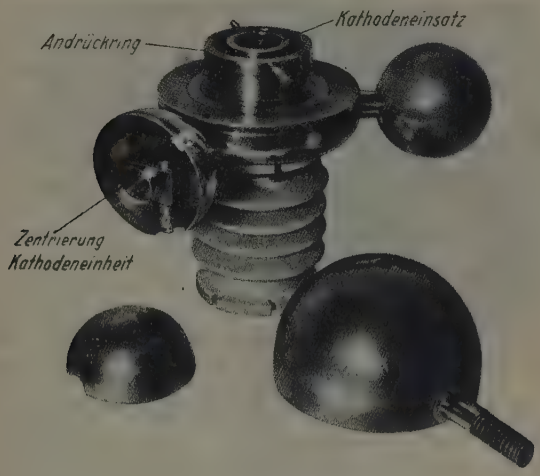


Fig. 5. Die äußere Gestaltung des Strahlerzeugungssystems.

enthalten im Innern der Isolatoren Überfangringe, um Wandladungen durch vagabundierende Ladungsträger, die bei den kleinen Aperturen im Kondensorsystem die Stabilität der Beleuchtung stören, zu beseitigen. Die verchromten und polierten Beschleunigungszylinder und Überfangringe, die an ihren hohen Feldstärken ausgesetzten Enden einen möglichst großen Krümmungsradius erhalten haben, sitzen genau zentral in mit großen Durchströmungsöffnungen versehenen Halteringen. Die Abdichtung zwischen Metallzwischenteil und Rohrisolator wird, wie auch an allen anderen Verbindungsstellen des Mikroskops, durch in Führungsringen liegende, etwas angefettete Gummiringe bewirkt. Die Sicherheit dieser Dichtung ist so vorzüglich, daß bei dem Zusammenbau des Instruments nicht eine einzige Vakuumstörung an Verbindungsstellen eingetreten ist. Die Außenansicht von Strahlerzeugungssystem und den zwei weiteren, bis zu je 80 kV aufnehmenden Beschleunigungsstufen, zeigt die Fig. 7.

Wie bei anderen unterteilten Entladungsrohren von Höchstspannungsanlagen verursacht die Linsenwirkung der Felder zwischen den Zylinderelektroden eine gewisse erwünschte Fokussierung. Die letztere bewirkt, daß bei geeigneter negativer Vorspannung des Wehnelt-Zylinders der Durchmesser des Elektronenbündels in der Zentrierblendenebene nur wenige Millimeter ist, trotzdem die Entfernung zwischen Kathode und Zentrierblende 50 cm beträgt. Es gelingt also leicht, das Elektronenbündel so schmal zu halten, daß die Zylinderelektroden nicht unmittelbar von Strahlelektronen getroffen werden. Erst diese Tatsache ermöglicht es, die Sicherheits- und Beruhigungswiderstände der Anlage genügend hochohmig (s. unten) zu halten und hierdurch mit relativ kleinen Beruhigungskapazitäten auszukommen.

Fig. 6. Bestandteile des Beschleunigungssystems.

Bei dem genannten Durchmesser des Elektronenbündels in der Zentrierblendenebene weist der Strahlstrom Beträge von etwa 20 bis 50 μA auf.

b) Kondensor- und Objektivsystem. Der zur Zentrierung des Strahlerzeugungssystems notwendige Leuchtschirm befindet sich als Ring auf dem Blendgehäuse des auswechselbaren Kondensorblendeinsatzes. Er wird über einen Metallspiegel und eine kleine seitliche Bohrung im oberen Teil der *Kondensoreinheit* beobachtet. Die durch einen Bleimantel verstärkte Metallmasse des Kondensors und ein starkes Bleiglasfenster schützen den Bedienenden vor der an der *Zentrierblende* entstehenden Röntgenstrahlung. Hinzu kommt, daß der Einblick zur Sicherung des genügenden Abstandes von den Hochspannungsleitungen nicht unmittelbar, sondern über einen weiteren, außen angebrachten Spiegel erfolgt. Die *Abbildungsverhältnisse des Kondensorsystems* sind so gewählt, daß die schon besprochenen sehr kleinen Kondensoraperturen ($A_K = 10^{-3}$ und weniger) leicht z. B. mit Hilfe der Kondensorblenden und der Kondensorstromstärken-Regelung herbeigeführt werden können.

Unterhalb des Kondensors münden in einem Zwischenteil links und rechts die im Innern 50 mm messenden *Pumpzuleitungen*. Ein weiterer, an dieser Stelle einschaltbarer, mit Maßstab versehener Leuchtschirm

gestattet ein genaueres Studium der Eigenschaften des ganzen Beleuchtungsteiles bei verschiedenen Betriebsverhältnissen.

Für den in Fig. 8 abgebildeten Mittelteil des Mikroskops sind die gleichen früher (l. c.) ausführlich beschriebenen Konstruktionsprinzipien befolgt

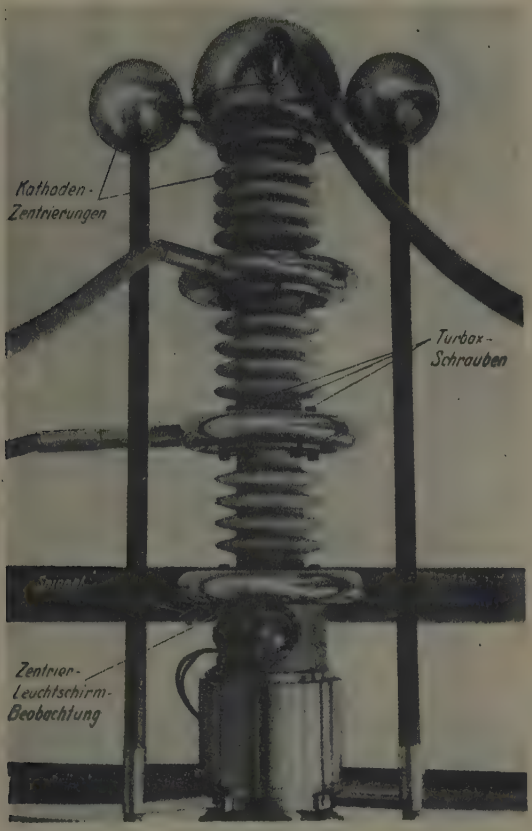


Fig. 7. Außenansicht des Strahlungserzeugungssystems und der Beschleunigungsstufen.

worden, die beim normalen Universal-Elektronenmikroskop sich verwirklicht finden. Am Steuermechanismus der Objektbewegung wurden einige Verbesserungen getroffen, um die Einrückung der Objektträgerbohrung und

anschließend die Einstellung des gewünschten Gesichtsfeldes durch Grob- und Feintriebe zu beschleunigen.

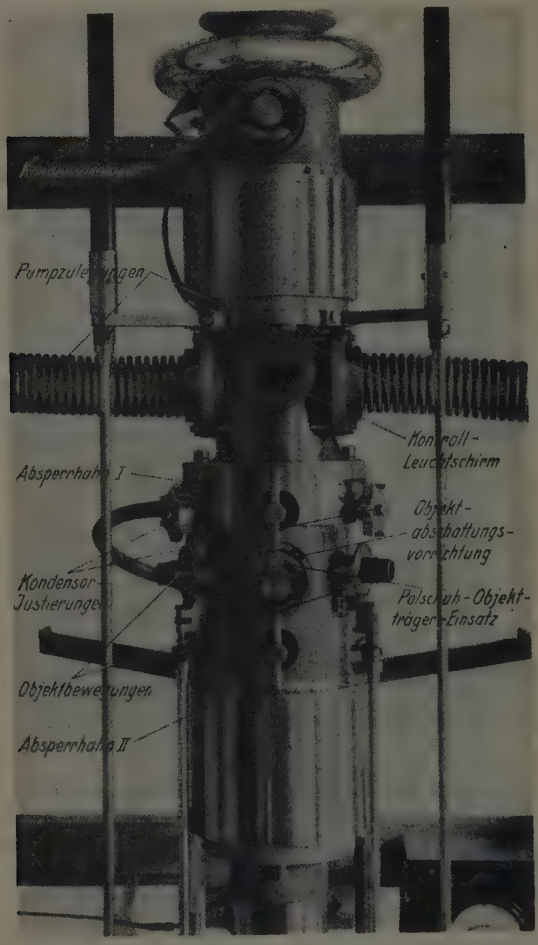


Fig. 8. Der Mittelteil des Instruments mit Kondensor- und Objektiveinheit.

Für das *Objektivsystem* stehen mehrere Polschuhobjektträger-Einsätze mit verschiedenen Brennweiten bis herab zu 2,6 mm und mit Objektschwenkeinrichtung zur Herstellung von Stereobildern zur Verfügung. Die

wichtigsten bei dem Instrument etwa realisierten Objektivdaten sind schon in der Darstellung Fig. 1 mit angegeben. Bei dem für die Untersuchung lebender Substanz entwickelten *Objektiv von 4 mm Brennweite* und der Bildweite von 840 mm hat die lineare *Vergrößerung der Objektivstufe den Wert 210.* — Die Tatsache, daß für 200 kV so kurze Objektivbrennweiten verwirklicht werden konnten, ist neben weiter unten angedeuteten Maßnahmen der Anwendung von Spezialeisen bei den Polschuhspitzen zu danken. Für die liebenswürdige Erschmelzung und Abgabe solcher Speziallegierungen ist der Verfasser Herrn A. Kussmann (PTR.) und der Friedrich Krupp A.-G., Essen, sehr verpflichtet. Das *Grundprinzip des Objektsystems*, der Kontakt zwischen Objektiv und Objektträgereinheit, durch das seinerzeit eine weitgehende Unempfindlichkeit des Mikroskops gegen mechanische Erschütterungen erreicht wurde, blieb unverändert bestehen. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß dieses Konstruktionsprinzip inzwischen auch beim Siemens-Übermikroskop eingeführt worden ist[1]), und hier sicherlich zu der gleichzeitig bekanntgegebenen Steigerung des Auflösungsvermögens beigetragen haben dürfte.

Die große Bedeutung der Anwendung sehr feiner Objektivblenden für die Wahrnehmbarkeit feinster Teilchen bei stark heraufgesetzter Strahlspannung wurde oben eingehend begründet. Die für das 4 mm-Objektiv vorgesehenen Blenden haben Öffnungsdurchmesser von 6, 25 und 80 μ. Praktisch wird in der Regel so verfahren, daß zunächst Instrument und Objektausschnitt mit der größeren Blende eingestellt werden, und dann mit Hilfe des Blendenvorschubes zur kleineren Blende übergegangen wird. Die 6 μ-Blende (Öffnungsverhältnis $1{,}5 \cdot 10^{-3}$) dient speziell zur Gewinnung von Dunkelfeldbildern.

Wichtige Maßnahmen haben sich aus dem Einsatz der zitierten, in diesem Heft beschriebenen Methode zur Prüfung von Elektronenlinsen ergeben. Untersuchungen mit Verschiebung des Testnetzes längs der Hauptachse zwischen Objektivschwerpunkt und Testbildebene zeigten, daß die resultierende zweite und kürzere Minimalbrennweite durch eine relativ *langbrennweitige Nachlinse* am Ort der Erregerwicklung bedingt ist. Nach Ausschaltung dieser Linse durch eine in Achsennähe eingebaute Kompensationswicklung sinkt das erste Brennweitenminimum auf kleinere f-Werte und rückt je nach der benutzten Bauart des Polschuhsystems auf eine Amperewindungszahl zwischen 4000 und 6000. — Eine im gleichen Sinne störend wirkende *kurzbrennweitige Nachlinse* entsteht dann, wenn

[1]) B. von Borries u. E. Ruska, Erg. d. exakt. Naturwiss., l. c., S. 271 u. 287.

hinter dem (um etwa den Betrag der Brennweite von dem Objektivschwerpunkt entfernten) Achsenschnittpunkt noch ein wesentlicher Teil des abklingenden Linsenfeldes liegt. Zur Abschwächung dieser Nachlinse, die als Folge der Polschuhsättigung bei hohen Amperewindungszahlen auftritt, wurden analoge Bauelemente in das Polschuhsystem eingefügt mit dem Ziel, das abklingende Objektivlinsenfeld zu kompensieren oder in Richtung auf den Objektivschwerpunkt zusammenzudrängen. In den Schnittzeichnungen dieser Arbeit sind die zur Beseitigung der beiden Nachlinsen getroffenen Maßnahmen nicht mit dargestellt.

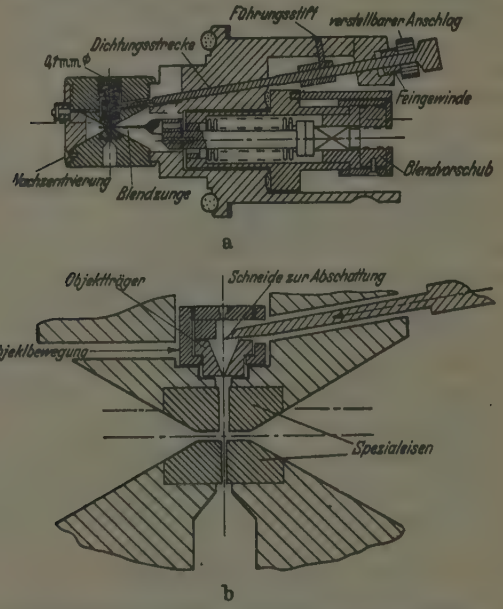


Fig. 9. Schnitt durch das Objektiv mit Objektabschattungsvorrichtung zur Untersuchung lebender oder empfindlicher Substanz.

Die Grundzüge der *Konstruktion des Objektiveinsatzes mit Abschattungsvorrichtung* sind den Zeichnungen Fig. 9 A und B zu entnehmen. Die Bohrungen in den Polschuhspitzen haben stark verschiedene Durchmesser und die gleiche Anordnung wie bei der seit 1939 für fast alle veröffentlichten Aufnahmen verwendeten Hauptoptik des normalen Universal-Elektronenmikroskops, deren Bohrungsdurchmesser sich wie 1 : 2 verhalten.

[1]) J. Dosse, ZS. f. Phys. 117, 316, 1941.

Hierbei liegt die größere Polschuhbohrung auf der Objektseite, so daß der gleiche unsymmetrische Feldverlauf längs der Achse gegeben ist, der kürzlich auch von anderer Seite als günstig erkannt wurde[1]). Die beiden feinen Bohrungen in dem Spezialeisen der Polschuhspitzen sind mit möglichst großer Genauigkeit rotationssymmetrisch ausgeführt. Mit Hilfe dreier am unteren Polschuh vorgesehener Schrauben mit Feingewinde erfolgt unter dem Zentriermikroskop eine Nachzentrierung der feinen Bohrung gegenüber der größeren. Vorschub und Zentrierung der Blendzunge sind analog ausgeführt wie bei den Objektiveinsätzen des älteren Instruments. Neu ist die Abschattungsvorrichtung zur Untersuchung strahlungsempfindlicher, insbesondere lebender Substanz.

c) Objektabschattungsvorrichtung zur Untersuchung lebender oder empfindlicher Substanz. Hauptbestandteil der *Abschattungsvorrichtung* ist eine sauber angeschliffene Schneide, die während des Betriebes gegenüber der Objektivachse verstellt werden kann, ohne daß die Objekt-Objektiveinheit kritisch erschüttert wird. Bei Verwendung von völlig unmagnetischem Material für den Schneidenteil und bei sehr gut gereinigter Oberfläche ist auch eine Beeinflussung des Strahlenganges durch die Hilfsvorrichtung vermieden, so daß außer bei Objekten mit starken Aufladungserscheinungen (z. B. Fasern und Spitzen) die Endbildlage unabhängig von der jeweiligen Schneidenstellung ist. Je nach der Ausführung des Objektträgers ist die Schneide etwa 0,5 bis 2,5 mm von der Ebene des Objektes entfernt. Zwischen bestrahlter und unbestrahlter Objektzone liegt daher ein Übergangsbereich, der bei der günstigsten Objektiv- und damit Kondensoraperture praktisch die Breite von etwa 0,5 bis 2,5 μ aufweist. Da aus Belastungsgründen bei der Untersuchung lebender Substanz meist mit schwacher elektronenoptischer Vergrößerung (Größenordnung 1000fach) und entsprechend großen Gesichtsfeldern gearbeitet wird, kann der vorerwähnte Übergangsbereich in Kauf genommen werden. Die Bedienung der Abschattungsvorrichtung bei der Untersuchung empfindlicher Substanz erfolgt so, daß zunächst die Schneide bis über die Objektivachse hinausgeschoben wird; es erscheint dann im Zwischen- und Endbild nur ein kleiner Teil des ganzen Objektes. Dieser Teil genügt jedoch, um die Scharfeinstellung vorzunehmen und die Eignung des jeweiligen Objektes zu beurteilen. Während der relativ langen Zeit für Einschaltung und Scharfstellung des Mikroskops liegen die von der Schneide verdeckten Teile des Objektes im Elektronenschatten. Erst nach der Scharfstellung und nur während der kurzen Aufnahmezeit selbst wird die Schneide zurückgezogen. Nach den oben schon mitgeteilten Abschätzungen und nach experimentellen Beobachtungen

an Bazillensporen erfolgt, insbesondere wenn der Vergrößerungsbemessung ein Auflösungsvermögen von z. B. nur $2 \cdot 10^{-5}$ mm zugelegt wird, eine Abtötung lebender Substanz durch die allein bei der Aufnahme eintretenden Objektivbelastung noch nicht. Man kann daher das Objekt entweder im Instrument oder unter günstigeren Lebensbedingungen außerhalb eine Zeitlang weiterleben lassen und dann z. B. durch eine zweite Aufnahme die durch den Lebensvorgang bedingten Veränderungen studieren. *Diese Möglichkeit ist für die übermikroskopische Forschung von grundlegender Bedeutung*, zumal nach zwei älteren Vorschlägen es sogar unter Umständen gelingt, auch im Vakuum unbeständige Substanzen zu untersuchen. Hierzu wird die Substanz entweder in eine (Nähr-)Flüssigkeit von niedrigem Dampfdruck, z. B. Hühnereiweiß ganz oder teilweise eingebettet[1]), oder aber sie wird eventuell mit umschließender Hilfsflüssigkeit in eine dickere Objektträgerfolie eingelagert[2]) und untersucht. Die erwähnten Einbettungsverfahren sind gerade bei höheren Strahlspannungen infolge der größeren Durchdringungsfähigkeit der Elektronen wesentlich einfacher zu verwirklichen als bei den bisher üblichen Spannungen.

Damit die Schneide zur Abschattung bis über die Objektivachse unmittelbar oberhalb des Objektträgers eingeschoben werden kann, ist gemäß Fig. 9 B die Objektträgerpatrone einseitig mit einer Aussparung versehen. Die Schneide befindet sich an einer sauber in den Messingkörper des Einsatzes eingepaßten Stange, die in der Übersichtsaufnahme Fig. 10 des in Fig. 9 gezeichneten Objektiveinsatzes oben mitabgebildet ist. Vor dem Einschieben wird der Mittelteil dieser Stange mit einer dünnen Fettschicht überzogen, die gleichzeitig die Vakuumdichtung übernimmt und bei der Ausführung sehr kleiner Schneidenverschiebungen die gleiche Rolle spielt wie die Fettschicht bei dem Gleit-Mikromanipulator von Zeiss. Die genaue Endlage der Schneide gegenüber der Objektivachse wird durch einen außen fein verstellbaren Anschlag zunächst unter Beobachtung des Zwischenbildleuchtschirms und dann des Endbildleuchtschirms festgelegt. Ein mit einer Rille versehenes Führungsstück sorgt in Verbindung mit dem gezeichneten Führungsstift dafür, daß die Schneide stets senkrecht zur Objektivachse orientiert bleibt. Das Führungsstück dient gleichzeitig als Anschlag, wenn die Schneide beim Auswechseln der Objektpatrone oder bei normalem Mikroskopbetrieb zurückgezogen wird. — Eine sehr wichtige Rolle spielt die etwa 15 mm oberhalb der Objektebene befindliche Abschluß-

[1]) M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie, l. c., S. 105. — [2]) M. von Ardenne, Angew. Chem. **54**, 144, 1941.

mutter, die zugleich die Feder für den Andruck der Objektträgerpatrone an die Gleitfläche trägt. Diese Schraube enthält eine Mittelbohrung von nur 0,1 mm und läßt allein den für die Funktion des Mikroskops unbedingt notwendigen Strahlungsanteil in das Objektivsystem gelangen. Die zusätzliche Abschirmung dient einem dreifachen Zweck. Sie setzt die in Objektnähe entstehende *Röntgenstrahlung*, die eine höchst unerwünschte

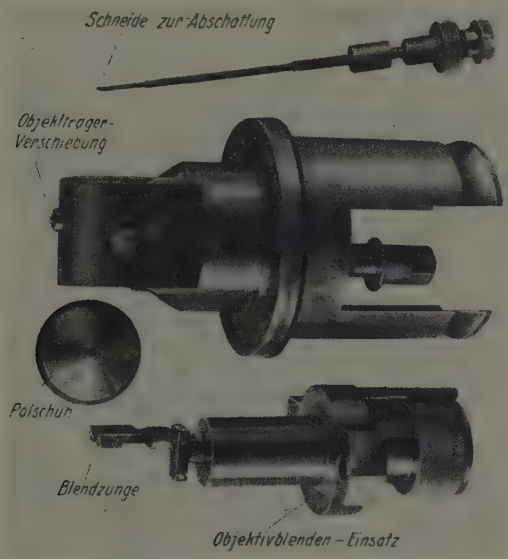


Fig. 10. Die Bestandteile des Objektiveinsatzes mit Abschattungsvorrichtung.

Schädigung der biologischen Objekte bewirken könnte, auf einen möglichst kleinen Betrag herab und bewirkt weiterhin, daß das Objekt stets im Elektronenschatten liegt, sobald der Objektträger zu weit aus der Mittellage entfernt wird und seine Bohrung nicht mehr im Gesichtsfeld des Zwischenbildleuchtschirmes kontrollierbar wäre. Schließlich verhindert sie die für Untersuchungen an wärmeempfindlichen Objekten kritische Aufheizung der Objektträgerblende.

Nicht nur für die Herstellung von Einzelaufnahmen oder Aufnahmereihen lebender oder strahlungs- bzw. temperaturempfindlicher Substanzen, sondern auch für Untersuchungen am Kondensorsystem ist die Abschattungsvorrichtung verwendbar. Mit ihrer Hilfe gelingt es, aus der beobachteten

Breite des Übergangsbereichs zum Elektronenschatten die jeweils im Betrieb tatsächlich eingestellte Kondensorapertur abzuschätzen.

An Stelle der Stange mit der Schneide zur Abschattung kann auch ein Metallrohr mit einer feinen Düse in das Objektiv eingesetzt und über die Düse Dampf oder disperse Materie während des Mikroskopbetriebes

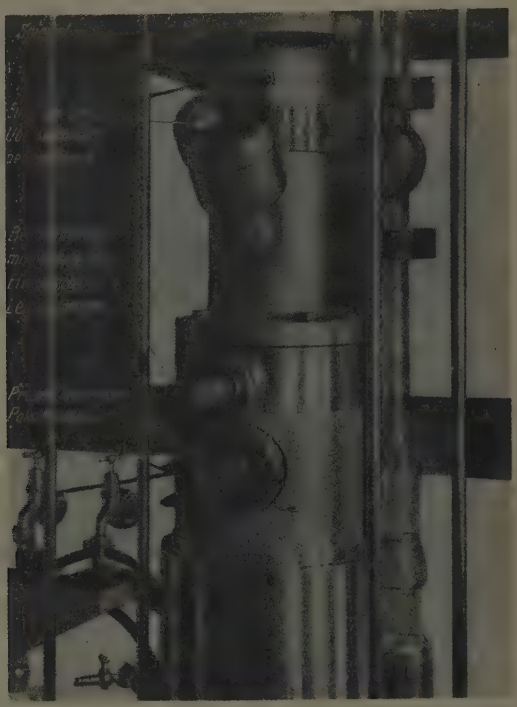


Fig. 11. Der Projektionslinsenteil des Mikroskops.

an das Objekt herangebracht werden. Im Hinblick auf diese Verwendung ist die schon erwähnte enge Bohrung der Abschlußmutter für die Objektpatrone ebenfalls sehr nützlich, da sie den Strömungswiderstand stark heraufsetzt. Auf diese Weise ist die früher vom Verfasser vorgeschlagene *Objektreaktionskammer* verwirklicht und gleichzeitig der Vorteil gegeben, daß die Austrittsdüse bei Beobachtung im Mikroskop (dank der hohen Tiefenschärfe) unter Anwendung des Gleit-Mikromanipulatorprinzips verschiedenen

Teilen des Objektes angenähert werden kann. Die Absaugfunktion bei dem besprochenen Betrieb mit Düse übernimmt die Hauptpumpe des Mikroskopes, die über besonders große Strömungsquerschnitte mit dem Objektivsystem verbunden ist.

d) Projektionssystem und Reihenbildkamera. Die Außenansicht des Projektionslinsenteiles bringt die Photographie Fig. 11. Unmittelbar unter dem Einblick zur Übersichtsbildbetrachtung befindet sich wieder ein *Beobachtungsmikroskop mit Einkristall-Leuchtschirm*, das in den Strahlen-

Fig. 12. Reihenbildkamera, Einblick für Endbildbeobachtung und Drehknöpfe für Grob-Fein-Objektverschiebung.

gang zur Erleichterung der Scharfstellung von Dunkelfeldbildern eingerückt werden kann. Maßnahmen zur Ausschaltung der besprochenen Nachlinsen sind im Projektionssystem nicht vorgesehen, da auch ohne diese mit einem der Projektionslinsen-Polschuheinsätze für 200 kV Brennweiten bis 4 mm im ersten und 1,5 mm im zweiten Minimum realisiert werden. In dieser Stufe beträgt die Bildweite 600 mm, so daß in der Projektionsstufe die lineare Vergrößerung den Wert 150 bzw. 400 erreichen kann. Die *maximale elektronenmikroskopische Gesamtvergrößerung des Instruments ist daher etwas über 80000* schon bei dem 4 mm-Objektiv mit Abschattungsvorrichtung. Dieser Wert sichert besonders bei Anwendung der hoch-

auflösenden Schumann-Platten eine große Reserve für alle vorkommenden Aufgabenstellungen.

Eine Ansicht von dem unteren Mikroskopteil mit Knöpfen für Grob- und Fein-Objektverschiebung neben dem Einblick für die Endbildbeobachtung und mit der Reihenbildkamera vermittelt die Aufnahme Fig. 12. Das Prinzip der Plattenschleuse und die Kassettendaten sind die gleichen wie beim normalen Universal-Elektronenmikroskop.

Die großen Strömungsquerschnitte, die beim ganzen Instrument vorhanden sind, bewirken, daß die für Objektwechsel und Plattenwechsel benötigten Zeiten gegenüber dem älteren Instrument um 30% abgenommen

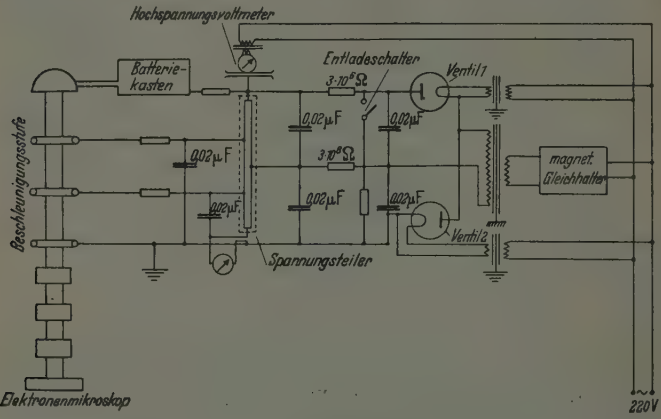


Fig. 13. Schema der Hochspannungsanlage.

haben. Diese Tatsache ist dem Umstand mit zu verdanken, daß durch die Spannungsaufteilung auf *drei* Beschleunigungsstufen trotz der höheren Spannung die *Empfindlichkeit der Strahlerzeugung* gegen schlechtes Vakuum nicht größer ist als bei dem älteren Mikroskop. Praktisch ist ausreichende Sicherheit des Instrumentes gegen Spannungsdurchbrüche gegeben, wenn bei laufender Pumpe ein unmittelbar hinter der Kühlfalle eingeschaltetes Leybold-Philips-Vakuummeter einen Druck von $2 \cdot 10^{-4}$ Torr anzeigt. Die Evakuierung selbst erfolgt durch eine normale Leybold-Gaede-Quecksilber-Diffusionspumpe, Modell E.

e) Hochspannungsanlage. Das *Schema der Hochspannungsanlage* ist in Fig. 13 dargestellt. Die Zeichnung enthält zugleich die wichtigsten Bemessungen. Die Stabilisierung der Anlage erfolgt über einen handelsüblichen magnetischen Gleichhalter. Dieser sorgt dafür, daß der dem

Haupttransformator zugeführte Strom auf etwa $\pm \frac{1}{2}$ % konstant bleibt. Der Haupttransformator und die Transformatoren für die beiden Ventile wurden von J. K. Görler, Berlin, als Öltransformatoren hergestellt und sind, wie auch alle übrigen Bauteile der Anlage, für Spannungen bis zu 300 kV bemessen. Eine Unterlage über die Bauweise des zum Anschluß der verschiedenen Beschleunigungsstufen notwendig gewesenen Spannungsteilers liefert die Zeichnung Fig. 14. Die Messung der jeweiligen Betriebsspannung wird durch ein Hochspannungsvoltmeter nach Starke-Schroeder vorgenommen. Alle für die Bedienung des Mikroskops wesentlichen Schaltmaßnahmen und Stromregelungen können unmittelbar am Mikroskop während der Beobachtung des Endbildes ausgeführt werden.

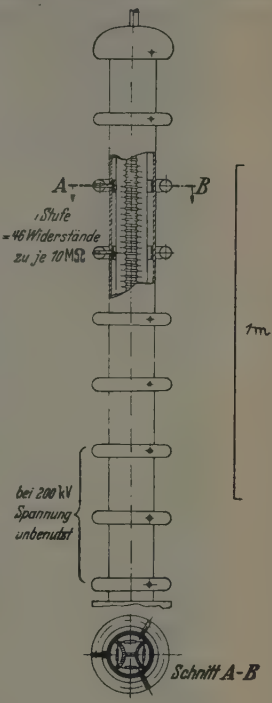


Fig. 14. Konstruktion des aus Radiowiderständen zusammengesetzten Spannungsteilers für bis zu 300 kV.

Hochspannungsanlage und Elektronenmikroskop haben zusammen ein Gewicht von über 5 t, so daß im Hause besondere Decken- und Mauerverstärkungen vor Errichtung der Anlage durchgeführt werden mußten. Einen Blick in die Hochspannungsabteilung vermittelt die Photographie Fig. 15. Im Vordergrund links ist vor dem Haupttransformator ein Teil des Batteriekastens sichtbar. Die von ihm ausgehende Heizspannung und Wehnelt-Zylinderspannung kann über isolierte Wellen während des Mikroskopbetriebes gesteuert werden. In der Mitte über einem Schaltpult sind der Spannungsteiler und rechts daneben eine Gruppe von Kapazitäten zu erkennen. Oberhalb des Spannungsteilers sind im Hintergrund die Glühventile und im Vordergrund verschiedene Sicherheitswiderstände mit Sprühschutzkappen abgebildet.

Ergebnisse.

Ein mit 220 kV Beschleunigungsspannung hergestelltes *Übersichtsbild einer Gruppe von Pleurosigma angulatum Diatomeen* ist in Fig. 16 wiedergegeben. Im Gegensatz zu den hoch gereinigten Diatomeen, von denen der

Verfasser früher Elektronenaufnahmen mit normaler Strahlspannung veröffentlicht hat[1]), handelt es sich hier um Exemplare mit *verklebten* Maschen. Gerade diese sind hervorragend geeignet, um die Abnahme der beiden

Fig. 15. Blick in die Hochspannungsabteilung der Mikroskopanlage.

Streufehler und die Zunahme der Durchdringungsfähigkeit mit wachsender Strahlspannung vor Augen zu führen. Hinzu kommt, daß in dem festgehaltenen Objektausschnitt die Diatomeen mit eigenartigen Querbalken

[1]) Z. B. Elektronen-Übermikroskopie, l. c., S. 387.

teilweise hintereinanderliegen. Bei *A* in Fig. 16 sehen wir auf einer relativ dünnen Lamelle Teilchen größerer Massendicke. Ähnliche Granula heben sich deutlich im Innern oder an den Querbalken ab. Bei *B* sehen wir trotz

Fig. 16. Übersichtsbild teilweise hintereinandergelagerter Pleurosigma angulatum-Diatomeen mit *verklebten Maschen*. Aufgenommen bei 220 kV. Reelle Objektivapertur $5 \cdot 10^{-3}$. Abschattungsschneide am oberen Rande des Gesichtsfeldes.

der Maschenverklebung deutlich und noch relativ scharf die Maschenstruktur. Bei *C* ist die Massendicke schon so angewachsen, daß trotz der hohen Strahlspannung die Schärfe der Abbildung bereits merklich nachgelassen hat. In noch stärkerem Maße ist dies bei *D* der Fall, wo die Maschen nicht mehr einzeln zu erkennen sind.

Die wahre Anordnung der Teile vermittelt die *Stereoaufnahme* Fig. 17. Unter Berücksichtigung des angegebenen kleinen Stereowinkels folgt aus dieser Abbildung, daß die Diatomeen zum Teil mit einem Abstand von mehreren μ hintereinanderliegen. Trotzdem sind ihre Randpartien durchweg recht scharf, als Folge der kleinen Kondensorapertur. Der Wert des tatsächlich eingestellten Öffnungsverhältnisses läßt sich mit Hilfe der Objektabschattungsvorrichtung, worauf schon oben hingewiesen wurde, ermitteln. Aus diesem Grunde ist in Fig. 16 oben rechts die Schneide der

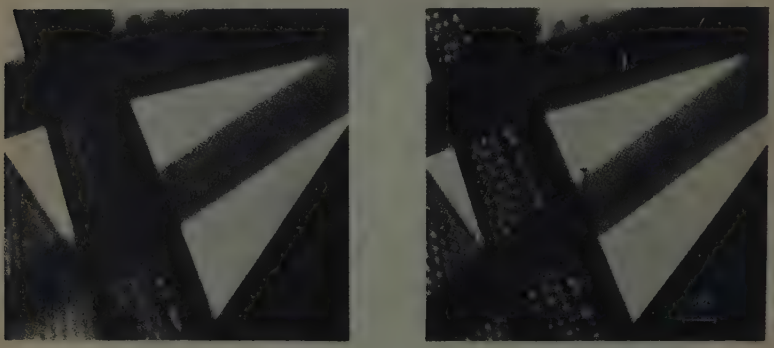


Fig. 17. Mit zwei verschiedenen Strahlspannungen gewonnenes Stereo-Elektronenbild von der in Fig. 16 abgebildeten Diatomeengruppe. Rechtes Teilbild aufgenommen bei 220 kV, linkes Teilbild aufgenommen bei 140 kV. Stereowinkel 3°.

Abschattungsvorrichtung etwas in das Gesichtsfeld eingerückt worden. Aus dem Schneidenabstand von 2,5 mm und dem gefundenen Übergangsbereich von etwa 1 μ folgt, daß bei dieser Aufnahme das Kondensoröffnungsverhältnis $4 \cdot 10^{-4}$ betrug. — Das Stereobild Fig. 17 soll nicht nur die räumliche Anordnung, sondern auch den Einfluß der Strahlspannung bei der Abbildung des betreffenden Objektes zeigen. Aus diesem Grunde ist nur das rechte Teilbild mit 220 kV Strahlspannung, das linke dagegen mit 140 kV hergestellt. Wir sehen im letzteren bereits deutlich die Abnahme der Schärfe, insbesondere bei der Abbildung der Maschen.

Recht eindrucksvoll ist eine *Gegenüberstellung der 220 kV-Aufnahme Fig. 16 und der* mit dem normalen Universal-Elektronenmikroskop *bei 60 kV gewonnenen Photographie Fig. 18.* Die Querbalken erscheinen bei 60 kV völlig undurchsichtig. Die verklebten Maschen sind kaum mehr wahrnehmbar und selbst die bei 220 kV fast durchsichtigen Lamellen an den oberen Rändern der Balken sind nahezu undurchsichtig geworden.

Die Gegenüberstellung möge genügen für den experimentellen Nachweis der Überlegenheit hoher Strahlspannung bei der Abbildung von Objekten der hier vorliegenden großen Massendicke (ungefähr 10^{-4} bis 10^{-3} g · mm/cm³).

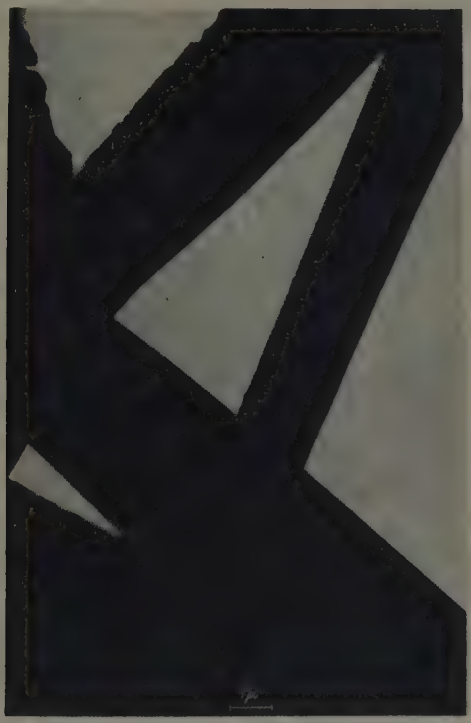


Fig. 18. Das gleiche Diatomeenpräparat der Abbildung Fig. 16, jedoch aufgenommen mit 60 kV Strahlspannung.

Mit 10 μ-Objektivblende gewonnene Bilder bestätigen weiter, daß mit der hohen Strahlspannung auch Objekte kleiner Massendicke noch kontrastreich abgebildet werden können.

Über die durchgeführte Untersuchung des Auflösungsvermögens wird bei späterer Gelegenheit berichtet werden. Aus der erhaltenen Testaufnahme folgt, daß zur Zeit das *Hellfeldauflösungsvermögen bei 200 kV* 4 mμ beträgt. — Die Strahlspannung von 220 kV, die beispielsweise dem Übersichtsbild Fig. 16 zugrunde liegt, erreicht nahezu die derzeitige Spannungsgrenze der Anlage. Die letztere wird bestimmt durch die

Durchschlagsfestigkeit der Beschleunigungsstufen. Diese ist in der heutigen Ausführungsform mit Spannungsaufteilung auf drei Stufen etwa 230 kV. Die untere Spannungsgrenze der Anlage beträgt ungefähr 85 kV, so daß mit den beiden Universal-Elektronenmikroskopen der Strahlspannungsbereich von 30 bis 220 kV lückenlos überdeckt wird.

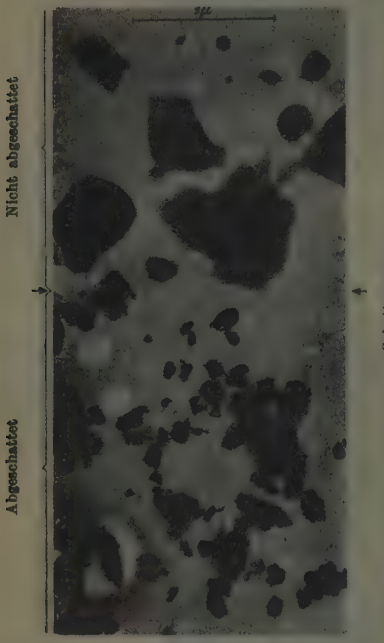


Fig. 19. Elektronenbild feinster Kristalle einer leicht schmelzbaren organischen Verbindung.
Oben: während der Einstellung zusammengeschmolzene Substanz. Unten: ungeschmolzene, nur während der Belichtungszeit bestrahlte Kristalle. Aufgenommen mit Hilfe der Objektabschattungsvorrichtung bei 200 kV Strahlspannung. Vergrößerung 21000fach.

Die Wirkung der *Objektabschattungsvorrichtung* bei der Untersuchung strahlungsempfindlicher bzw. wärmeempfindlicher Substanz veranschaulicht Fig. 19. Hier wurden feinste, mit dem Mikrovibrator auf der Objektträgerfolie verteilte Kristalle einer leicht schmelzbaren organischen Substanz aufgenommen. In dem oben abgebildeten Teil waren die Kriställchen während der ganzen Einstellungsdauer des Instruments dem Elektronenstrahl ausgesetzt und sind zu größeren Tropfen zusammengeschmolzen. In dem unten sichtbaren Ausschnitt lagen die Kristalle vor und nach der Belichtung ständig im Elektronenschatten. Die geringe, kurzdauernde Belastung während der Belichtung hat nicht ausgereicht, um die Kristalle zum Schmelzen zu bringen. *Da bei der hohen Spannung die Energieaufnahme im Objekt an sich schon stark herabgesetzt ist, werden durch die beschriebene Anlage sehr viele Substanzen, insbesondere der organischen Chemie, der elektronenmikroskopischen Untersuchung zugänglich, die vorher wegen ihres niedrigen Schmelzpunktes oder zu starker Strahlungsempfindlichkeit übermikroskopisch nicht erforscht werden konnten.* Praktisch können mit der beschriebenen Anlage noch Substanzen, deren Schmelzpunkt bei 50° C liegt, im festen

Aggregatzustand aufgenommen werden. — Die Bedienung der Abschattungsvorrichtung kompliziert die Gesamtbedienung des Mikroskops

Fig. 20. Ein Metallpulver mit schwammiger Oberfläche, aufgenommen mit 180 kV (oben) und 60 kV (unten). Nur auf dem mit 180 kV gewonnenen Bilde ist die schwammige Struktur wahrzunehmen. (Vergrößerung 52000fach.)

überraschend wenig. Die Spezialobjektträger mit 0.25 mm Bohrung oder mit Doppelbohrungen von 0,1 mm werden durch die Federeinheit des

Objektbewegungssystems zwangsläufig in diejenige Lage gedrückt, in der sie unter der vorgeschobenen Abschattungsschneide verschwinden. Mit Hilfe des sehr feingängigen Gewindes des Anschlages für die Schneidenstange kann völlig erschütterungsfrei und trotz der hohen Vergrößerungen sehr bequem die Schneide in die jeweils gewünschte Stellung gebracht werden. Die Lage ist so definiert, daß von Aufnahme zu Aufnahme der Anschlag nicht neu eingestellt zu werden braucht. Die Herstellung von Bildern empfindlicher Substanzen wird in der Weise vorgenommen, daß der Objektträger mit Hilfe der beiden Objektbewegungsgriffe so unter der Schneide vorbewegt wird, bis ein Teil des Objekts auf dem Endbildleuchtschirm erscheint. Anschließend wird nahezu gleichzeitig der Kameraverschluß betätigt und die Schneidenstange heraus- und wieder hineinbewegt.

Ein mit höherer Vergrößerung erhaltenes Elektronenbild bringt Fig. 20. Hier ist der gleiche Objektausschnitt eines Metallpulverpräparates mit 180 und 60 kV Strahlspannung photographiert. Erst die mit der hohen Strahlspannung durchgeführte Aufnahme enthüllt die für die Beurteilung des betreffenden Präparates höchst bedeutsame Tatsache, daß die Oberfläche eine schwammige Struktur besitzt.

Die hier wiedergegebenen Elektronenaufnahmen mögen genügen, um einen ersten Überblick über das Leistungsvermögen des 200 kV-Universal-Elektronenmikroskops zu geben. In weiteren Veröffentlichungen wird der Verfasser an anderem Ort ausführlicher auf Ergebnisse der beschriebenen Anlage eingehen und insbesondere über die gelungene Untersuchung lebender Substanz[1]) berichten.

Wieder ist der Verfasser Herrn Prof. Dr. P. Thiessen, dem Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie, für das ihm entgegengebrachte Vertrauen besonders verpflichtet, und Herrn H. Reibedanz für seine Hilfe bei der Ausarbeitung konstruktiver Details des Instruments. Die *Deutsche Forschungsgemeinschaft* hat die Schaffung des 200 kV-Universal-Elektronenmikroskops durch eine Forschungsbeihilfe entscheidend gefördert.

[1]) M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie lebender Substanz. Naturwissensch. **29**, 1941 (im Druck) und M. von Ardenne u. H. Friedrich-Freksa, Die Auskeimung der Sporen von Bacillus vulgatus nach vorheriger Abbildung im 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop. Naturwissensch. **29**, 1941 (im Druck).

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Theorie des elektrischen Elektronenmikroskops für Selbststrahler.

Von **A. Recknagel.**

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 19. Mai 1941.)

Zur Berechnung der Elektronenbahnen in Selbststrahlungs-Mikroskopen wird ein Verfahren angegeben, das frei ist von der bei Selbststrahlern nicht erfüllten Voraussetzung eines durchweg kleinen Neigungswinkels zwischen Elektronenbahn und optischer Achse. Die Methode kann als Reihenentwicklung nach $\sqrt{\varepsilon/U}$ betrachtet werden, wo ε die der Austrittsenergie entsprechende Spannung und U die Beschleunigungsspannung der Elektronen ist. Die Gaußsche Näherung wird berechnet, ferner werden die Abbildungsfehler bis zu einer solchen Näherung bestimmt, daß die sogenannten Fehler dritter Ordnung in den berechneten Werten vollständig enthalten sind. Die Begrenzung des Auflösungsvermögens durch die geometrisch-optischen und den chromatischen Fehler wird bestimmt und die errechnete Auflösung mit experimentellen Werten verglichen. Die Fehler haben um so weniger Einfluß auf das Auflösungsvermögen, je schmaler die Energieverteilungskurve der Elektronen ist und je größer das Feld an der Kathode ist. Es werden die Bedingungen festgelegt und an dem Immersionsobjektiv von Johannson erläutert, unter denen dieses System ein Übermikroskop werden kann.

Problemstellung. Das zur Abbildung elektronenemittierender Flächen bevorzugt benutzte elektronenoptische Abbildungssystem hat den in Fig. 1 dargestellten Aufbau. Vor der abzubildenden Kathode K steht die gegen K positive Lochscheibe A. Zwischen diesen beiden Elektroden befindet sich eine weitere Lochscheibe G (Gitter), deren Potential so gewählt wird, daß auf einem hinter der Anode A aufgestellten und mit A leitend verbundenen Leuchtschirm S das Bild der Kathode entsteht. Man bezeichnet solche Systeme als Immersionsobjektive[1]). Dieser Grundtyp kann natürlich in mannigfacher Weise verändert werden. So braucht die Fokussierungswirkung des Feldes nicht durch eine besondere Elektrode erzeugt werden. Die gleichen Dienste leistet vielmehr auch eine geeignete Krümmung der Kathode. Umgekehrt kann aber auch die Einführung weiterer Elektroden vorteilhaft sein, z. B. um den Korrektionszustand des Systems zu heben. Schließlich kann man das Fokussierungsfeld ganz von der Kathode absetzen,

[1]) Es sei angemerkt, daß Immersionsobjektive nicht nur zur Abbildung von Selbststrahlern dienen, sondern auch zur Abbildung durchstrahlter Folien benutzt wurden. (R. Behne, Ann. d. Phys. **26**, 372, 1936.)

indem man hinter dem Beschleunigungssystem eine elektrische Einzellinse oder eine Immersionslinse (übrigens auch eine magnetische Linse) anordnet.

Die Abbildungssysteme dieses Typs unterscheiden sich durch zwei Merkmale von den Durchstrahlungsmikroskopen, z. B. den Durchstrahlungs-Übermikroskopen. Eine erste Eigentümlichkeit ist es, daß bei Abbildung von Selbststrahlern der Brechungsindex im Bildraum um ein Vielfaches größer ist als der im Objektraum. Ist die abzubildende Fläche z. B. eine auf 1160° K geheizte Glühkathode, so entspricht die wahrscheinlichste Energie der austretenden Elektronen einer Beschleunigungsspannung $\varepsilon = 0{,}1$ V. Werden Elektronen dieser Energie durch die Anodenspannung $U = 1000$ V beschleunigt, so verhalten sich die Elektronengeschwindigkeiten, also die Brechungsindizes, von Objekt- und Bildraum wie 1 : 100. Auf dieser Eigenschaft beruht eine von Brüche und Scherzer[1]) angegebene Berechnung der Gaußschen Näherung, d. h. der in unmittelbarer Umgebung der optischen Achse verlaufenden Bahnen, die eine fehlerfreie optische Abbildung vermitteln.

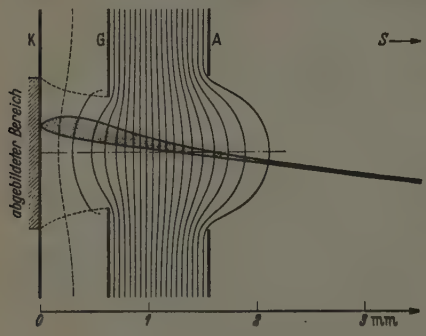


Fig. 1. Schema des Immersionsobjektivs.

Das zweite der obenerwähnten besonderen Merkmale ist das folgende: Während beim üblichen Mikroskop das Objekt in einem Raume mit konstantem Brechungsindex (konstantem Potential) liegt, schließt sich beim Selbststrahlungsmikroskop an das Objekt ein Feld, d. h. ein Raum von örtlich veränderlichem Brechungsindex, an. Dieses Feld ist im allgemeinen so stark, daß es *alle* Elektronen, also auch die unter einem Winkel von 90° zur optischen Achse emittierten, in das Abbildungssystem hineinzieht. Das kann man einsehen, wenn man das Feld zwischen der Kathode K und der Elektrode G (Fig. 1) für den Augenblick als homogen betrachtet. In diesem Falle scheinen die von einem Kathodenpunkt ausgehenden Elektronen nach Durchlaufen des Feldes näherungsweise von einem Punkt zu kommen, der so weit hinter K liegt, wie G vor K[2]). Die streifend austretenden Elek-

[1]) E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, S. 104. Berlin, Julius Springer, 1934. — [2]) E. Brüche u. O. Scherzer, l. c. S. 100.

tronen bilden mit der Achse einen Winkel $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\varepsilon/U_G}$. In der Öffnung von G hat also das von einem Kathodenpunkt ausgehende Elektronenbündel eine Halbbreite $2 \cdot \overrightarrow{KG} \cdot \sqrt{\varepsilon/U_G}$. Ist die Spannung des „Gitters" $U_G = 100$ V und ist ferner $\varepsilon = 0{,}1$ V, so ist diese Breite $^1/_{15}\,\overrightarrow{KG}$, die Elektronen werden bei normalen Systemen (Fig. 1) tatsächlich alle durch die Öffnung hindurch kommen. Diese Eigenschaft hat zur Folge, daß das beim Durchstrahlungsmikroskop verwendete Verfahren der Bahnberechnung beim Selbststrahlungsmikroskop versagt. Dieses Verfahren beruht nämlich darauf, daß bei den heute verwendeten Durchstrahlungsmikroskopen der Winkel zwischen Elektronenbahn und optischer Achse durchweg klein ist. Aus diesem Grunde kann die Elektronenbahn ähnlich wie in der Optik in Form einer Reihenentwicklung dargestellt werden, wobei als Entwicklungsparameter z. B. der Abstand des Objektpunktes von der optischen Achse und die Neigung zwischen Bahn und Achse am Objektpunkt dienen können. Beim Selbststrahlungsverfahren ist eine solche Entwicklung nicht gestattet, da, wie sich oben ergeben hat, die Neigung der Bahn zur Achse am Objektpunkt sehr groß sein kann. Daran ändert sich auch nichts Wesentliches, wenn man die Verteilung der Elektronenemission über die verschiedenen Winkel zur Kathodennormalen berücksichtigt und etwa bei Glühkathoden unter Annahme des Kosinus-Gesetzes findet, daß genau senkrecht zur optischen Achse keine Emission erfolgt. Die Aufgabe dieses Aufsatzes ist es nun, eine Methode zur Bahnberechnung zu geben, die für die besonderen Bedingungen des Selbststrahlungsmikroskops geeignet ist. Das benutzte Verfahren kann als Reihenentwicklung nach $\sqrt{\varepsilon/U}$, dem kleinen Verhältnis der Brechungsindizes von Objekt- und Bildraum, bezeichnet werden.

Berechnung der Gaußschen Näherung. Für das Potential des Immersionsobjektivs ergibt sich aus der Laplaceschen Gleichung (Vernachlässigung der Elektronenraumladung) die bekannte Entwicklung

$$\varphi(z, r) = \Phi(z) - \Phi''(z)\frac{r^2}{4} + \Phi^{(4)}(z)\frac{r^4}{64} - \cdots. \tag{1}$$

Dabei bedeutet $\varphi(z, r)$ das Potential am Raumpunkt zr, Φ das Potential auf der optischen Achse, r den Abstand des Raumpunktes von der optischen Achse, z seine Entfernung von der als eben vorausgesetzten Kathode, deren Abszisse also den Wert $z = 0$ hat. Das Potential wird so normiert, daß es an der Kathode verschwindet: $\varphi(0, r) = 0$. Daraus folgt:

$$\Phi(0) = \Phi''(0) = \Phi^{(4)}(0) = \cdots = 0. \tag{2}$$

Φ ist also eine ungerade Funktion von z, an der Stelle $z = 0$ ist demnach folgende Entwicklung mit konstanten Koeffizienten E, E_3 möglich:

$$\Phi(z) = Ez + \frac{E_3}{6} z^3 + \cdots. \tag{3}$$

Bei Verwendung des Achsenpotentials Φ lautet die Differentialgleichung für die Elektronenbahn in erster Näherung[1])

$$\sqrt{\varepsilon + \Phi}\, \frac{d}{dz} \sqrt{\varepsilon + \Phi}\, \frac{dr}{dz} + \frac{\Phi''}{4} r = 0, \tag{4}$$

wobei ε diejenige Beschleunigungsspannung ist, die der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen entspricht. Gesucht ist diejenige Lösung von (4) mit den bei $z = 0$ geltenden Anfangsbedingungen

$$r = r_a, \tag{5'}$$

$$r' = r'_a. \tag{5''}$$

Führt man die Hilfsveränderliche R durch die Gleichung[2])

$$r = \sqrt[4]{\frac{U}{\varepsilon + \Phi}}\, R \tag{6}$$

ein, wo U wieder die gegen Kathode gemessene Anodenspannung ist, so erhält man aus (4) die Gleichung

$$R'' + \frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\varepsilon + \Phi}\right)^2 R = 0 \tag{7}$$

und aus (5) die Anfangsbedingungen

$$R_a = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{U}}\, r_a, \tag{8'}$$

$$R'_a = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{U}} \left(r'_a + \frac{1}{4} r_a \cdot \frac{E}{\varepsilon}\right). \tag{8''}$$

Die allgemeine Lösung von (7) ist aus zwei partikulären Lösungen zusammenzusetzen, die hier abweichend von dem üblichen Verfahren folgendermaßen gewählt werden: Man denke sich an Hand von (3) das Potential in den Raum hinter der Kathodenoberfläche, also für negative z, fortgesetzt. Nun wird eine solche Verschiebung des Koordinatensystems vorgenommen, daß der Nullpunkt in den Punkt (hinter der Kathodenoberfläche) fällt, wo die Elektronengeschwindigkeit verschwindet. Man setzt also

$$\zeta = z + c \tag{9}$$

und bestimmt c durch die Gleichung

$$\varepsilon + \Phi(-c) = 0 \tag{10}$$

---

[1]) E. Brüche u. O. Scherzer, l. c. S. 83. An dieser Stelle ist nur eine etwas andere Festlegung des Potentialnullpunktes getroffen. — [2]) J. Picht, Ann. d. Phys. **15**, 926, 1932.

oder mit Rücksicht auf (3) durch

$$c = \frac{\varepsilon}{E} - \frac{1}{6}\,\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^3 + \cdots. \tag{11}$$

Die Bahngleichung (7) hat in dem neuen Koordinatensystem die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{3}{16}\left[\frac{\Phi'(\zeta - c)}{\varepsilon + \Phi(\zeta - c)}\right]^2 R = 0. \tag{12}$$

Die Lösung kann als Funktion von ζ und ε oder von ζ und c betrachtet werden. Im folgenden werden beide Möglichkeiten nebeneinander benutzt. In unmittelbarer Nachbarschaft von $\zeta = 0$ geht (12) über in

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{3}{16}\,\frac{R}{\zeta^2} = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$R_\alpha = \left(\frac{U}{E}\right)^{1/4} \cdot \zeta^{3/4}, \tag{13'}$$

$$R_\beta = \left(\frac{U}{E}\right)^{3/4} \cdot \zeta^{1/4}. \tag{13''}$$

Ausgehend von diesen Funktionen erhält man durch Reihenentwicklung nach ζ die folgenden beiden partikulären Lösungen der Bahngleichung (12):

$$R_\alpha = \left(\frac{U}{E}\right)^{1/4} \zeta^{3/4}\left\{1 - \frac{1}{8}\,\zeta\,\frac{\Phi''(-c)}{\Phi'(-c)} - \frac{3}{80}\,\zeta^2\left[\frac{2}{3}\,\frac{\Phi'''(-c)}{\Phi'(-c)} - \frac{3}{8}\left(\frac{\Phi''(-c)}{\Phi'(-c)}\right)^2\right] + \cdots\right\}, \tag{14'}$$

$$R_\beta = \left(\frac{U}{E}\right)^{3/4} \zeta^{1/4}\left\{1 - \frac{3}{8}\,\zeta\,\frac{\Phi''(-c)}{\Phi'(-c)} - \frac{1}{16}\,\zeta^2\left[\frac{2}{3}\,\frac{\Phi'''(-c)}{\Phi'(-c)} - \frac{5}{8}\left(\frac{\Phi''(-c)}{\Phi'(-c)}\right)^2\right] + \cdots\right\} \tag{14''}$$

oder näherungsweise

$$R_\alpha = \left(\frac{U}{E}\right)^{1/4} \zeta^{3/4}\left\{1 + \frac{1}{8}\,\frac{E_3}{E}\cdot\frac{\varepsilon}{E}\,\zeta - \frac{1}{40}\,\frac{E_3}{E}\,\zeta^2 + \cdots\right\}, \tag{15'}$$

$$R_\beta = \left(\frac{U}{E}\right)^{3/4} \zeta^{1/4}\left\{1 + \frac{3}{8}\,\frac{E_3}{E}\cdot\frac{\varepsilon}{E}\,\zeta - \frac{1}{24}\,\frac{E_3}{E}\,\zeta^2 + \cdots\right\}. \tag{15''}$$

Diese Funktionen genügen der Bedingung

$$R'_\alpha R_\beta - R'_\beta R_\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{U}{E}.$$

Für Raumpunkte in größerer Entfernung von der Kathode können die Lösungen natürlich nur durch numerische Integration der Differentialgleichung (12) gewonnen werden. Darauf braucht nicht näher eingegangen zu werden. Hier sei nur noch eine Formel über die Abhängigkeit der Lösungen von der Anfangsenergie angegeben[1]). Gesucht ist $\partial R_{\alpha(\beta)}/\partial\varepsilon$, wenn

[1]) A. Recknagel, Jahrb. d. AEG-Forsch. 7, Übermikroskop-Sonderheft 15, 1940.

$R_{\alpha(\beta)}$ als Funktionen von ζ und ε betrachtet werden. Ersetzt man in (12) c durch $c + \partial c$ und entwickelt nach ∂c, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{3}{16}\left[\frac{\Phi'(\zeta-c)}{\varepsilon+\Phi(\zeta-c)}\right]^2 R \\ = \partial c \cdot 2 \cdot \frac{3}{16}\left[\frac{\Phi'(\zeta-c)}{\varepsilon+\Phi(\zeta-c)}\right]^2 \left\{\frac{\Phi''(\zeta-c)}{\Phi'(\zeta-c)} - \frac{-\Phi'(-c)+\Phi'(\zeta-c)}{\varepsilon+\Phi(\zeta-c)}\right\} R, \\ = \partial c \cdot K \cdot R.\end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist R zunächst noch als Funktion von $c + \partial c$ zu betrachten. Auf der rechten Seite kann in R jedoch $\partial c = 0$ gesetzt werden, die rechte Seite also als gegebene Funktion betrachtet und die Gleichung nach bekannten Methoden über inhomogene Differentialgleichungen gelöst werden. Man findet $R_{\alpha(\beta)}(c + \partial c) = R_{\alpha(\beta)}(c) + \partial c \cdot \Lambda_{\alpha(\beta)}$ oder

$$\frac{\partial R_{\alpha(\beta)}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\Phi'(-c)} \frac{\partial R_{\alpha(\beta)}}{\partial c} = \frac{1}{\Phi'(-c)} \Lambda_{\alpha(\beta)}, \tag{16'}$$

wobei Λ folgender Ausdruck ist:

$$\Lambda_{\alpha(\beta)} = 2\frac{E}{U}\left\{R_\alpha \int_{\zeta}^{\zeta} K R_{\alpha(\beta)} R_\beta \,\mathrm{d}\zeta - R_\beta \int_{c}^{\zeta} K R_{\alpha(\beta)} R_\alpha \,\mathrm{d}\zeta\right\}. \tag{16''}$$

Setzt man insbesondere in (16') und (16'') $c = 0$ bzw. $\varepsilon = 0$, so hat man die Möglichkeit, die Bahngleichungen für endliche kleine Austrittsgeschwindigkeit aus den bei verschwindender Austrittsgeschwindigkeit geltenden Gleichungen zu berechnen.

Mit Hilfe der im vorstehenden berechneten partikulären Lösungen kann man nun die gesuchte Bahn mit den Anfangsbedingungen (8) aufstellen. Unter Berücksichtigung von (6) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} r = r_a'\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} \cdot 2\left(\frac{U}{\varepsilon+\Phi(z)}\right)^{1/4} \Big\{\Big[1 + \frac{7}{24}\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 + \cdots\Big] R_\alpha - \\ - \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2}\Big[1 - \frac{1}{40}\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 + \cdots\Big] R_\beta\Big\} \\ + r_a \frac{E}{U}\left(\frac{U}{\varepsilon+\Phi(z)}\right)^{1/4} \Big\{\Big[1 + \frac{3}{8}\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 + \cdots\Big] R_\beta - \\ - \frac{2}{3}\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{3/2}\left(\frac{U}{E}\right)^{1/2}\Big[1 + \cdots\Big] R_\alpha\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$r = r_a'\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} \cdot r_\alpha + r_a \cdot r_\beta, \tag{18}$$

so sind r_α und r_β den üblicherweise benutzten Lösungen eng verwandt. Die Funktionen r_α und r_β erfüllen die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} r_\alpha &= 0, \quad r'_\alpha = \sqrt{\frac{U}{\varepsilon}} \\ r_\beta &= 1, \quad r'_\beta = 0 \end{aligned}\right\} \text{für } z = 0,$$

$$r'_\alpha r_\beta - r_\alpha r'_\beta = \sqrt{\frac{U}{\varepsilon + \Phi(z)}}.$$

Die in der Formel (17) gewonnene Form der Bahngleichung, die sich bei der Berechnung der Abbildungsfehler als sehr zweckmäßig erweisen wird, erlaubt es, eine einfache Näherungslösung abzuleiten. Da nämlich die Länge ε/E (das ist diejenige Strecke, gegen die Elektronen der Energie $e\varepsilon$ im Feld E anlaufen können) klein ist gegen die sonst im Mikroskop vorkommenden Längen, kann für ein auf der Achse startendes Elektron ($r_a = 0$) näherungsweise geschrieben werden

$$r \approx r'_a \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} \cdot 2\left(\frac{U}{\varepsilon + \Phi(z)}\right)^{1/4} R_\alpha, \tag{19'}$$

oder etwas genauer

$$r \approx r'_a \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} \cdot 2\left(\frac{U}{\varepsilon + \Phi(z)}\right)^{1/4} \left[R_\alpha - \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} \cdot R_\beta\right]. \tag{19''}$$

Für ein parallel zur Achse startendes Elektron ($r'_a = 0$) findet man näherungsweise

$$r \approx r_a \frac{E}{U} \left(\frac{U}{\varepsilon + \Phi(z)}\right)^{1/4} \cdot R_\beta. \tag{19'''}$$

Nach diesen Gleichungen ergibt sich die Koordinate ζ_b des Bildpunktes aus

$$R_\alpha(\zeta_b) = 0, \tag{20'}$$

oder genauer aus

$$R_\alpha(\zeta_b) - \left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} R_\beta(\zeta_b) = 0. \tag{20''}$$

Für die Vergrößerung V findet man

$$V = \frac{E}{U} \cdot R_\beta(\zeta_b). \tag{20'''}$$

In den letzten Gleichungen kann in R_α und R_β noch $\varepsilon = 0$, also auch $\zeta_b = z_b$ gesetzt werden. Diese Näherungsgleichungen werden im folgenden noch mehrfach benutzt werden.

Abbildungsfehler „erster Ordnung". Wie bereits in der Einleitung auseinandergesetzt wurde, haben beim Immersionsobjektiv die meisten Elektronen an der Kathode so kleine Geschwindigkeiten, daß keine Begrenzung der Strahlöffnung durch Blenden erfolgt. Vielmehr tragen alle Elektronen,

auch die streifend austretenden, zum Bild bei[1]). Für diese Verhältnisse ist das hier entwickelte Rechenverfahren geeignet, das am einfachsten, wenn auch nicht ganz exakt, als Reihenentwicklung nach $(\varepsilon/U)^{1/2}$ bezeichnet werden kann. Der Ausgangspunkt für das Verfahren sind die Bahngleichungen, die in folgende Form gebracht werden können[2]):

$$\ddot{r} = \frac{e^2}{m^2}\cdot\frac{C^2}{r^3} + \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{e^2}{m^2}\frac{C^2}{r^3} - \frac{e}{m}\frac{\Phi''}{2}r + \frac{\Phi^{(4)}}{16}r^3 - \cdots, \tag{21'}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{e}{m}\Phi' - \frac{e}{m}\frac{\Phi'''}{4}r^2, \tag{21''}$$

$$\dot{\psi} = \frac{e}{m}\frac{C}{r^2}. \tag{21'''}$$

In der letzten Gleichung, die den Satz von der Konstanz des Drehimpulses ausspricht, bedeutet ψ den Drehwinkel um die optische Achse. C ist eine Integrationskonstante.

Das Verfahren besteht nun darin, diese Gleichungen schrittweise zu lösen, wobei jede Vereinfachung vermieden wird, die auf der Annahme kleiner Winkel zwischen Bahn und optischer Achse beruht, oder, was das gleiche ist, auf der Annahme, daß die Geschwindigkeitskomponente $\dot{z}$ näherungsweise mit dem Absolutbetrag der Geschwindigkeit übereinstimmt. Eine erste Näherung erhält man, wenn man in der Reihenentwicklung für φ nur die ersten Glieder benutzt. Dann ergeben sich an Stelle von (21') und (21'') die Gleichungen

$$\ddot{r} = \frac{e^2}{m^2}\cdot\frac{C^2}{r^3} - \frac{e}{m}\frac{\Phi''}{2}r, \tag{22'}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}\Phi'. \tag{22''}$$

Eine nächste Näherung ergibt sich, wenn die Reihenentwicklung so weit benutzt wird, wie sie in (21') und (21'') angeschrieben ist usw. Hier soll zunächst nur die erste Näherung berechnet werden. Durch Integration von (22'') ergibt sich

$$\frac{m}{2}\dot{z}^2 = \frac{m}{2}\dot{z}_a^2 + e\Phi = e\varepsilon_z + e\Phi. \tag{23}$$

---

[1]) Eine Begrenzung der Strahlöffnung hat man in dem Übergangsgebiet zwischen abgebildetem und nicht abgebildetem Kathodenbereich zu erwarten (Fig. 1). Dieser Übergangsbereich wird im folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen. — [2]) E. Brüche u. O. Scherzer, l. c. S. 116.

Dabei ist die Hilfsgröße ε_z durch diese Gleichung definiert als $e\varepsilon_z = \frac{m}{2}\dot{z}_a^2$, wo $\dot{z}_a$ die Geschwindigkeitskomponente in der z-Richtung an der Kathode ist. Ersetzt man in (22′) und (21‴) t durch z mit Hilfe von (23), so ergibt sich

$$\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}\,\frac{d}{dz}\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}\,\frac{dr}{dz} + \frac{\Phi''}{4}r = \frac{e}{2m}\frac{C^2}{r^3}, \tag{24′}$$

$$\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}\,\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{\frac{e}{2m}}\,\frac{C}{r^2}. \tag{24″}$$

Wie der Vergleich von (24) mit (4), wo von vornherein $C = 0$ gesetzt wurde, zeigt, sind die hier abgeleiteten Gleichungen identisch mit den Gleichungen der Gaußschen Näherung, nur ist überall ε durch ε_z ersetzt[1]). Diese Ähnlichkeit ist der Grund für die gewählte Bezeichnung Fehler „erster Ordnung". Natürlich stimmt die Lösung von (24) nicht mit der Gaußschen Näherung überein, sie enthält auch Beiträge, die bei dem üblichen Verfahren unter den Fehlern dritter, fünfter oder höherer Ordnung erscheinen würden. Nur für sehr kleine Neigungswinkel, wo ε_z näherungsweise mit ε übereinstimmt, erhält man die Gaußsche Näherung. Zur Lösung von (24′) wird zunächst das lästige Glied mit C^2 beseitigt durch die Substitution[2])

$$r = u \cdot e^{-i\psi}. \tag{25}$$

Die Größe u erfüllt dann die Gleichung

$$\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}\,\frac{d}{dz}\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}\,\frac{du}{dz} + \frac{\Phi''}{4}u = 0.$$

Sie hat folgenden Anfangsbedingungen bei $z = 0$ zu genügen:

$$u_a = r_a, \tag{26′}$$

$$u_a' = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z}} + i\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon_z}} = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{\varepsilon_z}\right)^{1/2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right), \tag{26″}$$

wo ε_r analog zu ε_z durch $e\varepsilon_r = \frac{m}{2}\dot{r}_a^2$ definiert ist. Die Lösung ergibt sich einfach aus (17), indem überall ε durch ε_z ersetzt wird. Bei R_α und R_β wird zur Kennzeichnung dieser Änderung ein Querstrich angebracht. Um festzulegen, daß es sich um die erste Näherung der Fehlerberechnung handelt, erhält u den Index 1.

$$\left.\begin{aligned} u_1 = {} & \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right)\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} \cdot 2\left(\frac{U}{\varepsilon_z + \Phi(z)}\right)^{1/4} \\ & \left\{[1 + \cdots]\,\bar{R}_\alpha - \left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}[1 + \cdots]\,\bar{R}_\beta\right\} \\ & + r_a\frac{E}{U}\left(\frac{U}{\varepsilon_z + \Phi(z)}\right)^{1/4}\left\{[1 + \cdots]\,\bar{R}_\beta - \frac{2}{3}\frac{E_3}{E}\left(\frac{\varepsilon_z}{E}\right)^{3/2}\left(\frac{U}{E}\right)^{1/2}[1 + \cdots]\,\bar{R}_\alpha\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

[1]) Formal ist das Problem also das gleiche, wie es bei der Berechnung des chromatischen Fehlers auftritt. — [2]) E. Brüche u. O. Scherzer, l. c. S. 117.

Zunächst werde die Formel (27) auf ein homogenes Feld angewandt. In diesem Fall kann man ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit $r_a = 0$ setzen, wodurch u in r übergeht. Die partikulären Lösungen (15) haben wegen $E_3 = E_5 = \cdots = 0$ die Form

$$\bar{R}_\alpha = \left(\frac{U}{E}\right)^{1/4} \bar{\zeta}^{2/4}, \qquad \bar{R}_\beta = \left(\frac{U}{E}\right)^{3/4} \cdot \bar{\zeta}^{1/4}.$$

Daher ergibt sich

$$r = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{E}}\left\{\sqrt{z + \frac{\varepsilon_z}{E}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{E}}\right\}. \tag{28}$$

Das ist aber genau die Formel, die man durch direkte Lösung der Bewegungsgleichungen im homogenen Feld erhält. Die Näherungslösung (27) gibt also im Sonderfall des homogenen Feldes die Bahn auch bei streifendem Austritt exakt wieder. Auf den allgemeinen Fall übertragen bedeutet das, daß mittels (27) die Bahn gerade im Gebiet des näherungsweise homogenen Feldes an der Kathode besonders gut approximiert wird, also in einem Gebiet, wo die großen Winkel zwischen Bahn und Achse besonders ins Gewicht fallen.

Im allgemeinen Fall interessiert nun nicht der ganze Verlauf der Elektronenbahn, sondern die Fehler, die in der Gaußschen Bildebene z_b auftreten. Da $\Phi(z_b) = U \gg \varepsilon_z$ und $z_b \gg \varepsilon_z/E$ ist, kann u_1 für die Bildebene durch Reihenentwicklung nach ε_z und Vernachlässigung höherer Potenzen noch weiter vereinfacht werden. Dabei ist zu beachten, daß $\vec{R}$ sowohl direkt als auch über ζ von ε_z abhängt. Die endgültige Entwicklung lautet

$$\begin{aligned} u_1(z_b) = &\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right)\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} \cdot 2\left\{\left[R_\alpha - \left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} R_\beta\right]\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_z}{U}\right) + \right. \\ &+ \frac{\varepsilon_z}{E}\left[\frac{\partial R_\alpha}{\partial \zeta} - \left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\frac{\partial R_\beta}{\partial \zeta}\right] + \frac{\varepsilon_z}{E}\left[\frac{\partial R_\alpha}{\partial c} - \left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\frac{\partial R_\beta}{\partial c}\right]\Big\} + \\ &\left. + r_a\frac{E}{U}\left\{R_\beta\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_z}{U}\right) + \frac{\varepsilon_z}{E}\frac{\partial R_\beta}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon_z}{E}\frac{\partial R_\beta}{\partial c}\right\}. \right. \end{aligned} \tag{29}$$

Dabei ist auf der rechten Seite in $R_{\alpha(\beta)}$ überall $\varepsilon_z = 0$, also auch $\zeta_b = z_b$ zu setzen[1]). Man führt nun zweckmäßigerweise ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen x-y-Ebene mit der Gaußschen Bildebene zusammenfällt, und dessen x-Achse durch den Bildpunkt geht. In diesem System bedeutet $u = r \cdot e^{i\Psi} = x + iy$. Bezeichnet man mit x_g, y_g $(= 0)$ die Koordinaten des Gaußschen Bildpunktes und bildet man die Differenz

$$u_1(z_b) - (x_g + iy_g) = x_1 - x_g + i(y_1 - y_g) = \xi + i\eta, \tag{30}$$

[1]) z_b hängt nach (20″) noch von ε ab.

so haben ξ und η die folgende anschauliche Bedeutung: Sie sind die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{Q_g Q}$, wo Q_g der Gaußsche Bildpunkt und Q der Durchstoßungspunkt der Näherungslösung u_1 mit der Gaußschen Bildebene ist. Die Entfernung dieses Durchstoßpunktes von dem Gaußschen Bildpunkt ist $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\xi + i\eta = &\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon-\varepsilon_z}} + i\sqrt{\frac{\varepsilon-\varepsilon_z-\varepsilon_r}{\varepsilon-\varepsilon_z}}\right)\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\times\\ &\times 2\left\{\left[\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2}-\left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\right]\frac{U}{E}\left[\left(1-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_z}{U}\right)V-\frac{1}{2V}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{U}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{U}}\right)+\frac{\varepsilon_z}{U}\frac{\partial R_\beta}{\partial\zeta}\right]-\right.\\ &-\frac{\varepsilon}{E}\left[\frac{\partial R_\alpha}{\partial c}-\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2}\frac{\partial R_\beta}{\partial c}\right]+\frac{\varepsilon_z}{E}\left[\frac{\partial R_\alpha}{\partial c}-\left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\frac{\partial R_\beta}{\partial c}\right]+\\ &\left.+r_a\cdot\frac{\varepsilon-\varepsilon_z}{U}\left\{\frac{V}{4}-\left(\frac{\partial R_\beta}{\partial\zeta}+\frac{\partial R_\beta}{\partial c}\right)\right\}\right\}.\end{aligned}\tag{31}$$

In R_α und R_β ist wieder $\varepsilon_z = 0$ und $\zeta = z_b$ zu setzen. Der Fehler ist nach dieser Formel vollständig durch die Gaußsche Näherung bestimmt. Wenn man in (31) die Glieder der Größenordnung $(\varepsilon/U)^{3/2}$ noch vernachlässigt, findet man für Achsenpunkte die besonders einfache Formel:

$$r(z_b) = 2\cdot\frac{U}{E}\cdot V\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2}-\left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\right].\tag{32}$$

Diese Formel zeichnet sich dadurch aus, daß der spezielle Feldverlauf des Abbildungssystems weitgehend herausgefallen ist. Es ist nur noch die Vergrößerung und die Feldstärke an der Kathode übriggeblieben. Daher ist zu vermuten, daß (32) in besonders einfacher Weise erläutert werden kann. Das ist in der Tat der Fall. In einem homogenen Feld der Stärke E und der (für das folgende belanglosen) Länge l scheinen die achsennahen Strahlen nach Durchlaufen des Feldes von einem Punkt zu kommen, der um die Strecke

$$l + 2\frac{\varepsilon}{E} - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}\sqrt{l+\frac{\varepsilon}{E}}$$

hinter der Kathode liegt (Gaußscher „Bildpunkt"). Ein beliebiger Strahl scheint näherungsweise von einem Punkt dieser Ebene zu kommen, der die Entfernung

$$2\left(\frac{\varepsilon_r}{E}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/2}-\left(\frac{\varepsilon_z}{E}\right)^{1/2}\right]$$

vom „Bildpunkt" hat. Dieser Wert ist nur von der Feldstärke, nicht von der Feldlänge abhängig. Denkt man sich nun die Kathode um den Faktor V

vergrößert abgebildet, so erhält man für den Schnittpunkt dieses Strahles mit der Objektebene die Formel (32) [1]).

Der Gesamtfehler setzt sich nach (31) aus zwei Summanden zusammen, von denen der erste unabhängig von r_a, dem Abstand des Objektpunktes von der optischen Achse, ist, also auch auf der optischen Achse auftritt, während der zweite linear mit r_a wächst. Ist bei konstanter Austrittsenergie $e\varepsilon$ auch noch ε_z konstant, während ε_r alle möglichen Werte annimmt, so bilden die damit erfaßten Elektronenbahnen an der Kathode alle den gleichen Winkel mit der Kathodennormalen, sie liegen also auf einem Kreiskegel mit der Spitze in der Kathode und der Achse in der Kathodennormalen. Der erste Summand von (31) zeigt, daß diese Strahlen die Gaußsche Bildebene in einem Kreis durchstoßen, dessen Radius $r(z_b)$ bei Beschränkung auf die erste Näherung durch (32) gegeben ist. Den größtmöglichen Radius erhält man für $\varepsilon_z = 0$, d. h. bei streifendem Austritt:

$$r_{max}(z_b) = 2\frac{\varepsilon}{E}V. \qquad (33')$$

Für den auf der optischen Achse gelegenen Objektpunkt ($r_a = 0$) fällt der Mittelpunkt dieses Kreises in den ebenfalls auf der Achse liegenden Bildpunkt. Die Zerstreuungsfigur ist ein Kreis mit dem durch (33') gegebenen Radius. Für Objektpunkte, die nicht auf der optischen Achse liegen ($r_a \neq 0$), ist der Mittelpunkt des Kreises aus dem Gaußschen Bildpunkt radial herausgeschoben, und zwar um so mehr, je größer der Winkel zwischen Kathodennormale und Elektronenbahn ist. So entsteht eine eiförmige Zerstreuungsfigur. Ergänzend sei schließlich noch das Verhältnis des Fehlers (31) zu den bekannten Fehlergrößen angegeben. Der erste auch für den Achsenpunkt vorhandene Teilfehler hat den Charakter der sphärischen Aberration (Öffnungsfehler), der zweite von r_a linear abhängige Teilfehler ist ein Komaglied.

Abbildungsfehler und Auflösungsvermögen. Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln erlauben eine Abschätzung, wie stark das Auflösungsvermögen durch die Abbildungsfehler begrenzt wird. Wären nur Elektronen einer einheitlichen Energie vorhanden, so würden sie wegen der sphärischen Aberration nach (33') innerhalb eines Kreises vom Durchmesser

$$\Delta = 4\frac{\varepsilon}{E}V \qquad (33'')$$

[1]) Eine solche schematische Betrachtung hat D. Langmuir durchgeführt (Proc. Inst. Radio Engs. **25**, 977, 1937). Er berechnet aber nicht den Zerstreuungskreis in der Gaußschen Bildebene, sondern den engsten Querschnitt, dessen Radius $0{,}6\,\varepsilon/E$ ist.

liegen. Zwei Objektpunkte, deren Bilder um diese Entfernung voneinander entfernt sind, werden durch das Mikroskop als zwei getrennte Punkte abgebildet, da sich die Zerstreuungskreise gerade berühren. In Wirklichkeit tritt nicht eine einzige Energie, sondern ein Energiespektrum endlicher Breite auf, einen chromatischen Fehler verursachend. Bei Abbildung von Photokathoden ist es im allgemeinen vernünftig, für $e\varepsilon$ den größten vorkommenden Energiewert einzusetzen (unter Vernachlässigung der Temperaturunschärfe der Energieverteilung). Bei einer Glühkathode der Temperatur T wird — zunächst probeweise — für $e\varepsilon$ die wahrscheinlichste Energie eingesetzt. Dann ergibt sich für den Abstand δ zweier gerade noch getrennt wahrnehmbarer Punkte

$$\delta_0 = \frac{\Delta}{V} = \frac{4kT}{eE}. \tag{34}$$

Benutzt man statt des Zerstreuungskreises der Gaußschen Bildebene den engsten Querschnitt[1]), so ergibt sich

$$\delta_u \approx \frac{kT}{eE}. \tag{35}$$

In der Größenordnung, die durch (34) und (35) gegeben ist, wird das wahre Auflösungsvermögen liegen. Im folgenden wird zur Sicherheit mit dem größeren Wert (34) gerechnet.

Die in (34) bzw. (35) enthaltenen Angaben über den Fehler sollen nun noch etwas besser begründet werden. Für den Grenzfall kleinster Austrittsenergien ($\varepsilon \to 0$) ist nach (20′) die Lage der „Bildebene" durch $R_a(z_b) = 0$ bestimmt. Diese Ebene stimmt natürlich nur näherungsweise mit der Bildebene für endliches ε überein. Bezeichnet man noch mit ϑ den Winkel zwischen Elektronenbahn und Achse an der Kathode, so ist der Abstand der Elektronenbahn von der Achse in der „Bildebene" für $r_a = 0$

$$r = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_z}{E^3}}\, V, \tag{36′}$$

$$= \frac{\varepsilon}{E} \cdot V \sin 2\vartheta. \tag{36″}$$

Den größten Abstand haben die unter dem Winkel $\vartheta = 45^0$ startenden Elektronen. Diese bestimmen den Radius r_{max} des Zerstreuungskreises: $r_{max} = \frac{\varepsilon}{E} V$. Der Zerstreuungskreis ist also in dieser Ebene nur halb so groß wie nach (33″). Unter Voraussetzung einer Maxwellschen Energieverteilung der austretenden Elektronen wird nun die Intensitätsverteilung in der betrachteten „Bildebene" berechnet. Gefragt wird zu diesem Zweck,

[1]) D. Langmuir, l. c.

wieviel Elektronen in der Sekunde innerhalb eines Kreises vom Radius ϱ um den Bildpunkt auftreffen. Bezeichnet man mit N die Gesamtzahl der aus 1 cm² der Kathode in der Sekunde austretenden Elektronen, so ist die Zahl der in den Winkelbereich zwischen ϑ und $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ emittierten Elektronen, deren Energie zwischen ε und $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ liegt, gegeben durch

$$\mathrm{d}N = N e^{-\frac{e\varepsilon}{kT}} \frac{e\varepsilon}{kT} d\left(\frac{e\varepsilon}{kT}\right) \sin 2\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \nu \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varepsilon. \tag{37}$$

Die emittierende Fläche soll so klein sein, daß die Längsausdehnung ihres Bildes gegen den Durchmesser des Zerstreuungskreises vernachlässigt werden kann. Unter dieser Voraussetzung kann der Intensitätsabfall am Rande des Zerstreuungskreises mit genügender Genauigkeit so berechnet werden, als ob die Elektronen alle von einem Punkt kämen[1]). Man teilt nun die Elektronen in zwei Gruppen, je nachdem ob ihre Energie kleiner oder größer ist als $e\varepsilon_0 = \frac{\varrho}{V} eE$. Die Elektronen der ersten Gruppe haben Zerstreuungskreise, die sämtlich innerhalb von ϱ liegen [vgl. (36″)]. Ihre Zahl ist proportional

$$\mathrm{d}N_1 = \int_0^{\varepsilon_0} \mathrm{d}\varepsilon \int_0^{\pi/2} \nu \, \mathrm{d}\vartheta.$$

Von den Elektronen größerer Energie treffen nur diejenigen in den Kreis vom Radius ϱ, deren Startwinkel ϑ zwischen 0 und ϑ_0 bzw. $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$ liegen, wo ϑ_0 nach (36″) durch folgende Gleichung bestimmt ist[2]):

$$\sin 2\vartheta_0 = \frac{\varrho E}{\varepsilon V}. \tag{38}$$

Die Zahl dieser Elektronen ist proportional

$$\delta N_2 = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \left(\int_0^{\vartheta_0} \nu \, \mathrm{d}\vartheta + \int_{\pi/2 - \vartheta_0}^{\pi/2} \nu \, \mathrm{d}\vartheta \right).$$

Die Gesamtzahl ist proportional zu δN, wo δN in folgende Form gebracht werden kann:

$$\delta N = \delta N_1 + \delta N_2 = N \left\{ 1 - \left(\frac{eE\varrho}{VkT} \right)^2 \int_1^{\infty} e^{-\frac{eE\varrho}{VkT} u} \sqrt{u^2 - 1} \, \mathrm{d}u \right\}.$$

---

[1]) Für $\varrho \to 0$ versagt diese Rechnung. — [2]) Die benutzten Formeln gelten nur für Austrittsenergien, die klein sind gegen die Energie nach der Beschleunigung. Nach der Maxwell-Verteilung kommen jedoch auch sehr große Energien vor, für die die obige Rechnung demnach nicht gilt. Der hierdurch bedingte Fehler wird jedoch nicht ins Gewicht fallen, da die Zahl der Elektronen mit großer Austrittsenergie außerordentlich klein ist.

Diese Gleichung gibt den prozentualen Anteil $\delta N/N$ der innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ auftreffenden Elektronen. Man kann statt dessen noch schreiben:

$$\frac{\delta N}{N} = 1 - \frac{eE\varrho}{VkT} \cdot K_1\left(\frac{eE\varrho}{VkT}\right), \qquad (39)$$

wo die Funktion K_1 z. B. bei Watson definiert ist[1]). Die numerische Auswertung ergibt, daß innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser $\varrho = \frac{kT}{eE} V$ ungefähr 40% der emittierten Elektronen liegen. In einen Kreis vom Halbmesser $2\frac{kT}{eE} V$, der Formel (34) entsprechend, fallen 72%. Die Rechnung zeigt also, daß der Zahlenfaktor in (34) bzw. (35) vernünftig ist. Mehr kann die vorliegende geometrisch-optische Betrachtung nicht leisten, sie soll keineswegs eine physikalisch-exakte Begründung dieses Zahlenfaktors sein.

Die Formeln (34) bzw. (35) geben an, wie das Auflösungsvermögen des Emissions-Übermikroskops durch den chromatischen und die geometrisch-optischen Fehler begrenzt wird. Nach diesen Formeln ist der Abstand zweier gerade noch getrennt abgebildeter Punkte proportional der Breite der Energieverteilung, bei Glühkathoden also der absoluten Temperatur. Der Abstand ist ferner umgekehrt proportional der Feldstärke an der Kathode. Soll z. B. eine Glühkathode von 1160° K ($kT = 0{,}1$ e-Volt) abgebildet werden mit dem Ziel, die Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops (0,2 μ) zu unterschreiten, so braucht man nach (34) eine Feldstärke von 20000 V/cm an der Kathode.

Ein Versuch, das Auflösungsvermögen des Immersionsobjektivs (Fig. 1) experimentell zu ermitteln, wurde in den Anfängen der elektronenoptischen Entwicklung von Brüche und Knecht[2]) gemacht. Bei ihrer Anordnung war die Anodenspannung etwa 750 V entsprechend einer Feldstärke von ungefähr 1500 V/cm[3]). Das experimentell durch Aufsuchen eng benachbarter, aber getrennt abgebildeter Punkte sichergestellte Auflösungsvermögen betrug 3 μ, während die Formel (34) den Wert 2,5 μ ergibt. Die Übereinstimmung beider Zahlen ist bemerkenswert. Da aber bei größerem experimentellem Aufwand, als er 1934 möglich war, sich wohl noch ein besseres Auflösungsvermögen ergeben würde, soll die Übereinstimmung nur als Beweis dafür angesehen werden, daß (34) eine obere

[1]) G. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922. S. 172. Numerische Tabelle S. 698. — [2]) E. Brüche u. W. Knecht, ZS. f. Phys. **92**, 462, 1934. — [3]) Vgl. die Potentialfeldmessungen bei H. Johannson, Ann. d. Phys. **18**, 385, 1933.

Grenze des Auflösungsvermögens gibt. Andererseits kann man aber gerade wegen der Übereinstimmung der Zahlen schließen, unter welchen Bedingungen mit einer Überschreitung des lichtmikroskopischen Auflösungsvermögens zu rechnen ist. Man hat nach (34) alle Spannungen so weit proportional zu erhöhen, daß die Feldstärke an der Kathode den Wert 20000 V/cm annimmt. Das bedeutet: Bei Anwendung einer Anodenspannung von etwa 10000 V bei dem Johannsonschen Immersionsobjektiv werden die Abbildungsfehler so klein, daß das Immersionsobjektiv zum Selbststrahlungs-Übermikroskop werden kann. Wie weit sich diese Voraussage erfüllen wird, läßt sich zur Zeit wegen der experimentellen Schwierigkeiten noch nicht sagen.

Abbildungsfehler „dritter Ordnung". Um die Abbildungsfehler zu berechnen, die den üblicherweise als Fehler dritter Ordnung bezeichneten Größen analog sind, wird in den Bewegungsgleichungen die Reihenentwicklung des Potentials soweit benutzt, wie sie in (21′) und (21″) angeschrieben ist. Viele Einzelheiten der Rechnung sind dabei die gleichen wie bei dem üblichen Verfahren der Fehlerberechnung[1]). Zunächst wird z an Stelle von t als unabhängige Veränderliche und u durch die Substitution (25) an Stelle von r als abhängige Veränderliche eingeführt. Dann ergibt sich aus (21′):

$$\dot{z}\,\frac{d}{dz}\,\dot{z}\,\frac{du}{dz} = e^{i\psi}\left(-\frac{e}{m}\,\frac{\Phi''}{2}\,r + \frac{e}{m}\,\frac{\Phi^{(4)}}{16}\,r^3\right). \tag{40}$$

Integration von (21″) liefert den Wert von $\dot{z}$,

$$\frac{m}{2}\,\dot{z}^2 = e\varepsilon_z + e\Phi - \frac{1}{4}\int_0^z e\Phi'''\,r^2\,dz, \tag{41}$$

der in (40) einzusetzen ist. Benutzt man noch neben u die konjugiert komplexe Größe $u^* = re^{-i\psi}$, so findet man

$$(\varepsilon_z + \Phi)\,u'' + \frac{1}{2}\Phi' u' + \frac{1}{4}\Phi'' u = \frac{\Phi^{(4)}}{32}\,u\cdot u u^* + \frac{\Phi'''}{8}\,u' u u^* + \frac{u''}{4}\int_0^z \Phi''' u u^*\,dz. \tag{42}$$

Da die rechte Seite ein kleines Störungsglied ist, wird hier u durch die Näherungslösung u_1 nach (27) ersetzt. Die rechte Seite ist dann eine bekannte Funktion von z, die Differentialgleichung ist zwar inhomogen, aber

[1]) Vgl. z. B. O. Scherzer in Busch-Brüche, Beiträge zur Elektronenoptik, S. 33. Leipzig, Joh. Ambr. Barth.

linear. Außerdem hat man den Vorteil, daß sich das Integral auf der rechten Seite auswerten läßt:

$$(\varepsilon_z + \Phi)\,u'' + \frac{1}{2}\,\Phi' u' + \frac{1}{4}\,\Phi'' u = \frac{\Phi^{(4)}}{32}\,u_1 \cdot u_1 u_1^* +$$

$$+ \frac{\Phi'''}{8}\,u_1' \cdot u_1 u_1^* + \frac{\Phi''}{4}\,u_1'' \cdot u_1 u_1^* + u_1''[(\varepsilon_z + \Phi)\,u_1' u_1^{*\prime} - (\varepsilon - \varepsilon_z)] = S. \quad (43)$$

Die Lösung lautet

$$u = u_1 + w, \quad (44)$$

$$w = -\frac{\bar{r}_\beta}{\sqrt{U}} \int_0^z \frac{S \bar{r}_\alpha}{\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}}\,\mathrm{d}z + \frac{\bar{r}_\alpha}{\sqrt{U}} \int_0^z \frac{S \bar{r}_\beta}{\sqrt{\varepsilon_z + \Phi}}\,\mathrm{d}z. \quad (45)$$

Man kann sich überzeugen, daß S auch für $\varepsilon_z = 0$ bei $z = 0$ einen endlichen Wert hat, selbst wenn einzelne der Bestandteile von S nach (43) an diesem Punkt unendlich werden. Daher konvergieren auch die Integrale (45). Die Diskussion wird nun in der üblichen Form so durchgeführt, daß der Gesamtfehler in einzelne Teilfehler aufgespalten wird

$$w = A r_a^3 + B r_a^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right) +$$

$$+ C r_a^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} - i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right) +$$

$$+ D r_a \frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right)^2 + E \cdot r_a \frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U} +$$

$$+ F \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right). \quad (46)^1)$$

Die Teilfehler bedeuten in der angeschriebenen Reihenfolge: Verzeichnung, Bildfeldwölbung, Astigmatismus, Komascheibchen, Komastrich und Öffnungsfehler. Die Diskussion der einzelnen Fehler kann mit einer kleinen Änderung z. B. aus der schon zitierten Arbeit von Scherzer [2]) entnommen werden. Wie diese Übertragung durchzuführen ist, soll hier nur am Beispiel der Bildfeldwölbung genauer ausgeführt werden. Zu diesem Zweck werden alle Elektronenbahnen betrachtet, die fest vorgegebenen Werten von ε und ε_z, aber veränderlichem ε_r entsprechen, also alle Elektronen, die mit vorgegebener Energie unter einem festen Winkel gegen die Kathodennormale starten. Der Zahlenwert von $\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}$ beschreibt dann in der komplexen Zahlenebene einen Kreis. Wären alle anderen Fehler,

[1]) Der Fehlerkoeffizient E ist nicht mit dem früher benutzten Entwicklungskoeffizienten zu verwechseln. — [2]) O. Scherzer, l. c.

also auch die Abbildungsfehler erster Ordnung, nicht vorhanden, so würde dem Glied mit B zufolge der Durchstoßungspunkt des Strahles mit der Gaußschen Bildebene einen Kreis um den Bildpunkt beschreiben. Der Verlauf der Elektronenbahn in der Nähe der Bildebene könnte näherungsweise leicht angeschrieben werden, indem man die Strahlneigung aus (27) entnimmt. In einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt der Bildpunkt ist, würde die Bahn laut n

$$B r_a^3 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right) + z \left[r_a \cdot r_\beta' + \right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}} + i \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_z - \varepsilon_r}{\varepsilon - \varepsilon_z}}\right) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{U}\right)^{1/2} r_\alpha'\right] = w.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von ε_r an einer Stelle $z = d$, die durch

$$d = -\frac{B r_a^2}{r_\alpha'} \approx -B r_a^2 V$$

gegeben ist. Die Größe d ist die Entfernung des Strahlvereinigungspunktes von der Gaußschen Bildebene. Der Krümmungsradius der Bildschale ist

$$\frac{1}{R_m} \approx 2 \frac{B}{V}\ ^{1}).$$

Für die übrigen Fehler sollen nur kurz die wichtigsten Eigenschaften angeführt werden.

Verzeichnung: Die Verschiebung in radialer Richtung ist $A r_a^3$, die relative Verschiebung $\frac{A}{V} r_a^2$.

Astigmatismus: Die Differenz der reziproken Krümmungsradien der beiden Bildschalen ist

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \approx 4 |C| \cdot \frac{1}{V}.$$

Koma. Komascheibchen und Komastrich geben zusammen die bekannte keilförmige Verwischungsfigur mit der Spitze im Bildpunkt. Ein Fehler vom Charakter des Komastriches trat auch unter den Fehlern „erster Ordnung" auf.

Öffnungsfehler: Dieser Fehler tritt als einziger auch für Achsenpunkte auf. Auch ein solcher Fehler war bereits unter den Fehlern „erster Ordnung" aufgetreten.

Es bleibt nun noch übrig, die Fehlergrößen $A, B \ldots F$ in einfacher Form explizit anzugeben. Nach (43) und (45) treten in diesen Größen neben

---

[1]) B hat noch eine geringe Abhängigkeit von ε_z!

Tabelle. Koeffizienten der Bildfehler.

$$A = \frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha r_\beta^3+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(17\,r_\alpha r_\beta^3 r_\beta'+3\,r_\beta^3 r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha r_\beta^3\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2 r_\alpha r_\beta r_\beta'^2\right\}-\frac{V}{8}\int_0^{z_b}\frac{\Phi'}{\varepsilon_z+\Phi}r_\beta'^2\,\mathrm{d}z+\frac{V}{8}\left[r_\beta'^2\right]_0^{z_b},$$

$$B = 2\frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha^2 r_\beta^2+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(12\,r_\alpha^2 r_\beta r_\beta'+8\,r_\alpha r_\beta^2 r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha^2 r_\beta^2\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2\left(\frac{1}{2}r_\alpha r_\beta r_\alpha' r_\beta'+\frac{1}{2}r_\alpha^2 r_\beta'^2\right)\right\}$$
$$-\frac{V}{4}\int_0^{z_b}\frac{\Phi'}{\varepsilon_z+\Phi}r_\alpha' r_\beta'\,\mathrm{d}z,$$

$$C = \frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha^2 r_\beta^2+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(10\,r_\alpha^2 r_\beta r_\beta'+10\,r_\alpha r_\beta^2 r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha^2 r_\beta^2\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2 r_\alpha r_\beta r_\alpha' r_\beta'\right\}+\frac{V}{4}\left[r_\alpha' r_\beta'\right]_0^{z_b},$$

$$D = \frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha^3 r_\beta+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(7\,r_\alpha^3 r_\beta'+13\,r_\alpha^2 r_\beta r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha^3 r_\beta\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2 r_\alpha^2 r_\alpha' r_\beta'\right\}-\frac{V}{8}\int_0^{z_b}\frac{\Phi'}{\varepsilon_z+\Phi}\left[r_\alpha'^2-\frac{U}{\varepsilon_z+\Phi}\right]\mathrm{d}z-$$
$$-\frac{V}{8}\left[r_\alpha'^2-\frac{U}{\varepsilon_z+\Phi}\right]_0^{z_b},$$

$$E = 2\frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha^3 r_\beta+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(5\,r_\alpha^3 r_\beta'+15\,r_\alpha^2 r_\beta r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha^3 r_\beta\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2\left[\frac{1}{2}r_\alpha^2 r_\alpha' r_\beta'+\frac{1}{2}r_\alpha r_\beta\left(r_\alpha'^2-\frac{U}{\varepsilon_z+\Phi}\right)\right]\right\}+$$
$$+\frac{V}{4}\left[r_\alpha'^2-\frac{U}{\varepsilon_z+\Phi}\right]_0^{z_b},$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{U}}\int_0^{z_b}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\varepsilon_z+\Phi}^3}\left\{\frac{5}{64}\Phi''^2 r_\alpha^4+\frac{1}{64}\Phi'\Phi''\left(\qquad 20\,r_\alpha^3 r_\alpha'-\frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}r_\alpha^4\right)+\frac{3}{8}\Phi'^2 r_\alpha^2\left(r_\alpha'^2-\frac{U}{\varepsilon_z+\Phi}\right)\right\}.$$

den Lösungen erster Näherung das Achsenpotential und seine Differentialquotienten bis zur vierten Ordnung auf. Da diese Ableitungen sehr unbequem sind, besonders wenn das Potential nur durch Messungen bekannt ist, hat Scherzer[1]) die Ableitungen dritter und vierter Ordnung durch partielle Integration beseitigt. Das läßt sich auch bei den hier angegebenen Formeln durchführen. Bei streifendem Austritt aus der Kathode [$\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_z + \Phi(z) \to 0$ sowie $r \sim \sqrt{z}$ an der Kathode] können dabei die Integranden der neu gefundenen Integrale u. U. so stark unendlich werden, daß die Integrale divergieren. Die partielle Integration muß daher so ausgeführt werden, daß solche divergenten Integrale nicht auftreten. Ferner ist noch folgendes zu beachten. Die Gaußsche Bildebene, in der die Fehler bestimmt werden sollen, ist durch $r_\alpha = 0$ gegeben. Dort gilt aber nach (32) näherungsweise

$$\bar{r}_\alpha \approx 2\,\frac{U}{E}\,V\left[\left(\frac{\varepsilon}{U}\right)^{1/2} - \left(\frac{\varepsilon_z}{U}\right)^{1/2}\right].$$

Daher ist das zweite Integral in (45) gegenüber dem ersten noch mit einem Faktor der Größenordnung $(\varepsilon/U)^{1/2}$ multipliziert und kann daher weggelassen werden. Schließlich ist bei der Auswertung der integralfreien Summanden, die bei der partiellen Integration auftreten, zu berücksichtigen, daß das Bild im feldfreien Raum liegt. Das Ergebnis der Rechnung ist in der Tabelle zusammengestellt. Der einfacheren Schreibweise halber ist bei r_α und r_β der Querstrich, der den Ersatz von ε durch ε_z ausdrücken soll, fortgelassen worden. Die Rechnungen gelten auch bei streifendem Austritt der Elektronen aus der Kathode in dem Sinne, daß nach Ausführung der Integration $\varepsilon_z = 0$ gesetzt werden kann. Einfache Näherungswerte erhält man, wenn man in den Endformeln den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchführt.

[1]) O. Scherzer, l. c.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.)

Das Bandenspektrum des CD-Moleküls.

Von **L. Gerö** in Budapest.

(Zugleich Meßergebnisse der Dissertation von **Eva Fischmann** enthaltend.)

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 13. März 1941.)

Die Bandensysteme des CD-Moleküls wurden bei großer Auflösung und Lichtstärke untersucht und die Rotationsanalyse der Banden (0, 0) und (1, 1) des $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems, (0, 0), (1, 1) und (2, 2) des $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems und (0, 0), (1, 0) und (1, 1) des $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems durchgeführt. An den oberen Zuständen jedes Bandensystems sind Prädissoziationserscheinungen festgestellt worden. Nullstellen, Rotationskonstanten, Spin- und Λ-Aufspaltungen werden angegeben.

Das Bandenspektrum des CD-Moleküls wurde zuerst von Shidei[1]) untersucht. Seine Messungen sind mit verhältnismäßig geringer Dispersion durchgeführt worden. Mc Kellar und Bradley[2]) berichten kurz über Messungen von der (0, 0) $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Bande. Das $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-System des CD-Moleküls ist bis jetzt überhaupt noch nicht untersucht worden.

Um die im CH-Spektrum gefundenen mannigfaltigen Prädissoziationserscheinungen auch im CD-Spektrum untersuchen zu können, wurden alle zugänglichen Banden des CD-Spektrums mit dem großen Gitterspektroskop unseres Institutes (6,5 m, 30000 Furchen pro Zoll Konkavgitter, 1,2 Å/mm in der I. Ordnung) mit geeigneter Intensität aufgenommen. Als Lichtquelle diente ein Geissler-Rohr aus Quarz mit Aluminiumelektroden; in der Mitte der Kapillare des Rohres war ein ausgebohrtes Graphitstück angebracht, so daß die Entladung durch dieses Loch brannte. Das Quarzfenster wurde mittels einer Bunsenflamme von außen erhitzt, um den störenden Niederschlag von Kohle zu verhindern. Nach Auspumpen und Absperren des Rohres ließ man aus einem seitlich angebrachten Ansatzgefäß schweren Wasserdampf ein. Eine Quecksilberdampfpumpe ließ die Gasfüllung während der Aufnahmen durch einen elektrisch geheizten Magnesiumofen zirkulieren, wo freigemachte Verunreinigungen größtenteils zurückgehalten wurden. Als Stromquelle der stark konden-

[1]) T. Shidei, Jap. Journ. of Phys. **11**, 23, 1936. — [2]) A. Mc Kellar and Ch. A. Bradley Jr., Phys. Rev. **47**, 787, 1935.

sierten Entladung, in Reihenschaltung mit einer schnell rotierenden Funkenstrecke, diente ein 6000 Volt-Transformator. In dieser Weise gelang es, Aufnahmen zu erhalten, die zwar nicht ganz frei von Verunreinigungen (hauptsächlich CN) waren, an denen aber alle bekannten CD-Banden, die Banden des $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems miteinbegriffen, genügend entwickelt erschienen. Da das benutzte D_2O 99,9%ig war, konnten auf den Aufnahmen nur schwache Spuren von dem Hydridspektrum beobachtet werden.

Die (0, 0)-Bande des $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems wurde von Shidei (a. a. O.) von $K = 4$ bis $K = 22$ angegeben. Die Spindublettkomponenten bleiben auf seinen Aufnahmen unaufgelöst. Tabelle 1 und 2 enthalten unsere Meßdaten der (0, 0)- und (1, 1)-Banden. Die Bezeichnung der Λ-Verdoppelungskomponenten durch c und d erfolgte gemäß dem Dissoziationsschema, das für CH angegeben wurde[1]). Die Aufspaltungen in Spindublettkomponenten konnten in allen Zweigen, sowohl bei niedrigen, wie auch bei hohen Rotationsquantenzahlen beobachtet werden. Die (0, 0)-Bande konnte von $K = 1$ bis 36, die (1, 1)-Bande von $K = 1$ bis 28 gemessen werden. Linien mit noch höheren Rotationsquantenzahlen sind wegen Einsetzen von Prädissoziationserscheinungen erheblich geschwächt.

Das $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-System des CD-Spektrums ist noch überhaupt nicht untersucht worden. Die Meßergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 5 enthalten, und zwar die der (0, 0)-Bande bis $K = 40$, der (1, 1)-Bande bis $K = 35$ und der (2, 2) bis $K = 29$, wo Prädissoziation einsetzt. Alle Zweige bei $K < 5$, ferner die R- und P-Zweige bei $K > 14$ sind in zwei Komponenten aufgespalten. Die Intensitätsverteilung an den Dublettkomponenten bei höheren Rotationsquantenzahlen ist stark asymmetrisch; die gegen kürzere Wellenlängen liegende Komponente ist viel schwächer als die andere. Es ist auffallend, daß, obzwar in den $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$-Banden die Zweige, die die $^2\Pi_d$-Termkomponenten als Endterme haben, bei etwa $K > 22$ in zwei Komponenten aufgespalten sind, der Q-Zweig der (1, 1) $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-Bande, der ebenfalls diese $^2\Pi_d$-Terme als Endzustände besitzt und bis $K = 35$ zu beobachten war, auch bei den höchsten Rotationsquantenzahlen durchaus unaufgespalten erschien. Der Q-Zweig der (0, 0)-Bande ist dermaßen zusammengeschrumpft, daß er zur Beobachtung von etwaigen Aufspaltungen völlig ungeeignet ist.

Shidei gab Meßdaten über die $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Banden (0, 0), (1, 0) und (1, 1) an, jedoch ohne Auflösung der Spindublettkomponenten und der

[1]) L. Gerö, Physica **7**, 155, 1940.

Tabelle 1. $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$ (0, 0).

K	R_{1dc}	R_{1cd}	Q_{1c}	Q_{1d}	P_{1dc}	P_{1cd}	J
1	23232,02*	23232,02*					$1^1/_2$
2	248,91*	248,91*	23201,33*	23201,33*			$2^1/_2$
3	265,99*	265,99*	202,88*	202,88*	23155,26*	23155,26*	$3^1/_2$
4	283,41*	283,41*	204,67*	204,67*	141,37*	141,37*	$4^1/_2$
5	301,13*	301,13*	206,74*	206,74*	127,87*	127,87*	$5^1/_2$
6	319,05	319,55*	209,05	209,52	114,18	114,86	$6^1/_2$
7	337,31	337,76*	211,87	212,35*	101,76	102,34*	$7^1/_2$
8	355,88	356,51*	214,97	215,49*	089,36	089,98*	$8^1/_2$
9	374,62*	375,40*	218,51*	219,28*	077,48	078,27	$9^1/_2$
10	393,54*	394,67	222,30*	223,36*	066,03*	067,04	$10^1/_2$
11	412,83*	414,17*	226,44*	227,67*	054,94*	056,36*	$11^1/_2$
12	432,25*	433,92*	230,88*	232,59*	044,33*	045,92*	$12^1/_2$
13	451,92*	453,84*	235,67*	237,66*	034,15*	036,17*	$13^1/_2$
14	471,76	473,97*	240,88*	243,12*	024,53*	026,74*	$14^1/_2$
15	491,74	494,27*	246,26*	248,91*	015,35*	017,85*	$15^1/_2$
16	512,10	514,75*	252,21	255,00*	006,73*	009,48*	$16^1/_2$
17	532,40	535,45*	258,42	261,48*	22998,38	001,56*	$17^1/_2$
18	552,84	556,12*	264,87	268,19*	990,76	22994,08*	$18^1/_2$
19	573,13	576,78*	271,49	275,19*	983,45*	987,05*	$19^1/_2$
20	593,70	597,71*	278,48*	282,51*	976,60	980,64*	$20^1/_2$
21	614,34*	618,75*	285,64	289,97*	970,17	974,48*	$21^1/_2$
22	635,16	639,96*	293,11	298,00	964,15	968,99	$22^1/_2$
23	655,54	660,87	300,63	306,03	958,86*	963,90	$23^1/_2$
24	676,09	681,80	308,48	314,40	953,59	959,37	$24^1/_2$
25	696,51	702,98	316,48	322,61		955,05	$25^1/_2$
26	716,80	724,01	324,65	331,24		951,01	$26^1/_2$
27	736,93	744,01	332,68	340,09*		947,83	$27^1/_2$
28	756,99		341,28	348,72*		944,64	$28^1/_2$
29	776,74	784,63	349,63	357,73		941,86	$29^1/_2$
30	796,20	804,66	358,03	366,51*		939,57	$30^1/_2$
31	815,41	824,33	366,51*	375,40*			$31^1/_2$
32	834,34	843,47	374,62*	384,31			$32^1/_2$
33	852,76	862,43	383,05	393,08			$33^1/_2$
34	870,67	880,85	391,38	401,64			$34^1/_2$
35	888,33	899,54	400,07	410,09			$35^1/_2$
36			407,90	418,30			$36^1/_2$

Tabelle 1. Fortsetzung.

K	R_{2dc}	R_{2cd}	Q_{2c}	Q_{2d}	P_{2dc}	P_{2cd}	J
1	23235,28*	23235,28*					$^1/_2$
2	251,11*	251,11*	23204,03*	23204,03*			$1^1/_2$
3	267,56*	267,56*	204,67*	204,67*	23158,03*	23158,03*	$2^1/_2$
4	284,45*	284,61	206,11*	206,11*	142,82*	142,82*	$3^1/_2$
5	301,87*	301,87*	207,63*	207,63*	128,96	129,17	$4^1/_2$
6	319,55*	320,14	209,79	210,29	115,37	115,94	$5^1/_2$
7	337,76*	338,46	212,35*	212,94	102,34*	103,06	$6^1/_2$
8	356,51*	356,92*	215,49*	216,19	089,98*	090,65	$7^1/_2$
9	374,62*	375,72	219,28*	219,74	077,74	078,82	$8^1/_2$
10	393,54*	394,81	222,30*	223,63*	066,03*	067,44	$9^1/_2$
11	412,83*	414,17*	226,44*	227,94*	054,94*	056,36*	$10^1/_2$
12	432,25*	433,92*	230,88*	232,59*	044,33*	045,92*	$11^1/_2$
13	451,92*	453,84*	235,67*	237,66*	034,15*	036,17*	$12^1/_2$
14	471,56	473,97*	240,88*	243,12*	024,53*	026,74*	$13^1/_2$
15	491,61	494,27*	246,26*	248,91*	015,35*	017,85*	$14^1/_2$
16	511,80	514,75*	251,97	255,00*	006,44*	009,48*	$15^1/_2$
17	531,94	535,45*	257,98*	261,48*	22998,11	001,56*	$16^1/_2$
18	552,26	556,12*	264,37	268,19*	990,22	22994,08*	$17^1/_2$
19	572,62	576,78*	270,95*	275,19*	982,91	987,05*	$18^1/_2$
20	593,11*	597,71*	277,90	282,51*	975,89	980,64*	$19^1/_2$
21	613,58	618,75*	284,91*	289,97*	969,61	974,48*	$20^1/_2$
22	634,37	639,96*	292,35	297,61	963,56*	968,64	$21^1/_2$
23	654,81	660,50*	299,86	305,69	957,96	963,56*	$22^1/_2$
24	675,23*	681,43	307,74	313,93	952,85	958,86*	$23^1/_2$
25	695,61	702,29	315,62	322,18		954,72	$24^1/_2$
26	715,93	722,98	323,64	330,82		950,70	$25^1/_2$
27	735,99	743,50	331,99	339,46		947,27	$26^1/_2$
28	756,00	763,94	340,09*	348,19		943,81	$27^1/_2$
29	775,79	784,05	348,72*	356,92*		941,25	$28^1/_2$
30	795,06	804,09	356,92*	365,96		938,99	$29^1/_2$
31	814,33	823,35	365,43	374,62*			$30^1/_2$
32	833,14	842,82	373,88	383,34			$31^1/_2$
33	851,85	861,58	382,20	392,13			$32^1/_2$
34	869,52	880,14	390,50	401,01			$33^1/_2$
35	887,06	898,75	398,84*	409,34			$34^1/_2$
36			407,24	417,93			$35^1/_2$

Tabelle 2. $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$ (1, 1).

K	R_{1dc}	R_{1cd}	Q_{1c}	Q_{1d}	P_{1dc}	P_{1cd}	J
1	23245,79*	23245,79*					$1^1/_2$
2	262,12*	262,12*	23216,61*	23216,61*			$2^1/_2$
3	278,48*	278,48*	217,48*	217,48*	23172,34*	23172,34*	$3^1/_2$
4	295,24*	295,24*	219,28*	219,28*	158,03*	158,03*	$4^1/_2$
5	312,10*	312,10*	220,67*	220,67*	144,50*	144,50*	$5^1/_2$
6	328,76	329,23*	222,30*	222,80	131,13*	131,13*	$6^1/_2$
7	345,84	346,28*	224,56	224,91*	118,13*	118,13*	$7^1/_2$
8	363,12*	363,69	227,08*	227,67*	105,61	105,99*	$8^1/_2$
9	380,43*	381,37*	229,53*	230,45*	093,16	093,98*	$9^1/_2$
10	397,78*	398,84*	232,02*	233,30*	081,23*	082,26*	$10^1/_2$
11	415,44*	416,72*	235,28*	236,62*	069,55*	070,86*	$11^1/_2$
12	432,86*	434,63*	238,44*	240,07*	058,16*	059,91*	$12^1/_2$
13	450,70*	452,62*	241,95*	243,84*	047,17*	049,12*	$13^1/_2$
14	468,54*	470,68*	245,64*	247,70*	036,70*	038,86*	$14^1/_2$
15	486,20*	488,79*	249,45*	251,97*	026,25*	028,80*	$15^1/_2$
16	504,39	506,93*	253,34*	256,22*	016,45	019,05*	$16^1/_2$
17	522,21	525,09*	257,98*	260,67*	006,73*	010,29*	$17^1/_2$
18	540,06	543,16*	262,12*	265,41*	22997,57	000,83*	$18^1/_2$
19	557,68	561,25	266,84	270,13*	988,53	22992,09*	$19^1/_2$
20	575,26	579,23*	270,95*	275,19*	980,00	983,45*	$20^1/_2$
21	593,11*	596,66*	275,88	279,91*	971,61		$21^1/_2$
22	609,98	614,34*	280,59	284,91*	963,56*		$22^1/_2$
23	627,11	632,23*	284,91*	289,97*	955,68		$23^1/_2$
24	643,81	649,84	289,97*	295,39			$24^1/_2$
25	660,50*						$25^1/_2$
26	676,58						$26^1/_2$
27	691,98						$27^1/_2$
28	707,31						$28^1/_2$

Tabelle 2. Fortsetzung.

K	R_{2dc}	R_{2cd}	Q_{2c}	Q_{2d}	P_{2dc}	P_{2cd}	J
1	23248,31*	23248,31*					$^1/_2$
2	263,83*	263,83*	23218,51*	23218,51*			$1^1/_2$
3	279,91*	279,91*	219,28*	219,28*	23174,42*	23174,42*	$2^1/_2$
4	296,14*	296,14*	220,20*	220,20*	159,95*	159,95*	$3^1/_2$
5	312,95*	312,95*	221,66*	221,66*	145,48*	145,48*	$4^1/_2$
6	329,23*	329,80	223,36	223,63	131,97	132,32	$5^1/_2$
7	346,28*	346,80	224,91*	225,60	118,60	119,21	$6^1/_2$
8	363,12*	364,10	227,08*	227,94*	105,99*	106,63	$7^1/_2$
9	380,43*	381,37*	229,53*	230,45*	093,98*	094,41	$8^1/_2$
10	397,78*	398,84*	232,02*	233,30*	081,23*	082,26*	$9^1/_2$
11	415,44*	416,72*	235,28*	236,62*	069,55*	070,86*	$10^1/_2$
12	432,86*	434,63*	238,44*	240,07*	058,16*	059,91*	$11^1/_2$
13	450,70*	452,62*	241,95*	243,84*	047,17*	049,12*	$12^1/_2$
14	468,54*	470,68*	245,64*	247,70*	036,70*	038,86*	$13^1/_2$
15	486,20*	488,79*	249,45*	251,97*	026,25*	028,80*	$14^1/_2$
16	503,97	506,93*	253,34*	256,22*	016,03	019,05*	$15^1/_2$
17	521,75	525,09*	257,34	260,67*	006,44*	010,29*	$16^1/_2$
18	539,58	543,16*	261,48	265,41*	22997,06	000,83*	$17^1/_2$
19	557,17	561,25	265,41*	270,13*	988,05	22992,09*	$18^1/_2$
20	574,54	579,23*	270,50	275,19*	979,15	983,45*	$19^1/_2$
21	591,97	596,66*	275,19*	279,91*	970,73		$20^1/_2$
22	609,18	614,34*	279,91*	284,91*	962,71		$21^1/_2$
23	626,37	632,23*	284,45	289,97*			$22^1/_2$
24	643,07	649,45	289,18	295,09			$23^1/_2$
25	659,50						$24^1/_2$
26	675,23*						$25^1/_2$
27	690,88						$26^1/_2$
28	705,99						$27^1/_2$

Tabelle 3. $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$ (0, 0).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2	
1	31839,06		31808,23		31792,64	31796,44	$^PQ_{12}(1)$
2	854,88	31855,74		31809,64*	777,42*	778,31	
3	870,57	870,91	808,93	809,64*	762,42	762,80	
4	886,35			809,64*	747,38		
5	901,92		809,64*		732,30*		
6	917,53*				717,34*		
7	933,01		810,63		702,48		
8	948,57		811,41		687,74*		
9	963,93*		811,98		673,03		
10	979,27		812,63		658,51		
11	994,44		813,44*		644,13		
12	32009,51		814,13		629,81*		
13	024,44		814,97		615,71		
14	039,55	039,19	815,75		601,92*	601,62	
15	054,15	053,71			588,03	587,66	
16	068,61	068,07	817,13		574,35*	573,90	
17	082,83	082,26	817,77		560,68	560,23	
18	096,69	096,08			547,18	546,63	
19	110,42	109,51	818,81		533,70	533,07	
20	123,57	122,79	819,40		520,45	519,66	
21	136,47	135,62	819,76		507,13	506,33	
22	149,04	148,07	820,16*		493,90	493,20	
23	161,16	160,08	820,16*		480,75	479,88	
24	172,68	171,64	820,16*		467,55	466,65	
25	183,69	182,74			454,54*	453,45	
26	194,30	193,17			441,13*	440,20	
27	204,11	203,11			427,99	426,89	
28	213,46	212,40			414,76	413,52	
29	222,00	220,78			401,29*	400,05	
30	229,66	228,48			387,63	386,41	
31	236,48	235,46			373,88*	372,51	
32	242,58	241,22			359,64	358,38	
33	247,21	246,22			345,06*	343,83	
34	251,27	249,84			330,28	329,03	
35	253,76*	252,51			315,15	313,72	
36	255,08*	253,76*			299,22	297,89	
37	255,08*	253,76*			282,47*	281,43	
38		251,71			265,48	264,10	
39					247,13	246,12	
40					228,33	226,97	

Tabelle 4. $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$ (1, 1).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2
1	31765,63	31769,31	31735,84*	31739,50	31720,77*	
2	780,47	781,94	735,84*	737,34	706,02	
3	795,12	795,73	735,84*		691,17	
4	809,64*			735,84*	675,79	
5	823,99		735,39		660,59	
6	838,06		735,00		645,29	
7	851,99		734,27		629,81*	

Tabelle 4 (Fortsetzung).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2
8	31865,68		31733,66		31614,63	
9	879,16		732,82		599,19*	
10	892,25		732,30*		583,67	
11	905,07		731,04		568,03	
12	917,53*		729,89		552,52	
13	929,94		728,50*		536,63	
14	942,49	941,89	726,94		521,39*	
15	953,77	953,24	725,18		505,30*	
16		963,93	723,13		489,89	489,42
17			720,77*		474,23	473,24
18			718,26		457,95	457,26
19			715,31			441,13*
20			711,91		425,33	424,58
21			708,29		408,74	407,96
22			704,06		392,05	391,03
23			699,24		375,14	373,88*
24			693,96*		357,54	356,42
25			687,74*		339,61	338,60
26			681,43		321,37	320,32
27			674,06		302,67	301,60
28			665,69			282,47*
29			656,66			262,62*
30			646,26		243,04	241,89
31			634,68			220,46
32			621,84		199,39	197,86
33			607,28		175,84	174,52
34			593,10		151,04	149,87
35					125,17	123,81

Tabelle 5. $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$ (2, 2).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2
4	31681,43		31610,42			
5	693,96*		608,74			
6	706,02		607,28		31521,39*	
7	717,34*		604,90		505,30*	
8	728,50*		601,92*			
9	739,50		599,19*		471,86	
10	749,98		596,71		454,54*	
11	759,44		593,10		437,03	
12	769,81		589,17		419,56	
13	777,42*		584,61		401,29*	
14	785,61		579,65		383,15	
15	792,64		574,35*		364,33	
16	799,42				345,06*	
17	805,43	804,77			325,42	
18		809,64*			305,50	305,07
19		813,44*			285,17	284,40
20						262,62*
21						241,01
22					218,97	218,28

Tabelle 5 (Fortsetzung).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2
23					31195,58	31194,64
24					171,38	170,32
25					145,73	144,48
26						117,82
27						090,97
28						062,52
29						031,47

Tabelle 6. $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$ (0, 0).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2	
1	25830,20		25802,41	25806,01	25788,74*	25793,07	$^PQ_{12}$ (1)
2	840,62*	25841,98	799,41	800,48	771,85	772,93	
3	849,77	850,59*	794,71	795,38	753,60	754,07	
4	857,19		788,28	788,74*	733,26	733,79	
5	862,76		780,21	780,44	711,58	711,97	
6	866,73		770,51	770,67	688,40	688,81	
7	868,90		759,11		663,80		
8	869,17		745,65		637,30		
9	867,23		730,59*		609,07		
10	863,58		713,81		579,26		
11	858,18		695,13		547,80		
12	850,59*		674,50		514,65		
13	840,62*		651,94		479,73		
14	828,26		627,29		442,92		
15	814,01		600,51		404,27		
16	797,08		571,51		363,62		
17	777,67		540,24		320,97		
18	755,51		506,57		276,16		
19	730,59*		470,35		229,08		
20	702,38		431,44		179,68		
21	671,06		389,69		127,87		
22	636,52		344,96		073,35		
23	599,09		296,89		016,11		
24			245,35		24955,79		
25			190,17		892,19		
26					825,33		

Tabelle 7. $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$ (1, 0).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2	
1	27231,97	27235,69	27206,36	27210,38	27193,46*	27197,31	$^PQ_{12}$ (1)
2	239,58	240,61	201,27	202,30	175,77	176,89	
3	244,33		193,46*	194,13	155,37*	155,80	
4	246,17*	247,15	182,81	183,17	132,12	132,64	
5	245,63	246,17*	169,51	169,77	106,21	106,63	
6	242,05	242,39	153,33		077,72	078,04	
7	235,44	235,69	134,32		046,57		
8	225,82		112,43		012,65		

Tabelle 7 (Fortsetzung).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2
9	27213,20		27087,59		26975,93	
10	197,31		059,72		936,34	
11	178,11		028,80		893,91	
12	155,37*		26994,57		848,40	
13	129,02		956,97		799,92	
14	098,90		915,87		748,00	
15	064,72		871,14		692,94	
16	026,22		822,47		634,34	
17			769,68		571,97	
18					505,58	

Tabelle 8. $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$ (1, 1).

K	R_1	R_2	Q_1	Q_2	P_1	P_2	
1	25200,07*	25203,80	25174,93	25178,81	25162,15	25166,24	$^PQ_{12}$ (1)
2	208,93*	209,79	170,64	171,97	145,17	146,66	
3	214,93	215,26*	163,99	164,34	125,83	126,40	
4	218,76	219,02*	155,02	155,35	104,40	104,57	
5	219,84	220,06	143,86		080,83		
6	219,02*		130,19		054,65		
7	215,26*		114,10		026,36		
8	208,93*		095,66		24995,87		
9	200,07*		074,61		962,88		
10	188,30		050,97		927,54		
11	178,70		024,61		889,53*		
12	156,06		24995,46		849,01		
13	135,18		963,20		805,97		
14	110,81		928,03		760,04		
15			889,53*		711,17		
16			848,47		659,28		
17					605,46		
18					548,27		

Kopfgebiete. Es wäre zu erwarten, daß hier — im Gegensatz zu den $C\,^2\Sigma^- - X\,^2\Pi$-Banden — im Q-Zweig von etwa $K > 18$ eine Aufspaltung in zwei Komponenten beobachtbar wird. Mc Kellar und Bradley fanden aber alle Zweige, auch bei größeren Rotationsquantenzahlen, unaufgespalten, obzwar sie mit größerer Dispersion arbeiteten. Unsere Meßergebnisse bezüglich der (0, 0), (1, 1) und (1, 0)-Banden des $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Bandensystems sind in den Tabellen 6 bis 8 wiedergegeben. Sie bestätigen, daß — außer $K < 8$ — keine Dublettaufspaltung vorliegt. Daß die Banden wegen Prädissoziation abbrechen, wurde schon von Shidei festgestellt.

Durch Kombination der Linienaufspaltungen in den drei gemessenen Bandensystemen kann man die Termaufspaltungen der Anfangs- bzw.

Endzustände bestimmen, angenommen, daß an den zwei $^2\Sigma$-Termen keine Aufspaltung festzustellen ist. Der $A\,^2\Delta$-Term hat keine meßbare Λ-Aufspaltung; seine Spinaufspaltung wurde — gemäß der erwähnten Annahme — in Fig. 1 wiedergegeben. Ebenso ist die Aufspaltung des

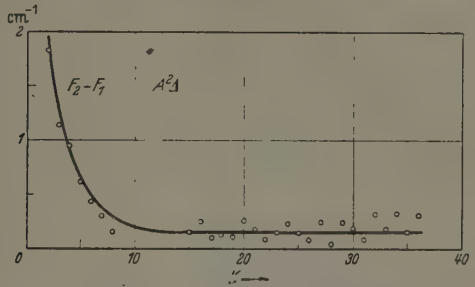


Fig. 1. Differenz der Aufspaltungen entsprechender Linien der $C\,^2\Sigma^- - X\,^2\Pi$ und $A\,^2\Delta - X\,^2\Pi$-Banden.

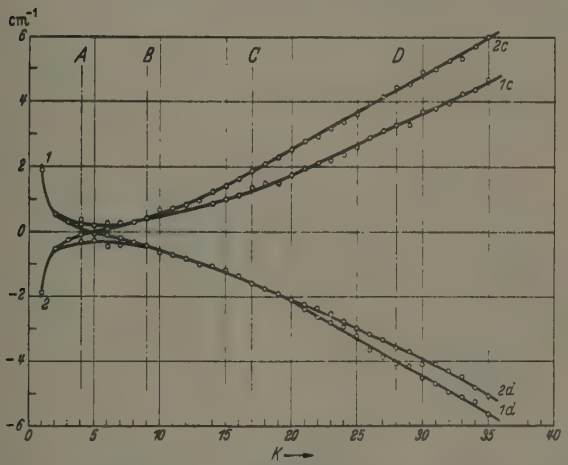


Fig. 2. Aufspaltungen im $X\,^2\Pi$-Endzustand, erhalten aus Differenzen der Linienaufspaltungen der $A\,^2\Delta - X\,^2\Pi$-Bande und der Ordinatenwerte der Fig. 1.

$X\,^2\Pi$-Termes in vier, d. h. in zwei Λ-Dublett- und zwei Spindublettkomponenten, in Fig. 2, ausgehend von den Schwerpunkten der Terme, die gemeinsame K-Quantenzahl haben, eingetragen.

Einige typische Stellen des Aufspaltungsbildes sind in Fig. 2 mit strichpunktierten Linien A, B, C und D herausgehoben. Ferner sind in

Fig. 3 diejenigen Zweiglinien der $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$- und $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Banden schematisch dargestellt, die an diesen Stellen ihre Endzustände

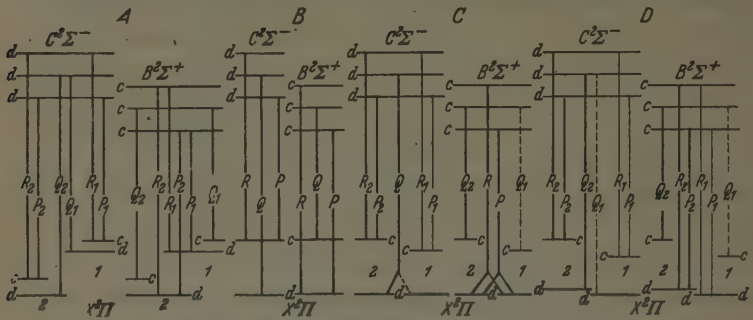


Fig. 3. Schematische Darstellung der Zweiglinien der $C\,^2\Sigma^- - X\,^2\Pi$ und $B^2\,\Sigma^+ - X\,^2\Pi$-Banden an vier typischen Stellen der Linienaufspaltungen.

haben. Die Linien der beobachteten starken und schwachen Zweige sind durch entsprechende dicke und dünne, die der nicht beobachteten durch gestrichelte Linien gekennzeichnet. Im $C\,^2\Sigma^- \rightarrow X\,^2\Pi$-System ($C$ und D) sind R_1 und P_1 schwach, Q_1 nicht zu beobachten. Die Zweige der $B\,^2\Sigma^+ \rightarrow X\,^2\Pi$-Banden reichen nur bis C; die Aufspaltung der R- und P-Linien soll aber nur bei D erfolgen, so daß diese offensichtlich nicht der Beobachtung zugänglich sind. Ein Q_1-Zweig aber sollte schon bei C von Q_2 getrennt erscheinen, jedoch konnte dies nicht gefunden werden.

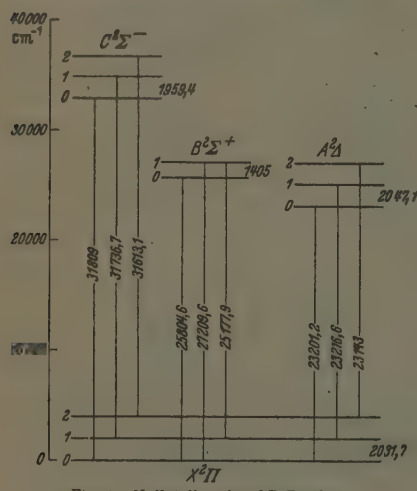


Fig. 4. Nullstellen der CD-Banden.

Zusammenfassend läßt sich also sagen: bei hohen Rotationsquantenzahlen sind in den $^2\Sigma \rightarrow {}^2\Pi$-Systemen alle Zweige, die am $^2\Pi_{1/2}$ endigen, schwach, die Q-Zweige sogar so schwach, daß sie auch dann nicht zur Beobachtung gelangen, wenn die anderen Zweige stark überbelichtet sind. Dies ist aber dann zu erwarten, wenn eine Elektronen-

quantenzahl, die bei höheren Rotationsquantenzahlen die Rolle von Λ übernimmt, am oberen und unteren Zustand gleich ist. Die merkwürdige Intensitätsverteilung zwischen den Zweigen ist als ein Zeichen dafür anzusehen, daß bei wachsenden Rotationsquantenzahlen eine immer größere Abweichung von dem Koppelungsgefälle a) und b) von Hund eintritt.

Die Nullstellen der gemessenen CD-Banden sind in der Fig. 4 zusammengestellt. Diese wurden berechnet, indem man Mittelwerte von allen Q-Linien bei gleichem K bildete und auf $K = 0$ extrapolierte[1]).

Die Rotationskonstanten sind in der Tabelle 9 zusammengestellt. Ihre Bestimmung erfolgte durch graphisches Verfahren, indem man die Mittelwerte aus den doppelten Kombinationsdifferenzen $R(K) - P(K)$ der $^2\Sigma$-Zustände und $R(J) - P(J)$ bzw. $R(J-1) - P(J+1)$ der $^2\Delta$- und $^2\Pi$-Zustände nach Division durch $4(K + {}^1/_2)$ bzw. $4(J + {}^1/_2)$ als Funktion von $(K + {}^1/_2)^2$ oder $(J + {}^1/_2)^2$ auftrug.

Tabelle 9. Rotationskonstanten.

Zustand		B_v	$10^4 \cdot D_v$	Zustand		B_v	$10^4 \cdot D_v$
$X\,^2\Pi$	$v = 0$	7,702 cm^{-1}	4,2 cm^{-1}	$B\,^2\Sigma^+$	$v = 0$	6,907 cm^{-1}	6,0 cm^{-1}
	1	7,491	4,2		1	6,379	7,2
	2	7,274	3,5	$C\,^2\Sigma^-$	$v = 0$	7,739 cm^{-1}	4,5 cm^{-1}
$A\,^2\Delta$	$v = 0$	7,902 cm^{-1}	4,5 cm^{-1}		1	7,457	4,9
	1	7,642	4,7		2	7,135	4,6

Bei den Termen, wo eine deutliche Abweichung von dem geraden Verlauf festgestellt wurde, sind in die Tabelle diejenigen Werte aufgenommen, die man auf Grund der Tangenten (deren Neigung $2D_v$ und deren Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $B_v - {}^3/_2 D_v$ gibt) bei kleinen $(J + {}^1/_2)$- bzw. $(K + {}^1/_2)$-Werten bestimmte.

Eine eingehende Untersuchung der Prädissoziationserscheinungen zusammen mit denen des CH-Spektrums wird einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

Vorliegende Untersuchung ist unter Mitwirkung des Herrn Privatdozenten Dr. R. Schmid im Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest ausgeführt worden. Dieses Institut verdankt einen Teil seiner Ausrüstung dem Naturwissenschaftlichen Forschungsfonds und der Széchenyi-Gesellschaft und steht unter der Leitung des Herrn Prof. B. Pogány.

[1]) Über die Identifizierung des (2, 2)-Bandes des $A\,^2\Delta \rightarrow X\,^2\Pi$-Systems siehe: L. Gerö u. R. Schmid, Naturwissensch. **29**, 239, 1941.

(Aus dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G.)

Über optische Kenngrößen starker Elektronenlinsen*).

Von **Joachim Dosse.**

Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 13. Mai 1941.)

Ein Verfahren zur Berechnung achsennaher Elektronenbahnen in elektrischen und magnetischen Linsen beliebiger Feldform wird geschildert. Die optischen Kenngrößen, insbesondere Brennweite, Öffnungsfehler- und Farbfehlerkonstante einer starken Magnetlinse werden auf Grund gemessener Feldkurven dieser Linse berechnet und im Übermikroskop gemessen. Berechnete und gemessene Bildfehlerkonstanten einer Magnetlinse und einer elektrostatischen Linse werden miteinander verglichen. Einige Betrachtungen über das Auflösungsvermögen werden angestellt.

1. Ziel der Arbeit.

Die rasche Entwicklung der Übermikroskopie in den letzten Jahren hat es in immer stärkerem Maße wünschenswert erscheinen lassen, aus der schon länger in einer großen Zahl von Arbeiten[1]) entwickelten Theorie der Elektronenlinsen auch praktische Folgerungen für die Beurteilung und Weiterentwicklung der für die hochauflösenden Elektronenmikroskope verwendeten starken Linsen zu ziehen. Die erste Voraussetzung hierzu ist, daß die Aussagen der Theorie mit der Erfahrung übereinstimmen, und zwar nicht nur hinsichtlich der *Gesetzmäßigkeiten* — wie dies in einigen Punkten für schwache Linsen [27, 86, 87, 40, 43] nachgewiesen ist, — sondern auch in den *Zahlenwerten*[2]). Zur Durchführung eines solchen Vergleiches ist zunächst zweierlei nötig. Erstens muß die Theorie bis zur zahlenmäßigen Angabe der optischen Kenngrößen vorgelegter Linsen weiter durchgearbeitet werden. Zweitens sind diese Zahlenwerte experimentell nachzuprüfen durch möglichst unmittelbare Messung an den in den hochauflösenden Mikroskopen verwendeten Linsen. Hierzu soll die vorliegende Arbeit einige Beiträge

*) Der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Berlin als Habilitationsschrift eingereicht.

[1]) Vgl. das Schrifttumsverzeichnis am Schluß dieser Arbeit, auf das die Zahlen in eckigen Klammern im einzelnen verweisen. Aus der Fülle der Veröffentlichungen haben wir nur die in unmittelbarem Zusammenhang mit dieser Arbeit stehenden gewählt. — [2]) Übereinstimmung in Zahlenwerten des Öffnungsfehlers haben Gundert [40] für elektrostatische Beschleunigungslinsen, Marschall [43] für eine schwache Magnetlinse gefunden. Über Brennweiten schwacher Linsen vgl. Brüche/Scherzer, Geom. El. Optik, Berlin, Julius Springer, 1934, und das dort angegebene Schrifttum.

liefern (Abschnitt 3 und 4). Damit sind wir in der Lage, die Abbildungseigenschaften der starken elektrostatischen und magnetischen Linsen miteinander zu vergleichen (Abschnitt 5) und einige Folgerungen für das Auflösungsvermögen zu ziehen (Abschnitt 6).

2. *Bisher bekannte Ergebnisse.*

a) Schwache und starke Linsen. Die für die hochauflösende Mikroskopie in Betracht kommenden Linsen nehmen unter den Elektronenlinsen eine besondere Stellung ein. Die Elektronenlinsen, die z. B. in Braunschen Röhren zur Bündelung von Elektronenstrahlen und zur Abbildung benutzt werden, besitzen in der Regel verhältnismäßig geringe Brechkraft, so daß die Brennpunkte weit außerhalb des Feldbereiches liegen und die Brennweiten entsprechend groß gegenüber der Ausdehnung des Feldes sind; die Elektronen ändern dann innerhalb des Feldbereiches ihren Abstand von der Achse nicht merklich. Unter dieser Voraussetzung läßt sich z. B. die Brennweite f einer schwachen Magnetlinse nach der bekannten Formel [1]

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8\,m\,U_0} \int_{-\infty}^{+\infty} H^2(z)\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

berechnen und hängt daher nur von der Größe der *Fläche* unter der Kurve $H^2(z)$ ab; die *Verteilung* der Ordinaten H^2 längs der Achse im einzelnen ist dabei belanglos, solange die Größe der Fläche die gleiche und die obige Voraussetzung gewahrt bleibt. Solche Linsen sind zu vergleichen mit den dünnen, schwach gewölbten Glaslinsen der Optik.

Im Gegensatz hierzu kommt es für die Zwecke der hochauflösenden Mikroskope auf höchste Vergrößerung, also bei gegebener Länge des Strahlenganges auf kürzeste Brennweite an, ähnlich wie bei den dicken, stark gewölbten Glaslinsen in den Objektiven der Lichtmikroskope. Bei derartigen starken Elektronenlinsen tritt eine in der Optik unbekannte Erscheinung auf: Mit wachsender Brechkraft rücken die Brennpunkte — und bei hoher Vergrößerung auch der Dingort — immer weiter in das Linsenfeld hinein, so daß der abbildende Strahlengang erst *innerhalb* des Linsenfeldes beginnt und nur der hinter dem Dingort noch verbleibende Teil des Feldes als abbildende Linse wirkt. Es ist einleuchtend, daß unter diesen Umständen die *Verteilung* des Feldes längs der Achse sehr wesentlich die Eigenschaften der Linse bestimmt und die Formel (1) nicht mehr gültig sein kann. Dies wurde erstmals von Ruska und Knoll [48a] bei Abbildungsversuchen mit Magnetlinsen bemerkt, später von Ruska [46a] sowie von

Knecht [40a] experimentell eingehender untersucht und von Glaser [12] an einem besonderen Linsenfeld theoretisch gezeigt. Im folgenden werden wir vorzugsweise starke Linsen betrachten [1]).

b) Berechnung optischer Kenngrößen. Die Berechnung optischer Kenngrößen von Elektronenlinsen erfordert die Lösung zweier Aufgaben. Erstens: Ermittlung des Feldverlaufes aus den Formen der Elektroden bzw. der Magnetpole und deren Potentialen (Spannungen, Durchflutungen, Polstärken). Zweitens: Berechnung der Kenngrößen aus dem Feldverlauf.

Die Lösung der ersten Aufgabe gelingt nur in wenigen einfachen Fällen und stößt bei den praktisch verwendeten Linsen, insbesondere den starken Magnetlinsen mit Eisenkapselung [30, 48], auf so große mathematische Schwierigkeiten, daß zunächst kein anderer Ausweg bleibt als die *Messung* des Feldverlaufes in der Linse. Hierüber ist kürzlich [38] berichtet worden. Wir gehen also beim ersten Schritt zur *Berechnung* von Kenngrößen doch *empirisch* vor. Dies wollen wir für alle folgenden Vergleiche zwischen „Theorie" und Experiment vormerken.

Die Lösung der zweiten Aufgabe, die vollständige Berechnung der optischen Kenngrößen aus dem Feldverlauf, hat Glaser [4—9, 11, 12] in Erweiterung der Seidelschen Theorie der Optik durchgeführt und hat insbesondere die Bildfehlerkonstanten formelmäßig angegeben, auf Grund deren jene Strahlquerschnitte berechnet werden können, die bei Abbildung eines im allgemeinen nicht auf der optischen Achse gelegenen Dingpunktes an Stelle des idealen Bildpunktes in der Bildebene entstehen [9b]. Eine Berechnung des Öffnungsfehlers der schwachen elektrischen Linse [15] und der übrigen geometrischen Bildfehler [16, 17] hat Scherzer auf einem anderen Wege gegeben. Dem verwickelten Aufbau der Bestimmungsformeln für die optischen Kenngrößen [9a, 17a] [vgl. z. B. auch Gleichungen (16) bis (19)] ist es zuzuschreiben, daß nur wenige Arbeiten bis zur zahlenmäßigen Berechnung einzelner Kenngrößen starker Linsen vordringen. Dabei ist zunächst der *Öffnungsfehler*, später auch der *Farbfehler* bevorzugt behandelt worden, weil diese Fehler als einzige auch bei genauester Zentrierung des Strahlenganges im Übermikroskop, also bei Abbildung eines Punktes auf der optischen Achse und dessen allernächster Umgebung, *nicht* verschwinden. Rebsch [13] hat einige Typen von Linsenfeldern nach dem

[1]) Im Schrifttum ist neben der Bezeichnung „schwache" Linse auch „kurze" Linse üblich, da bei schwacher Linse die Feldausdehnung längs der Achse *kurz* gegenüber der Brennweite ist. Das Gegenstück hierzu, die Bezeichnung „lange" Linse, ist weniger gebräuchlich.

Gesichtspunkt leichter Integrierbarkeit ausgesucht und durchgerechnet, um daraus eine untere Grenze für den Öffnungsfehler abzuschätzen[1]). Recknagel [14a] hat für das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtringes („Kreisstromfeld") asymptotische Formeln für Öffnungs- und Farbfehler schwacher und äußerst starker Linsen berechnet. Es zeigte sich dabei erstmals, daß Öffnungsfehler und Farbfehler bei vorgegebener Feldform einen Kleinstwert bei mittlerer Linsenstärke besitzen können. Glaser [11] gab allgemein und streng gültige obere Grenzen für den Farbfehler beliebiger elektrostatischer oder magnetischer Linsen an.

Im Interesse eines ersten grundsätzlichen Überblicks wird man die Feldkurve derart analytisch anzunähern suchen, daß die Berechnung der Kenngrößen zu bekannten, möglichst leicht auswertbaren Funktionen führt und das grundsätzliche Verhalten der Linse von der schwächsten bis zur stärksten Brechkraft übersehen werden kann. Dies ist Glaser [12] für das Magnetfeld gelungen durch Annahme der Funktion

$$\xi_1 = \frac{H(z)}{H_0} = \frac{1}{1+z^2/d^2}, \tag{2}$$

die den wirklichen glockenförmigen Feldverlauf zunächst befriedigend wiedergibt [vgl. in Fig. 1 Kurve 1 mit 4 und 5[2])] und die wir im folgenden kurz als „Glockenkurve" bezeichnen. Die *Stärke* der Linse wird durch den Parameter

$$k^2 = \frac{e}{8m} \cdot \frac{B_0^2 d^2}{U_0} \tag{3}$$

gekennzeichnet; e Ladung, m (relativistische!) Masse des Elektrons, $B_0 = \mu_0 H_0$ Höchstwert der magnetischen Induktion, U_0 (Beschleunigungs-) Anlaufspannung der Elektronen, d Halbwertsbreite der Feldkurve (eigentlich „halbe" Halbwertsbreite, vgl. Fig. 1 rechts oben) als Kennzeichnung der Feldlänge. So konnte Glaser für das Glockenkurvenfeld erstmals alle Kenngrößen für die Gaußsche Dioptrik (Brennweiten, Lage der Brenn- und Hauptpunkte) sowie die Öffnungs- und Farbfehlerkonstante als Funktionen von k^2 in geschlossenen, für alle k^2 gültigen Formeln angeben. Ob

[1]) Diese Abschätzung, die nach Scherzer [18] für die besten errechenbaren Linsen gelten soll, darf jedoch nicht als Abschätzung einer unteren Grenze im streng mathematischen Sinne bewertet werden. Wie Glaser [10, 12] gezeigt hat, gibt es Felder mit Öffnungsfehlern, die unter der von Rebsch geschätzten Grenze liegen. — [2]) In Fig. 1 sind nur die *bildseitigen Teile* der gemessenen Feldkurven wiedergegeben. Der Unsymmetriegrad der Feldkurve (Verhältnis von dingseitiger zu bildseitiger Halbwertsbreite) liegt bei den bisher gemessenen Feldkurven nahe bei 1 (vgl. Dosse [38]) und spielt für die vorliegenden Untersuchungen nur eine untergeordnete Rolle (vgl. Dosse [3]).

es für das elektrostatische Feld, insbesondere für die sogenannte Einzellinse, eine mathematisch leicht zu behandelnde Funktion für die Feldkurve gibt, ist uns nicht bekannt.

Nach Glaser [12] besteht die Möglichkeit einer weiteren Annäherung darin, daß man statt Gleichung (2)

$$\frac{H(z)}{H_0} = \frac{1}{(1+z^2/a^2)^\mu} \tag{4}$$

ansetzt [a kennzeichnet die Feldlänge, vgl. Gleichung (5)] und μ für die gemessene Feldkurve möglichst gut passend wählt. [Die Funktion (4) führt ebenfalls auf einen bekannten Typ von Differentialgleichungen; Näheres bei Glaser, a. a. O.]. Für $\mu = 1$ geht (4) in (2) über, für $\mu = {}^3/_2$ erhält man das Kreisstromfeld (Kurve 2 in Fig. 1).

Die Berechnung der übrigen geometrischen Bildfehler des Linsenfeldes nach (2) ist von Glaser und Lammel bereits durchgeführt[1]).

c) Messung optischer Kenngrößen. Die ersten Messungen der Brennweiten, Hauptebenenlagen und des Öffnungsfehlers starker Magnetlinsen führte Ruska [46] durch und stellte dabei die heute als allgemeingültig bekannten Tatsachen fest, daß die Hauptebenen überschlagen liegen und daß der Öffnungsfehler positiv ist, die Ablenkung achsenferner Strahlen also rascher als linear mit dem Achsenabstand zunimmt. Die Ruskaschen Ergebnisse wertete v. Ardenne [20a] zur Aufstellung einer Formel für den Öffnungsfehler aus, in der außer dem freien Durchmesser der Polschuhbohrung — einer konstruktiven, mit dem Linsenfeld allerdings nicht in eindeutigem Zusammenhang stehenden Größe — noch zwei weitere Linsenkonstanten auftreten, deren Zahlenwerte v. Ardenne eigenen Erfahrungswerten des Öffnungsfehlers anpaßt [20a, 21—23]. Einen Versuch, aus dem mit dem Übermikroskop erreichten Auflösungsvermögen auf die Öffnungsfehlerkonstante zu schließen, haben v. Borries und Ruska [32a] unternommen, indem sie dafür sorgten, daß Beugung und Farbfehler vernachlässigbar blieben. Die hierbei sich ergebenden Zahlenwerte erschienen jedoch gegenüber denen, die aus den damals bekannten theoretischen Rechnungen [13] geschätzt werden konnten, um rund drei Zehnerpotenzen zu hoch. Danach kommen für die Begrenzung des Auflösungsvermögens außer dem Öffnungsfehler noch die weiteren geometrischen Bildfehler und eine Reihe äußerer technischer Störungen in Betracht, wie die Verfasser inzwischen [33e] selbst ausgesprochen haben. v. Ardenne [22a, 23] gab später den theoretischen Wert rund 100fach übertreffende Zahlen,

[1]) Noch unveröffentlicht.

die sich auf Messungen mittels einer besonders für Öffnungsfehlerbestimmungen gebauten Einrichtung gründen, bei der jedoch die oben besprochene Mitwirkung anderer Bildfehler ebenfalls nicht vermieden werden konnte [22b]. Um die einzelnen Fehler und Störungen voneinander zu trennen, fehlte die Kenntnis der meisten Einzelwerte und der Art ihres Zusammenwirkens[1]). An elektrostatischen Einzellinsen sind Brennweiten von Mahl [42] sowie Öffnungs- und Farbfehler von Boersch [29a] bestimmt worden.

Über experimentelle Untersuchungen der übrigen Bildfehler starker Linsen ist unseres Wissens bisher noch nichts bekanntgeworden.

3. Zahlenmäßige Durchrechnung starker Linsen[2]).

Nach den Betrachtungen in Abschnitt 2b setzen wir für das Folgende den Verlauf der „Feldkurve", d. h. des Potentials $\Phi(z)$ auf der Achse z der elektrischen Linse bzw. der magnetischen Feldstärke $H(z)$ längs der Achse z der magnetischen Linse, als bekannt voraus (vgl. Fig. 1, 3 und 4).

a) Annäherung der Feldkurve durch analytische Ausdrücke. Zur besseren Annäherung an die empirische Feldkurve 4, Fig. 1, muß man in Gleichung (4) μ noch wesentlich größer als 1,5 wählen. Hierin finden wir jedoch eine Grenze: Wenn man in (4) die Halbwertsbreite

$$d = a\sqrt{2^{1/\mu} - 1} \tag{5}$$

einführt, $z/d = x$ schreibt und berücksichtigt, daß für große μ

$$2^{1/\mu} = e^{1/\mu \ln 2} \approx 1 + \frac{1}{\mu}\ln 2 \tag{6}$$

ist, so folgt

$$\xi_3 = \lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{\left(1 + x^2 \frac{1}{\mu}\ln 2\right)^{\mu}} = e^{-x^2 \ln 2}. \tag{7}$$

Wie Fig. 1 zeigt, stellt Gleichung (7) (Kurve 3, Fig. 1) unter den betrachteten Funktionen die beste Näherung für das Linsenfeld unterhalb der Sättigungsgrenze (Kurve 4) dar; in der Durchrechnung für unsere Zwecke führt sie aber nicht zu bekannten bzw. in Tafeln vorliegenden Funktionen.

Um den Einfluß der Feldkurvenform zu übersehen, scheint es bei dieser Sachlage erwünscht, ein möglichst einfaches, auf beliebige, auch empirische Feldkurven anwendbares Berechnungsverfahren zu haben. Der Schwerpunkt der Berechnung liegt dabei auf der Ermittlung zweier verschiedener achsennaher („Gaußscher") Bahnen.

---

[1]) Vgl. hierzu auch die Diskussion der Fehlergrößen bei v. Ardenne [20]. —
[2]) Herrn Prof. Glaser, Prag, dankt der Verfasser für wertvolle Diskussionen zu diesem Abschnitt.

b) Zahlenmäßige Bahnberechnung. Da die achsennahen Bahnen in dem fast homogenen Feldbereich in der Umgebung der Achse verlaufen,

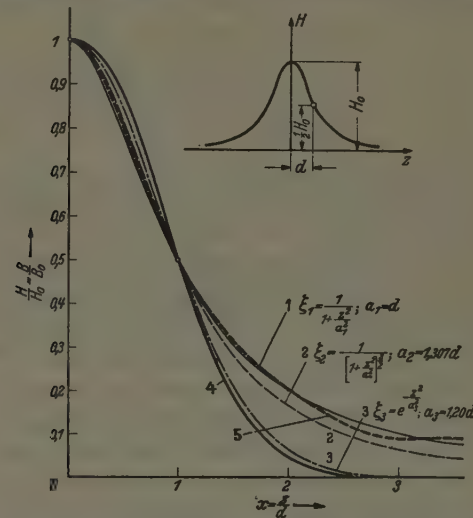


Fig. 1. Feldkurven verschiedener Form. Die Ordinaten sind in Bruchteilen des Feldhöchstwertes (H_0; B_0), die Abszissen in Vielfachen der halben Halbwertsbreite d (vgl. Bild rechts oben) der jeweiligen Feldkurve aufgetragen.

1. Glockenkurve,
2. Kreisstromfeld,
3. Gaußkurve,

} analytische Funktionen;

4. Feldkurve eines magnetischen Objektivs (Bildseite) unterhalb der Sättigungsgrenze; Durchflutung $D = 2600$ AW,
5. Feldkurve des gleichen Objektivs bei merklicher Sättigung, $D = 4800$ AW,

} gemessene Kurven.

liegt es nahe, die Bahnen schrittweise aus Wurfparabelstücken zusammenzusetzen. Für das elektrostatische Feld ist der Berechnungsgang folgender: In der allgemeinen Entwicklung für das Potential φ nach Potenzen des Achsenabstandes r beschränkt man sich auf die ersten beiden Glieder:

$$\varphi(z, r) = \Phi(z) - \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} \cdot \frac{r^2}{4}. \tag{8}$$

Daraus folgt die zur Achse senkrechte Feldstärke (Fig. 2)

$$\mathfrak{E}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} \cdot \frac{r}{2}, \tag{9}$$

die für die Parabelbewegung maßgebend ist. Für jeden Schritt Δz längs der Achse (Fig. 2) berechnet man hiernach die mittlere Feldstärke $\mathfrak{E}_r$, wobei das zugehörige r aus dem vorhergehenden Bahnverlauf $r(z)$ extra-

poliert wird. Die Geschwindigkeit des Elektrons parallel zur Achse, v_z, ist aus $\Phi(z)$ und der Anlaufspannung U_0 zu berechnen nach

$$v_z^2 = \frac{2e}{m}(\Phi(z) + U_0), \tag{10}$$

während die Quergeschwindigkeit v_r sich als Summe

$$v_r = \sum \Delta v_r \tag{11}$$

aus den Δv_r der vorhergehenden Schritte ergibt. Dieses etwas verwickelt erscheinende Verfahren erweist sich bei zweckmäßiger Ausgestaltung als bequem und sehr anschaulich, worüber später näher berichtet werden soll[1]).

Das gleiche Verfahren läßt sich auch auf Magnetlinsen anwenden, wenn man das von Störmer [19] eingeführte Ersatzpotential verwendet, d. h. die Bahn in einer mit dem Elektron sich um die Achse mitdrehenden Meridianebene verfolgt, wie der Verfasser früher [2] gezeigt hat. Infolge der gleichbleibenden Elektronengeschwindigkeit wird das Rechenschema noch einfacher als für das elektrostatische Feld.

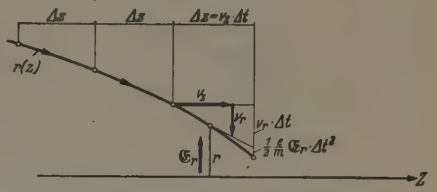


Fig. 2. Zur Berechnung von Elektronenbahnen aus Parabelstücken in beliebigen vorgegebenen Linsenfeldern.

Die Bahnen $y(x)$ in Fig. 3 und 4 sind nach dem geschilderten Verfahren berechnet. Das Feld der elektrischen Linse (Fig. 3) ist so stark gewählt, daß die Elektronen in der Feldmitte auf 20 v. H. der Energie eU_0 abgebremst werden, die sie außerhalb der Linse besitzen. Man erkennt an dem Verlauf der Bahn die Zerstreuungswirkung in den Außenbezirken und die diese überwiegende Sammelwirkung des mittleren Teiles der Linse. In Fig. 4 ist der Parameter mit $k^2 = 0{,}37$ [Gleichung (3)] so gewählt, daß sich die gleiche Brennweite wie in Fig. 3 ergibt. (Die Bahn weicht von der nach Glaser [12] unmittelbar berechneten nur um wenige 10^{-3} ab.) Die Magnetlinsen besitzen bekanntlich in allen Teilen nur Sammelwirkung, so daß die Bahn stets zur optischen Achse hin gekrümmt ist.

c) Die Brennweite. Da die Brennweiten f — sowie alle Bildfehlerkonstanten — der Feldlänge verhältnisgleich sind, beziehen wir diese Größen auf die Halbwertsbreite der Feldkurve d (Fig. 1) und bezeichnen diese bezogenen Werte mit „Brennweitenzahl" f/d, „Öffnungsfehlerzahl" $C_{\ddot{o}}/d$ usw..

[1]) Das Verfahren läßt sich natürlich auch rein mathematisch als eine Näherungslösung der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen herleiten.

Mit Hilfe der Bahn in Fig. 3 bzw. 4, die parallel zur Achse im Abstand $y_\infty = 1$ [1]) aus dem Bildraum kommt und die Achse im dingseitigen Brennpunkt F schneidet, bestimmt man die Brennweitenzahl zu

$$\frac{f}{d} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0}. \tag{12}$$

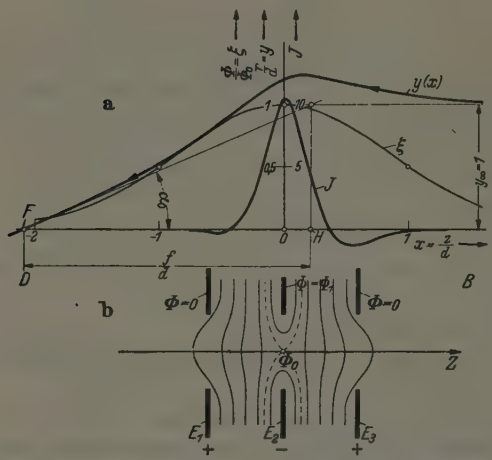


Fig. 3. Elektronenbahn im Feld einer elektrostatischen Einzellinse.

a) Achsenabstand y (bezogen auf d, Fig. 1) der Bahn, Potentialverlauf ξ (bezogen auf Höchstwert Φ_0) längs der Linsenachse. Annahme: $\xi = \frac{1}{1+x^2}$; $\Phi_0 = -0{,}8\,U_0$. F Brennpunkt, H zugehöriger Hauptpunkt, D Dingraum, B Bildraum, J Verlauf des Integranden in der Bestimmungsgleichung (18) für die Öffnungsfehlerzahl $s_{\bar{O}} = C_{\bar{O}}^{el}/d$ (vgl. Abschnitt 5, S. 742).

b) Schema der Potentialverteilung zwischen den Elektroden $E_{1,\,2,\,3}$.

Wie die Brennweitenzahl der Magnetlinse von deren Stärke, d. h. vom Parameter k^2, Gleichung (3), und von der Feldform abhängt, zeigt Fig. 5.

Für das Glockenfeld ist [12a]

$$\frac{f}{d} = \frac{1}{\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}} \quad \text{(Fig. 5, Kurve 1).} \tag{18}$$

Die Feldform Gleichung (7) (Fig. 1, Kurve 3), für die einige Bahnen mit verschiedenen k^2 schrittweise berechnet wurden, ergibt einen grundsätzlich anderen Verlauf (Fig. 5, Kurve 2): Während für das Glockenfeld ein Kleinst-

[1]) Die Wahl dieser Zahlenwerte verstößt nur *scheinbar* gegen die Bedingung *achsennaher, flacher* Strahlen, da wir in der Darstellung des Feldes für die Bahnberechnung ja ausdrücklich die Glieder höherer als zweiter Ordnung fortlassen [vgl. Gleichungen (8) und (9)].

wert $f/d = 1$ bei $k^2 = 3$ auftritt, fällt bei der Feldform (7) f/d mit wachsendem k^2 beständig weiter. Ob der eine oder andere Fall eintritt, hängt davon ab, wie steil die Feldkurve mit wachsendem x abfällt (Fig. 1). Im Grenzfall

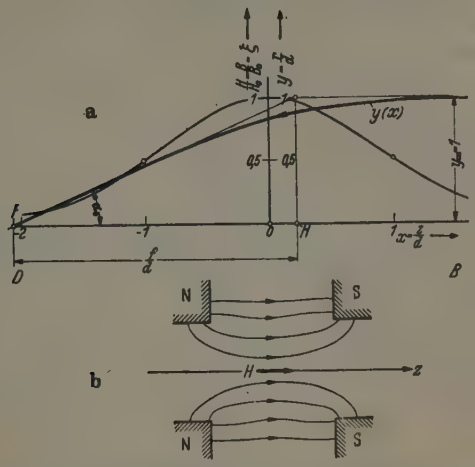


Fig. 4. Elektronenbahn im Feld einer Magnetlinse.
a) Achsenabstand $y = r/d$ eines parallel zur Achse aus dem Bildraum einfallenden Strahles. Feldkurve $\xi(x) = \frac{H(x)}{H_0} = \frac{1}{1+x^2}$ nach Gl. (2); $k^2 = 0{,}37$, F dingseitiger Brennpunkt, H zugehöriger Hauptpunkt, D Dingraum, B Bildraum.
b) Schema des Kraftlinienverlaufs zwischen den Polschuhen NS der Linse bei magnetisch gesättigten Polschuhspitzen.

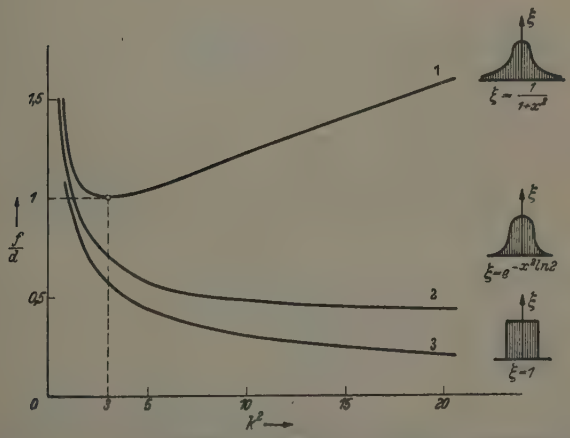


Fig. 5. Berechnete Abhängigkeit der Brennweitenzahl f/d vom Feldparameter k^2 nach Gl. (3) für verschiedene in der Figur rechts angegebene Formen der Feldkurve $\xi(x)$ (vgl. auch Fig. 1). (Magnetlinse.)

eines homogenen Feldstückes mit unendlich steilen Flanken erhält man die Kurve 3, Fig. 5.

Bei den praktisch benutzten Magnetlinsen mit Eisenkapselung ist die Feldform selbst noch abhängig von der Stärke der Linse, d. h. von der Durchflutung der Linsenspule (vgl. Fig. 1, Kurve 4 und 5; vgl. auch [46]). Da mit wachsender Durchflutung (wachsendem k^2) die Feldkurve sich im allgemeinen verflacht, wird der Verlauf von f/d mit k^2 anfangs der Kurve 2, Fig. 5, folgen und bei merklich werdender Sättigung des Eisens zur Kurve 1 übergehen (vgl. Fig. 8).

d) Zahlenmäßige Berechnung der Bildfehlerzahlen. Mit der Ermittlung der Gaußschen Bahnen ist der wesentliche Schritt zur Berechnung der Bildfehlerzahlen getan [8, 9a, 11]. Mit Rücksicht auf die Verhältnisse beim Mikroskopieren beschränken wir die folgenden Betrachtungen stets auf den Fall hoher Vergrößerung, nehmen also den Dingort in der Brennebene (F, Fig. 3 und 4) an.

Als Beispiel berechnen wir Öffnungs- und Farbfehlerzahl für das gemessene Magnetfeld unterhalb der Sättigungsgrenze (Feldkurve 4, Fig. 1). Schreiben wir für den Halbmesser des Öffnungsfehlerscheibchens

$$\delta_{\ddot{O}} = C_{\ddot{O}} \cdot \alpha^3, \tag{14}$$

wobei $\delta_{\ddot{O}}$ auf die Dingebene bezogen und α der halbe Öffnungswinkel oder kurz „die Öffnung" des vom Dingpunkt ausgehenden Strahlenkegels ist, und entsprechend für den Halbmesser des Farbfehlerscheibchens

$$\delta_F = C_F \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta U}{U_0}, \tag{15}$$

das bei einer Schwankung ΔU der Anlaufspannung U_0 der Elektronen in der Bildebene entsteht (vgl. Fig. 12), so bestimmen sich $C_{\ddot{O}}$ und C_F für die Magnetlinse aus

$$\gamma_{\ddot{O}} = \frac{C_{\ddot{O}}}{d} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^4\alpha_0} \int_{Ding}^{Bild} \left[\left(k^2\xi^2 - \frac{\xi''}{\xi}\right) k^2\xi^2 h^4 + 2\,k^2\xi^2 h^2 h'^2 + h'^4\right] \mathrm{d}x \tag{16}$$

und

$$\gamma_F = \frac{C_F}{d} = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha_0} \int_{Ding}^{Bild} h'^2\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Für die elektrostatische Linse gilt entsprechend

$$\varepsilon_{\ddot{O}} = \frac{C_{\ddot{O}}^{el}}{d} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^4\alpha_0} \int_{Ding}^{Bild} \Big[\frac{1}{16\sqrt{1+\psi}}\left(\frac{\psi''^2}{1+\psi} - \psi''''\right) h^4 + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi}}\,h^2 h'^2 + \sqrt{1+\psi}\,h'^4\Big]\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

und

$$\varepsilon_F = \frac{C_F^{el}}{d} = \frac{3}{8} \frac{\psi_0^2}{\operatorname{tg}^3 \alpha_0 \sqrt{1+\psi_{Ding}}} \int_{Ding}^{Bild} \frac{\xi'^2}{(1+\psi)^{5/2}} h^2 \, \mathrm{d}x, \tag{19}$$

wobei

$$\psi = \frac{\Phi(x)}{U_0} \tag{20}$$

das auf U_0 bezogene Potential innerhalb der Linse ist. Die Stärke der elektrostatischen Einzellinse wird durch

$$\psi_0 = \frac{\Phi_0}{U_0}, \tag{21}$$

das auf U_0 bezogene Potential im Sattelpunkt des elektrischen Feldes (Fig. 3), gekennzeichnet.

h in den Gleichungen (16) bis (19) bedeutet die achsennahe Bahn, die vom Dingpunkt mit der Neigung $\operatorname{tg} \alpha_0$ ausgehend zum Bildpunkt führt, also die

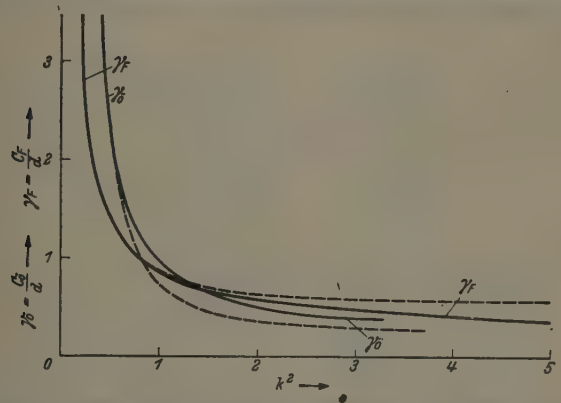


Fig. 6. Öffnungsfehlerzahl $\gamma_{\ddot{O}} = C_{\ddot{O}}/d$ und Farbfehlerzahl $\gamma_F = C_F/d$ in Abhängigkeit vom Feldparameter k^2 für das Feld des untersuchten Objektivs unterhalb der Sättigungsgrenze (Feldkurve 4, Fig. 1). Zum Vergleich (gestrichelt) die entsprechenden Werte für das Glockenfeld nach Gl. (2) (Kurve 1, Fig. 1). (Magnetlinse.)

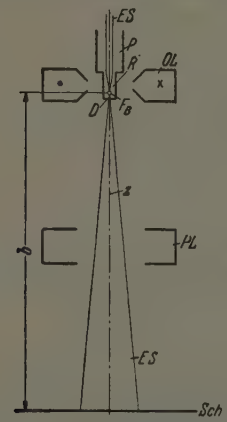
Bahn $y(x)$ in Fig. 3 bzw. 4. Durch Berechnung solcher Bahnen für verschiedene k^2 und Auswertung der Gleichungen (16) und (17) wurden die Kurven in Fig. 6 gewonnen. Der Vergleich mit dem gestrichelt eingetragenen Verlauf für das Glockenfeld [12c] lehrt, daß dieses für die Berechnung von $C_{\ddot{O}}$ und C_F eine gute Näherung darstellt. Auffällig ist, daß beim Übergang von der steileren, empirischen Feldkurve zur flacheren Glockenkurve die

Öffnungsfehlerzahl kleiner, die Farbfehlerzahl größer wird. Darüber hinaus konnte ein übersichtlicher Zusammenhang mit der Steilheit der Feldkurve nicht gefunden werden.

Zur Berechnung der übrigen Bildfehlerzahlen benötigen wir außer der Bahn $h(x)$ noch eine weitere Bahn $g(x)$, die von einem nicht auf der Achse gelegenen Dingpunkt ausgeht und die optische Achse in der Blendenebene schneidet. Setzt man statt der Öffnung α des vom Dingpunkt ausgehenden Strahlenbündels — wie in den Gleichungen (14) und (15) — eine reelle Blende von bestimmter Größe als gegeben voraus, so hat man den Bahnen $h(x)$ und $g(x)$ die Bedingungen $h_{Blende} = 1$ und $g_{Dingort} = 1$ aufzuerlegen [8, 9a]. Dies ist bei der Berechnung der Bildfehlerzahlen in Abschnitt 5, Tabelle 1 geschehen (vgl. S. 748).

4. *Neuere Messungen optischer Kenngrößen.*

a) Brennweiten. Die Abhängigkeit der Brennweite von der Linsenstärke ist an einem Übermikroskop-Objektiv[1]) in folgender Weise gemessen



P Objektpatrone mit längerem Rüssel *R*, längs der optischen Achse *z* verschiebbar;
D Dingebene;
OL Objektivlinse;
F_B Bildseitiger Brennpunkt der Objektivlinse;
PL Projektionslinse, bei den vorliegenden Untersuchungen unbenutzt;
Sch Endbildschirm;
ES Elektronenstrahl;
b Bildweite, für alle vorliegenden Messungen genügend genau 590 mm. Insbesondere kann wegen der hohen Vergrößerung die Lage der Hauptebenen unberücksichtigt bleiben.

Fig. 7. Versuchsanordnung zur Messung optischer Kenngrößen an Linsen des Übermikroskops.

worden: In das Übermikroskop [34] (vgl. das Schema Fig. 7) wurde an Stelle der üblichen Objektpatrone eine Patrone *P* mit einem längeren Fortsatz *R* eingeschleust, an dessen unterem Ende sich eine geeignete Objektblende befand, so daß diese durch das ganze Linsenfeld hindurch bewegt werden konnte. Das mit dem Objektiv einstufig vergrößerte Bild

[1]) Es handelt sich um ein älteres Baumuster.

der Objektblende auf dem Endbildschirm diente zur Bestimmung der Vergrößerung V bzw. der Brennweite f nach

$$f = \frac{b}{V}, \tag{22}$$

da wegen der stets hohen Vergrößerung (100 bis 600) Ding- und Brennebene praktisch zusammenfallen. Zu jeder Stellung der Dingebene ergibt

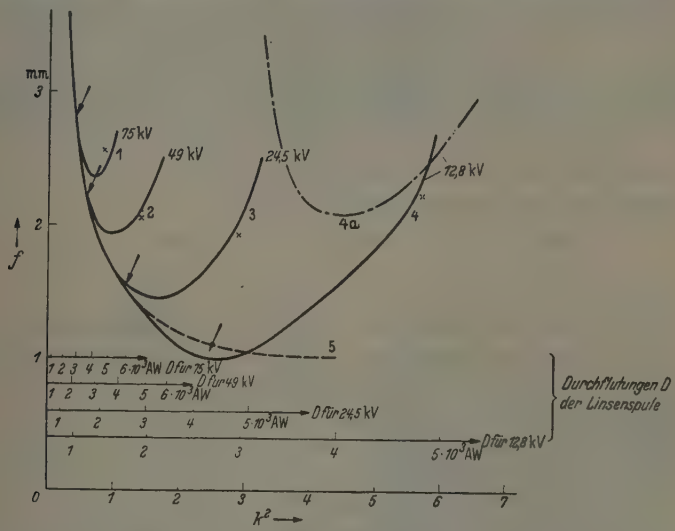


Fig. 8. Brennweite f eines magnetischen Objektivs, in Abhängigkeit vom Parameter k^2 für verschiedene Beschleunigungsspannungen U_0, gemessen mit der Anordnung Fig. 7.

Zum Vergleich mit der Theorie sind eingetragen: als Kurve 5 die auf Grund der Feldkurve 4, Fig. 1, des Objektivs nach Abschnitt 3c berechneten Brennweiten; als Punkte × die auf Grund der Feldkurve 5, Fig. 1, (bei stärkerer Sättigung im Eisenkreis des Objektivs) berechneten Brennweiten.

Die Pfeile bezeichnen das Eintreten der Sättigung im Eisenkreis der Linse. Bei größerem k^2 gibt es zwei (oder mehrere) auf dem Endbildschirm (Fig. 7) gleichzeitig scharf abgebildete Objektebenen; die zugehörigen Brennweiten bei $U_0 = 12{,}8$ kV sind durch die Kurven 4 und 4a wiedergegeben.

sich bei scharfer Abbildung[1]) eine bestimmte Durchflutung der Linsenspule, zu der aus den früher mitgeteilten Feldmessungen [38] der Induktions-

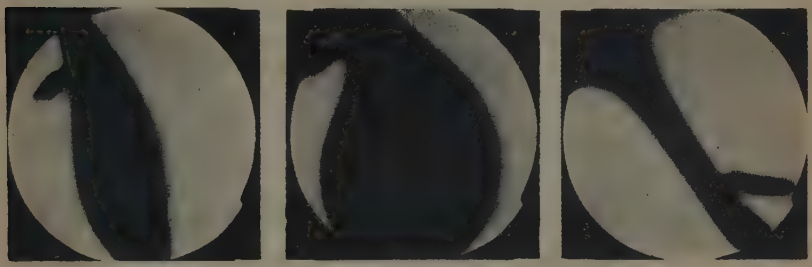
[1]) Zur Erleichterung genauer Scharfstellung wurde mit verhältnismäßig *großer* Objektivblende, zum Teil sogar *ohne* diese gearbeitet, so daß auch stark gestreute Elektronen in das Bild gelangen. Hierdurch wird die Öffnung des Strahlenkegels im Bildpunkt größer und daher die Einstellgenauigkeit der Bildebene höher.

höchstwert B_0 und die Halbwertsbreite d zu entnehmen und mit diesen Werten der Parameter k^2 nach Gleichung (8) zu berechnen ist. Die so gewonnene Abhängigkeit der Brennweite f von k^2 ist in Fig. 8 für verschiedene Beschleunigungsspannungen U_0 durch die Kurven 1 bis 4 wiedergegeben. Die durch Kurve 4a gegebenen Brennweiten erhält man dadurch, daß man bei den gleichen Durchflutungen wie für Kurve 4 das Objekt soweit zur Dingseite der Linse (nach oben in Fig. 7) verschiebt, bis abermals ein scharfes Bild des Objektes auf dem Endbildschirm erscheint. Das Objekt wird dann zweistufig abgebildet, indem in der früheren Objektebene ein erstes Bild (Zwischenbild, vgl. [46]) entsteht, das seinerseits durch den Rest des Linsenfeldes auf dem Endbildschirm abgebildet wird. Bei genügend großem k^2 (langsamen Elektronen und starkem Feld) erhält man beliebig viele verschiedene Brennweiten bzw. Zwischenbilder; die Güte der Abbildung wird dabei jedoch merklich herabgesetzt [46].

Zum Vergleich mit der Theorie ist in Fig. 8 als Kurve 5 der Verlauf der Brennweite für das gemessene Linsenfeld [38] (Fig. 1, Kurve 4) auf Grund schrittweise nach Abschnitt 3b berechneter Bahnen eingetragen. Die Übereinstimmung ist im Gebiet unterhalb der Sättigung im Eisen sehr gut. Bei Eintreten der Sättigung (in Fig. 8 durch Pfeile gekennzeichnet) weichen die gemessenen Brennweiten von der Kurve 5 nach oben ab, da die Halbwertsbreite größer [38] und die Feldkurve flacher wird (vgl. Fig. 1, Kurve 4 und 5); f durchläuft ein mehr oder minder tiefes Minimum, um dann rasch anzusteigen [46]. Zur weiteren Nachprüfung sind für eine Durchflutung $D = 4800$ AW (Kurve 5, Fig. 1), also bei bereits starker Sättigung, die Brennweiten ebenfalls berechnet und die entsprechenden Punkte in Fig. 8 vermerkt worden. Auch hier stimmen Messung und Rechnung gut überein. Kurve 4 zeigt im Gebiet $1{,}4 < k^2 < 3$ zu kleine, im Gebiet $3 < k^2 < 5$ etwas zu große Brennweiten, da die Vergrößerungen V infolge kissenförmiger ($k^2 < 3$) bzw. tonnenförmiger ($k^2 > 3$) Verzeichnung zu groß bzw. zu klein gemessen werden. Darüber hinaus zeigen sich in diesem Gebiet um $k^2 \approx 3$ besonders starke Abbildungsfehler, da das bestrahlende Bündel durch die Wirkung des *vor* der Dingebene liegenden Feldteiles sehr schräg und mit großer Öffnung auf die Dingebene trifft.

b) Der Öffnungsfehler (sphärische Aberration). Wie Boersch [28, 29] gezeigt hat, verursacht der Öffnungsfehler beim Schattenbildwurf keine Unschärfe, sondern eine Verzeichnung des Bildes. Aus dem Öffnungsfehlergesetz Gleichung (14) kann man die Verzeichnung berechnen oder umgekehrt aus der Verzeichnung die Öffnungsfehlerkonstante ermitteln [29a].

Allerdings muß man damit rechnen, daß die anderen, mit der Öffnung der Linse bzw. des Strahlenkegels (α) wachsenden Fehler (Koma mit α^2, Astigma-



a b c

Fig. 9. Schattenbilder einer Asbestfaser, infolge mangelhafter Zentrierung des Strahlenganges zerdreht. Bei *a* und *b* entsprach die Dinglage der Stellung *D* in Fig. 15, bei *c* der Stellung *D'*.

tismus und Bildwölbung mit α) eine zusätzliche Verzeichnung verursachen. Insbesondere tritt bei Magnetlinsen eine Zerdrehung des Bildes auf, wie Fig. 9 an einigen Beispielen zeigt. Hieran kann man gröbere Zentrierfehler des Strahlenganges erkennen.

Wie im Anhang aus dem Öffnungsfehlergesetz (14) hergeleitet wird, besteht zwischen den Strecken d_0, d_1 und r in dem Schattenbild Fig. 10 die Beziehung (Anhang, Gleichung A 10)

$$\nu = \frac{d_1 - d_0}{d_1} = \frac{3\,V_0\,C_{\ddot{o}}}{b^3\sigma^3}\cdot r^2. \quad (23)$$

Fig. 10. Schattenbilder eines Spinnwebfadens von 0,9 μ Stärke bei guter Zentrierung des Strahlenganges. Zur besseren Bestimmung der Verzeichnung ist das Bild des Fadens in drei parallelen Stellungen auf der gleichen Platte aufgenommen. $U_0 = 86$ kV, $D = 5600$ AW. Originalvergrößerung in der Bildmitte $V_0 = 6700$.

(V_0 Vergrößerung in der Bildmitte, b Bildweite nach Fig. 15; σ berücksichtigt die Krümmung der Strahlen hinter dem Brennpunkt F_0, vgl. Fig. 15b). Die Ausmessung der Fig. 10 ergibt die in Fig. 11 eingetragenen Punkte, die sich der Geraden unter der nach (23) geforderten Neigung 2 gut anpassen und damit die gute Zentrierung des Strahlenganges bestätigen. Die Lage der Geraden entspricht nach Gleichung (23) mit den Zahlenwerten

$V_0 = 6700$ (Fig. 10), $v/r^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ (Fig. 11), $b = 590$ mm (Fig. 7) und $\sigma = 0{,}90$ (vgl. Anhang S. 751) einer Öffnungsfehlerkonstante

$$C_{\ddot{O}\,gem.} = 1{,}1 \text{ mm} \qquad (24)$$

(die Brennweite betrug $f = 2{,}7$ mm). Eine Unsicherheit des Zahlenwertes in (24) von etwa $\pm$ 20 v. H. ist durch die Fehlermöglichkeiten in der Bestimmung der Vergrößerung V_0 in der Mitte des Schattenbildes 10 bedingt. Durch Wahl geeigneter Objekte wird sich die Genauigkeit steigern lassen.

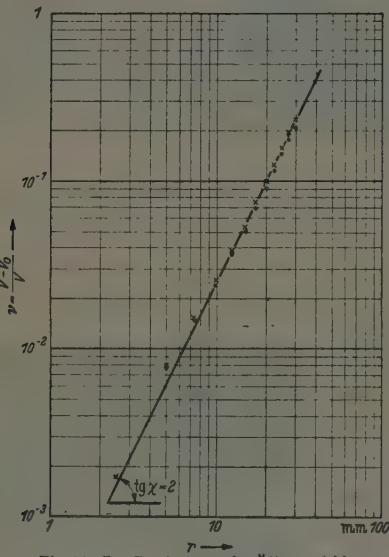


Fig. 11. Zur Bestimmung der Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{O}}$ nach Gl. (A 8) bzw. (A 11) aus dem Schattenbild 10.

Aus der Theorie (Abschn. 3 d) folgt unter Zugrundelegung der zu $D = 5600$ AW gehörigen Feldkurve, die von der Glockenkurve kaum abweicht und deren Halbwertsbreite $d = 1{,}95$ mm beträgt [38], der Wert

$$C_{\ddot{O}\,theor.} = 1{,}6 \text{ mm}, \qquad (25)$$

bei einem Parameterwert $k^2 = 0{,}92$ nach Gleichung (8). Hiermit ist gezeigt, daß Theorie und Experiment bei dieser kurzbrennweitigen Magnetlinse auch hinsichtlich der Öffnungsfehlerkonstanten befriedigend übereinstimmen.

Zum Vergleich mit einer elektrostatischen Einzellinse haben wir nach dem gleichen Verfahren das von Boersch [28a] wiedergegebene Schattenbild ausgewertet und eine Öffnungsfehlerkonstante

$$C_{\ddot{O}}^{el} = 55 \ldots 110 \text{ mm} \qquad (26)$$

(bei $f = 5{,}6$ mm Brennweite) gefunden. (Vgl. hierzu auch Abschnitt 5, S. 741.)

Eine Vergleichsmöglichkeit mit Magnetlinsen *großer* Brennweite bieten Zahlenangaben von Becker und Wallraff [27a]: Dort wurden für zwei Magnetlinsen ohne Eisenkapselung die den Öffnungsfehler beschreibenden Seidelschen Koffizienten S_1 experimentell bestimmt, die mit unserem $C_{\ddot{O}}$ zusammenhängen nach

$$C_{\ddot{O}} = 4 f^3 S_1. \qquad (27)$$

Mit $S_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ mm^{-2} und $f = 100$ mm wird $C_{\ddot{o}} = 1160$ mm, mit $S_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ mm^{-2} und $f = 95$ mm wird $C_{\ddot{o}} = 547$ mm. Die $C_{\ddot{o}}$ sind bei diesen großen Brennweiten (kleine k^2, große d, vgl. Fig. 5 und 6!) erwartungsgemäß um mehrere Zehnerpotenzen höher als bei den Objektiven des Übermikroskops.

c) Die weiteren geometrischen Bildfehler. Die experimentelle Nachprüfung der übrigen Bildfehlerzahlen (Koma, Astigmatismus, Bildwölbung und Verzeichnung) gestaltet sich wesentlich schwieriger, besonders deshalb, weil bei den Linsen des Übermikroskops in der Regel keine reelle Öffnungsblende benutzt wird und die auftretenden Abweichungen vom Gaußschen Bildpunkt im allgemeinen von vier Parametern abhängen. Die beiden ersten sind die Öffnung α des vom Dingpunkt ausgehenden Strahlenkegels und der Dingpunktsabstand von der Achse. Der dritte und vierte Parameter bestimmen die Richtung, unter der die Achse des bestrahlenden Bündels den Dingpunkt trifft; diese kann im allgemeinen windschief zur optischen Achse sein. Hierbei muß man sich noch vor Augen halten, daß das Strahlenbündel meist einen merklichen Teil des Magnetfeldes der Linse noch vor dem Erreichen des Dingpunktes durchdringt und dabei seine ursprüngliche Richtung und Öffnung verändert. Eine einigermaßen zuverlässige Bestimmung der Bestrahlungsverhältnisse im Dingpunkt wird dadurch außerordentlich erschwert. Berechnungen und Vergleiche mit experimentellen Werten sollen späteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Als vorläufiges Ergebnis möge hier nur mitgeteilt werden, daß die Verzeichnung des oben schon näher untersuchten Objektivs bei einem Dingfelddurchmesser von 0,3 mm und den aus Fig. 8 für $k^2 = 1 \ldots 1{,}5$ und $U_0 = 60 \ldots 80$ kV zu entnehmenden Brennweiten noch kaum feststellbar ist. Eine überschlägige Ermittlung der theoretischen Werte steht nicht im Widerspruch hierzu.

d) Der Farbfehler. In besonders einfacher Weise läßt sich der Farbfehler mit Hilfe des Schattenbildwurfes bestimmen[1]). Das chromatische Zerstreuungsscheibchen entsteht nach Fig. 12 durch die axiale Verlagerung des Brennpunktes von F_0 nach F_1 infolge einer Schwankung $\Delta U/U_0$ der Anlaufspannung. Für die Verschiebung des Brennpunktes Δz_f gilt [11a] mit den Bezeichnungen Fig. 12

$$\Delta z_f = \delta_F \cdot \frac{1}{\alpha}, \tag{28}$$

[1]) Vgl. auch Boersch [29a]. Dort wird jedoch die Voraussetzung der kurzen (schwachen) Linse gemacht, d. h. in Gleichung (28) wird $\Delta z_f = \Delta f$ gesetzt.

und es folgt aus (15) und (28) für die Farbfehlerkonstante

$$C_F = \frac{\Delta z_f}{\Delta U/U_0}. \qquad (29)$$

Verändert man die Anlaufspannung U_0 um einen bekannten kleinen Betrag ΔU, so verschiebt sich der Brennpunkt um die Strecke Δz_f längs der Achse und das Schattenbild des Objektes verändert seine Größe. Be-

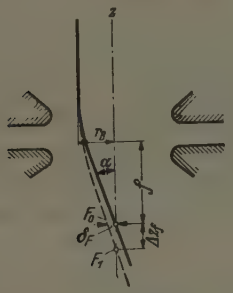


Fig. 12.

Zur Bestimmung der Farbfehlerkonstanten C_F aus der Brennpunktverschiebung Δz_f beim Schattenbildwurf nach Fig. 15.

F_0, F_1 Lage der Brennpunkte bei zwei etwas verschiedenen Anlaufspannungen U_0.

stimmt man die beiden Vergrößerungswerte V_1 und V_2, so folgt nach dem Strahlensatz (vgl. Fig. 15b und die Gleichungen A 5 und A 8 des Anhanges)

$$\Delta z_f = \sigma \cdot b \cdot \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right), \qquad (30)$$

wobei σ wieder die Strahlenkrümmung hinter dem Brennpunkt F_0 berücksichtigt. Es ergab sich bei $U_0 = 78$ kV und $\Delta U = 360$ Volt $\Delta z_f = 6{,}2 \ldots 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm ($\sigma \approx 1$). Aus (29) erhalten wir so

$$C_{F\,gem.} = 1{,}35 \ldots 1{,}65 \text{ mm} \qquad (31)$$

($f = 2{,}4$ mm). Die Berechnung nach Fig. 6 liefert für diesen Fall ($D = 3900$ AW, $d = 1{,}7$ mm, $k^2 = 0{,}64$)

$$C_{F\,theor.} = 2{,}0 \text{ mm}, \qquad (32)$$

in befriedigender Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert. Nach der strengstmöglichen Abschätzung [11a] ist $C_F \leqq f = 2{,}4$ mm; die obere Grenze liegt nur wenig höher als der wirkliche Wert, da die Linse mit $k^2 = 0{,}64$ nicht sehr stark ist (vgl. hierzu [11]). Für eine elektrostatische Linse fand Boersch [29a] experimentell $C = 20$ mm ($f_F^{le} = 5{,}6$ mm).

5. *Vergleich der Abbildungsfehler starker elektrostatischer und magnetischer Linsen.*

Besonders interessant erschien es, einen Vergleich zwischen elektrostatischen und magnetischen starken Linsen durchzuführen und dabei die heute in den hochauflösenden Mikroskopen verwendeten Linsentypen,

also die einfache[1]) magnetische Polschuhlinse und die elektrostatische Einzellinse zu berücksichtigen. Da uns bisher noch keine genauen Meßergebnisse über den Feldverlauf in der elektrostatischen Linse nach Boersch [29] und Mahl [41] bekanntgeworden sind, wollen wir hier die oben angegebene Funktion (2) als erste Näherung für den Verlauf des Potentials $\Phi(z)$ längs der Linsenachse annehmen. Für die Magnetlinse wählen wir die gleiche Funktion, das Glockenfeld nach (2).

Da die Bahnen in beiden Linsen völlig verschieden verlaufen (vgl. Fig. 3 und 4), können wir als Vergleichsgrundlage nur verlangen, daß beide Linsen gleiche Brennweitenzahl besitzen. Daher haben wir Öffnungs- und Farbfehlerzahlen beider Linsen [$\varepsilon_{\ddot{O}}$, ε_F, $\gamma_{\ddot{O}}$, γ_F, vgl. Gleichungen (14) bis (19)] in einem kleineren, für den Mikroskopierbetrieb heute wichtigen Bereich der Linsenstärke berechnet und in Fig. 13 über der Brennweitenzahl f/d dargestellt. $\varepsilon_{\ddot{O}}$ und ε_F für die elektrische Linse sind nach Abschnitt 3 in der Weise ermittelt, daß für einige Werte des Parameters ψ_0, Gleichung (21), die achsennahe Bahn $y(x)$ (Fig. 3, Abschnitt 3b), die Brennweitenzahl nach Gleichung (12) und die beiden Bildfehlerzahlen nach Gleichungen (18) und (19) zahlenmäßig berechnet wurden. Die entsprechenden Werte $\gamma_{\ddot{O}}$ und γ_F für die Magnetlinse sind unmittelbar nach den von Glaser [12] gegebenen Formeln berechnet. Die Zuordnung der Parameterwerte ψ_0 bzw. k^2 zu f/d geht aus den Angaben unter der Abszisse in Fig. 13b hervor.

Die Bildfehlerzahlen ε_F und $\varepsilon_{\ddot{O}}$ der elektrostatischen Einzellinse sind nach Fig. 13 stets erheblich größer als die Zahlen γ_F und $\gamma_{\ddot{O}}$ der einfachen Magnetlinse. Das Verhältnis der Farbfehlerzahlen ε_F/γ_F liegt bei 5 (Fig. 13a), das der Öffnungsfehlerzahlen $\varepsilon_{\ddot{O}}/\gamma_{\ddot{O}}$ bei 10 (Fig. 13b); die beiden Verhältniszahlen steigen mit wachsender Linsenstärke, d. h. fallender Brennweitenzahl.

Den Grund für diese verhältnismäßig ungünstige Eigenschaft der elektrostatischen Linse erkennt man, wenn man den Verlauf der Integranden in den Bestimmungsgleichungen, z. B. Gleichung (18), mit dem Bahn-

[1]) „*Einfache*" als Gegensatz zur „*bilddrehungsfreien*" Magnetlinse, die aus zwei gleichen, entgegengesetzt polarisierten Teilfeldern gebildet wird. Es besteht zwischen dieser *bilddrehungsfreien Magnetlinse* und der *elektrostatischen Einzellinse* (die aus zwei gleichen, entgegengesetzt gerichteten elektrischen Feldteilen aufgebaut ist, vgl. Fig. 3), sowie zwischen der *einfachen Magnetlinse* und der *elektrischen Beschleunigungs- oder Verzögerungslinse* („Immersionslinse") hinsichtlich der Gaußschen Dioptrik eine formale Übereinstimmung, die Recknagel [14] zur Grundlage eines Vergleiches zwischen einfacher Magnetlinse und elektrischer *Immersionslinse* gemacht hat. Dieser Vergleich trifft also auf die elektrostatische *Einzellinse* nicht zu.

verlauf vergleicht. Fig. 3 zeigt dies am Beispiel des Öffnungsfehlers: Den größten Beitrag zum Integral liefert der mittlere Teil der Linse, offenbar

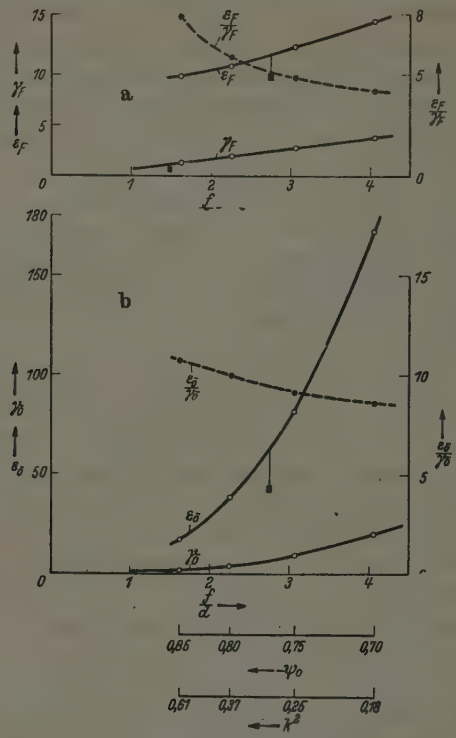


Fig. 13. Farbfehlerzahlen (*a*) und Öffnungsfehlerzahlen (*b*) der elektrostatischen Einzellinse (ε_F, $\varepsilon_{\ddot{O}}$) und der einfachen Magnetlinse (γ_F, $\gamma_{\ddot{O}}$) sowie die Verhältnisse ε_F/γ_F und $\varepsilon_{\ddot{O}}/\gamma_{\ddot{O}}$ der Fehlerzahlen beider Linsen in Abhängigkeit von der Brennweitenzahl f/d berechnet für die Feldform Gl. (2) nach Gln. (14) bis (19).

Die Linsenstärke ist durch die Angabe einiger Werte von ψ_0 (Gl. 21 und Fig. 3) für die elektrische Linse bzw. von k^2 (Gl. 3 und Fig. 4) für die Magnetlinse unter der Abszisse gekennzeichnet. Zum Vergleich sind die (mittleren) gemessenen Werte als ■ nach Abschnitt 4b und 4d eingetragen.

deshalb, weil dort die Elektronen sich am weitesten von der Achse entfernen, also durch Gebiete größerer Linsenfehler laufen und dort auch gerade am langsamsten sind und daher am stärksten beeinflußt werden.

Zum Vergleich mit der Erfahrung haben wir in Fig. 13 die in Abschnitt 4 experimentell gewonnenen (mittleren) Zahlenwerte eingetragen. Für die

Zahlen der Magnetlinse γ_F und $\gamma_{\ddot{O}}$ ergibt sich wie in Abschnitt 4 gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten (Fig. 13a und b links unten). Für die elektrische Linse fehlte uns die Halbwertsbreite d; wir haben diese aus Angaben bei Boersch [28, 29] und Mahl [42] sowie aus einer überschlägigen Feldmessung im elektrolytischen Trog zu 2 mm geschätzt. (Bei Veränderung von d würden sich die in Fig. 13 eingetragenen Punkte für ε_F und $\varepsilon_{\ddot{O}}$ auf einer Geraden durch den Ursprung verschieben). Die experimentellen Werte ε_F und $\varepsilon_{\ddot{O}}$ liegen in Fig. 13 *tiefer* als die berechneten. Dies dürfte sich dadurch erklären, daß die Zerstreuungswirkung der elektrischen Linse, die nach dem oben Gesagten in der Hauptsache für die Bildfehler verantwortlich ist, bei der in der Rechnung angenommenen, verhältnismäßig flachen Feldform sicher stärker ist als bei der wirklichen Linse, da bei letzterer die Außenelektroden nur kleine Öffnungen besitzen und zur Mittelelektrode hin gewölbt sind (vgl. Fig. 3).

Trotzdem sind auch unter diesen für die elektrostatische Linse günstigen Umständen deren wichtigste Fehlerzahlen *fünf- bis siebenmal so groß*, wie die der einfachen Magnetlinse bei *gleicher Brennweitenzahl* wären.

Zur Vervollständigung des Vergleiches haben wir auch die übrigen Bildfehlerzahlen für einen Parameterwert ($\psi_0 = -0{,}8$; $k^2 = 0{,}37$; $f/d = 2{,}26$) berechnet[1]) und in Tabelle 1 zusammengestellt. Da die in den Spalten 4 bis 7 aufgeführten Bildfehlerzahlen von der Blendenlage abhängen, sind alle Bildfehlerzahlen für den Fall berechnet, daß der vom Dingpunkt ausgehende Strahlenkegel nicht durch dessen Öffnung α — wie in den Gleichungen (14) und (15) angenommen — gekennzeichnet, sondern durch eine reelle, zur optischen Achse zentrische kreisförmige Blende begrenzt wird. Öffnungs- und Farbfehlerzahl in Tabelle 1 gehen aus den bisher benutzten Werten (z. B. Fig. 13) hervor, wenn man in den Gleichungen (16) bis (19) die Bahnen $h(x)$ nicht auf $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1$, sondern auf $h_{Bl} = 1$ umrechnet, d. h. in (16) und (18) mit $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{h_{Bl}}\right)^3$ und in (17) und (19) mit $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{h_{Bl}}\right)$ vervielfacht.

Um den Einfluß der Blendenlage in groben Zügen zu übersehen, ist die Berechnung für drei verschiedene Fälle (Blende *vor*, *in* und *hinter* der

[1]) Für die Magnetlinse sind hierbei die auf S. 726 genannten Berechnungen der Bildfehler des Glockenfeldes, die von Glaser und Lammel durchgeführt sind, zahlenmäßig ausgewertet. Veröffentlicht sind bisher diese Rechnungen nur für den Öffnungsfehler und den Farbfehler [12]. Für die Zurverfügungstellung der unveröffentlichten Unterlagen dankt der Verfasser den beiden genannten Herren herzlich. — Für die elektrische Linse wurden die Zahlenwerte der Tabelle 1 nach dem in Abschnitt 3b und 3d geschilderten Verfahren bestimmt, nach dem auch einige Fehlerzahlen des Magnetfeldes kontrolliert wurden.

Tabelle 1.

Vergleich der Bildfehlerzahlen einer elektrostatischen Einzellinse und einer einfachen Magnetlinse.

Linsenöffnung begrenzt durch eine reelle Blende bei x_{B_1}, x_{B_2} oder x_{B_3}.

Feldkurven nach Gleichung (2) (vgl. Fig. 3 und 4); Brennweitenzahl für beide Linsen $f/d = 2{,}26$.

Für die elektrische Linse $\Phi_0 = -0{,}8\,U_0$, vgl. Fig. 3; für die Magnetlinse $k^2 = 0{,}37$, vgl. Fig. 4.

Linsenart	Blendenort	Bildfehlerzahlen					
		Geometrische Bildfehlerzahlen (in Klammern die Zerdrehungsfehler der Magnetlinse)					Farbfehlerzahl
		Öffnungsfehler	Koma	Astigmatismus	Bildwölbung	Verzeichnung	
Elektrostatische Einzellinse	$x_{B_1} = -1{,}136$ (zwischen Dingort und Feldmitte, vgl. Fig. 3 und 4).	39	22	17	18	10	10,5
Einfache Magnetlinse		5,40	$-3{,}62$ $(+1{,}00)$	2,24 $(-1{,}46)$	3,19	$-1{,}60$ $(+0{,}65)$	2,07
Verhältnis $\frac{\text{elektrisch}}{\text{magnetisch}}$		7	-6	8	6	-6	5
Elektrostatische Einzellinse	$x_{B_2} = 0$ (Feldmitte)	2,2	4,1	21,7	22,2	75	4,0
Einfache Magnetlinse		0,54	$-0{,}118$ $(+0{,}116)$	$-0{,}089$ $(-0{,}140)$	0,545	$-0{,}032$ $(+0{,}143)$	0,96
Verhältnis $\frac{\text{elektrisch}}{\text{magnetisch}}$		4	-35	-245	41	-2340	4
Elektrostatische Einzellinse	$x_{B_3} = +2{,}00$ (bildseitiger Brennpunkt)	3,5	8,0	44,1	45,0	163	4,7
Einfache Magnetlinse		0,347	0,261 (0,161)	0,102 (0,200)	0,614	0,361 (0,184)	0,83
Verhältnis $\frac{\text{elektrisch}}{\text{magnetisch}}$		10	31	430	73	450	5,7

Feldmitte) durchgeführt. Bewerkenswert ist, daß die Blendenlage in der Feldmitte verhältnismäßig günstig ist, besonders für die Magnetlinse, da deren Bildfehlerzahlen zum Teil wechselnde Vorzeichen haben, also für bestimmte Blendenlagen verschwinden können. Nähere Betrachtungen zu dieser Frage sollen späteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Daß auch Koma, Astigmatismus, Bildwölbung und Verzeichnung der elektrostatischen Einzellinse stets erheblich größer sind als bei der einfachen Magnetlinse, geht auf die gleiche Ursache zurück wie beim Öffnungsfehler, nämlich auf den größeren Achsenabstand der Bahnen in der Nähe der Linsenmitte.

Die heutige Überlegenheit der Magnetlinse für die Zwecke der hochauflösenden Mikroskopie beruht daher nicht nur auf der Möglichkeit, höhere Spannungen anzuwenden [33, 35, 44] und kleinere Brennweiten [33, 44] sowie, im Zusammenhang hiermit, sehr viel kleinere Bildfehlerkonstanten zu erzielen, sondern auch auf der Tatsache, daß selbst bei gleicher Spannung und Brennweite infolge des verschiedenen Bahnverlaufs in den Linsen die Bildfehlerzahlen der einfachen Magnetlinse viel kleiner als die der elektrostatischen Einzellinse sind und dieser Unterschied mit sinkender Brennweitenzahl größer wird. Diese Überlegenheit ist für das erreichbare Auflösungsvermögen von Bedeutung (vgl. Tabelle 2).

6. Folgerungen für das Auflösungsvermögen der Elektronenmikroskope.

Für die Beurteilung des Auflösungsvermögens ist die Tatsache wichtig, daß bei den Elektronenlinsen $C_{\ddot{O}}$ und C_F stets positive Größen sind, beide Fehler also als unvermeidlich gelten müssen. Nun konnte aber bis heute noch *keine feste, von Null verschiedene untere Schranke* für $C_{\ddot{O}}$ oder C_F gefunden werden, wie Glaser [10, 12] kürzlich festgestellt hat, so daß wir heute keinen gesicherten Anhaltspunkt für das Vorhandensein einer *grundsätzlichen, physikalisch bedingten* Grenze des Auflösungsvermögens oberhalb der Wellenlänge der Elektronenstrahlung besitzen.

Wohl lassen sich *technisch* bedingte Schranken angeben, deren Gültigkeit daher in der Regel als zeitlich begrenzt anzusehen ist. Nehmen wir eine obere Grenze für die erreichbare Induktion B_0 und einen bestimmten kleinsten Wert der Spannung U_0 an, bei der noch mikroskopiert werden kann, so werden beide Fehler, $C_{\ddot{O}}$ und C_F, durch Zusammenfügen der Funktionen $C/d = F(k^2)$ nach Fig. 6 mit Gleichung (3) ($k^2 \sim d^2$) nur noch von d abhängig, wobei das Verhältnis B_0^2/U_0 als Parameter auftritt. Wesentlich ist hierbei, daß die Kurven $C = F(d)$ Kleinstwerte aufweisen, wie in Fig. 14 für $C_{\ddot{O}}$ als Beispiel dargestellt ist. Setzen wir die Verwirklichung der günstigsten Werte von d als möglich voraus — und dies kann man

nach praktischen Erfahrungen tun —, so erhält man die kleinsten (mit der Glockenkurve als Feldkurve) erreichbaren Werte von $C_{\ddot{o}}$ und C_F in Abhängigkeit von B_0^2/U_0 in folgender Form:

$$C_{\ddot{o}\,min} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 35 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}}, \tag{33}$$

bei der günstigsten Halbwertsbreite der Feldkurve

$$d_{\ddot{o}\,opt} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 108 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}}; \tag{34}$$

und für den Farbfehler

$$C_{F\,min} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 59 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}} \tag{35}$$

bei

$$d_{F\,opt} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 67 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}}. \tag{36}$$

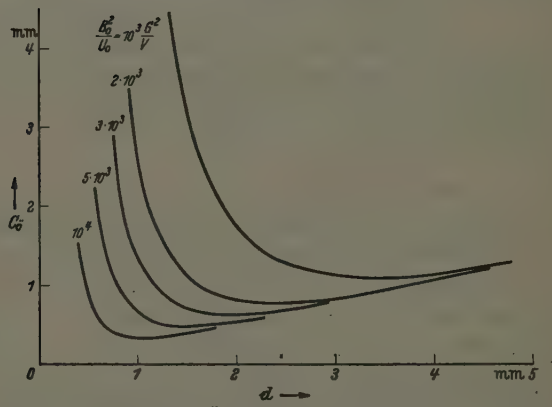


Fig. 14. Abhängigkeit der Öffnungsfehlerkonstante $C_{\ddot{o}}$ von der halben Halbwertsbreite d des Feldes $\xi = \frac{1}{1+x^2}$ für feste Werte von B_0^2/U_0 (Magnetlinse).

Für die Brennweite gelten nach Fig. 5 ähnliche Verhältnisse und man erhält

$$f_{min} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 85 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}} \tag{37}$$

bei

$$d_{f\,opt} = \frac{\sqrt{U_0}}{B_0} \cdot 60 \frac{G \cdot \text{mm}}{V^{1/2}}. \tag{38}$$

Die Kurven in Fig. 14 verlaufen in der Umgebung der Kleinstwerte ziemlich flach, so daß alle drei Größen nach (33), (35) und (37) ungefähr bei *einem* mittleren d verwirklicht werden können. Entnehmen wir aus früheren

Messungen [38] $B_0 = 10^4\,G$ und verlangen als Spannung $U_0 = 70$ kV, die für die Durchstrahlung einer sehr großen Zahl übermikroskopischer Objekte ausreicht, so wird $C_{\ddot{O}\,min} = 0{,}92$ mm, $C_{F\,min} = 1{,}57$ mm und $f_{min} = 2{,}25$ mm bei $d_{opt} = 1{,}6 \ldots 2{,}9$ mm. Diese Werte sind bei dem oben untersuchten Objektiv praktisch erreicht. Eine Erhöhung von B_0 setzt nach Gleichung (33) bis (38) alle Werte in gleichem Maße herab.

Die Auflösungsgrenze kann man mit diesen Zahlen in der Weise abschätzen, daß man die Halbmesser des Beugungs-[1]) und Öffnungsfehlerscheibchens linear [13, 18] oder quadratisch [20, 32, 14. 33d] addiert. Im letzteren Falle ergibt sich

$$\delta_{\ddot{O}\,min} \approx \lambda \cdot \sqrt[4]{\frac{C_{\ddot{O}}}{\lambda}} = 0{,}57 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}^{2}) \qquad (39)$$

bei dem günstigsten Wert des Öffnungswinkels $\alpha_g = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$. Entsprechend gilt für das Zusammenwirken von Beugung und Farbfehler

$$\delta_{F\,min} = \sqrt{\frac{\Delta U}{U_0}} \cdot 0{,}87 \cdot 10^{-4}\,\text{mm} \quad \text{bei} \quad \alpha_g = \sqrt{\frac{\Delta U}{U_0}} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}. \qquad (40)$$

Tabelle 2. Fortschritte im Auflösungsvermögen in den letzten Jahren.

Verfasser	Zur Veröffentlichung eingereicht	Durch Bildwiedergabe nachgewiesene Trennung zweier Massenteilchen im Abstand von
Magnetische Linse		
B. v. Borries u. E. Ruska [31] . .	Februar 1938	10 mμ
B. v. Borries u. E. Ruska [32b] . .	Juni 1939	7 „
O. E. Radczewski, H. O. Müller u. W. Eitel [45]	November 1939	5 „
M. v. Ardenne [24]	Januar 1940	4 „
M. v. Ardenne [25]	Mai 1940	3 „
E. Ruska [47]	August 1940	4 „
B. v. Borries u. E. Ruska [33a] . .	Oktober 1940	2,5 „
M. v. Ardenne [26]	März 1941	2,2 „
Elektrostatische Linse		
H. Mahl [41]	September 1939	15 mμ
H. Mahl [42b]	März 1940	(8 „)[3])

[1]) Bei $U_0 = 70$ kV ist die Wellenlänge $\lambda = 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ mm. — [2]) Vgl. auch v. Borries und Ruska [33d]. Auf die gleichen Zahlen für $\delta_{\ddot{O}\,min}$ kommt auch Scherzer [18] unter Benutzung der von Rebsch [13] durchgeführten Berechnung einiger Felder; deren $C_{\ddot{O}}$-Werte weichen von den hier für das Glockenfeld gültigen nicht stark ab. v. Ardenne [23] kommt trotz Annahme viel größerer $C_{\ddot{O}}$ (vgl. Abschnitt 2c) auf *nur wenig höhere* Zahlenwerte von $\delta_{\ddot{O}\,min}$, da $C_{\ddot{O}}$ unter der vierten Wurzel eingeht. Diese geringe Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von $C_{\ddot{O}}$ gilt wohlgemerkt nur unter der Voraussetzung, daß stets mit dem günstigsten Öffnungswinkel α_g gearbeitet wird. — [3]) Diese Zahlenangabe bezieht sich auf den Abstand zweier noch als getrennt erscheinender *Löcher*.

Bei etwa $\frac{\Delta U}{U_0} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ kommt $\delta_{F\,min}$ dem Betrag von $\delta_{\ddot{O}\,min}$ gleich. Berücksichtigt man Beugung, Öffnungs- und Farbfehler zusammen (in quadratischer Überlagerung), so erhält man mit den oben angegebenen Zahlen für $C_{\ddot{O}}$, C_F, $\Delta U/U_0$ und U_0

$$\delta_{min} = 0{,}75 \cdot 10^{-6}\text{ mm bei } \alpha_g = 5{,}9 \cdot 10^{-3}. \tag{41}$$

Obwohl diese Auflösungswerte heute noch nicht erreicht sind, legt doch die Entwicklung der letzten Jahre (vgl. Tabelle 2) die Vermutung nahe, daß man sich durch immer weitere Ausschaltung der übrigen Abbildungsfehler und -störungen beim magnetischen Mikroskop dem Betrag von 0,5 ... 1 mμ schrittweise nähert.

Da diese Grenze bei der Magnetlinse durch die Eigenschaften des verwendeten Eisens gezogen ist, darf man annehmen, daß sie sich durch Weiterentwicklung der Werkstoffe herabsetzen läßt. Auch bei der elektrostatischen Linse sind es letzten Endes Werkstoffeigenschaften, nämlich mechanische Oberflächenbeschaffenheit und Austrittsarbeit der Elektroden [39], die der Erhöhung der Feldstärke durch das Eintreten der kalten Emission eine Grenze setzen; diese liegt, wie Vergleiche der beim praktischen Mikroskopieren benutzten Brennweiten und Spannungen ergeben [38, 44], bisher merklich ungünstiger als bei den Magnetlinsen, wird aber vermutlich ebenfalls noch weiter hinausgeschoben werden können.

7. *Zusammenfassung.*

Zur Berechnung und Messung optischer Kenngrößen starker Elektronenlinsen werden nach kurzer Würdigung der bisher veröffentlichten theoretischen und experimentellen Untersuchungen folgende Beträge gegeben:

1. Ein Verfahren zur zahlenmäßigen Berechnung achsennaher Elektronenbahnen in vorgegebenen beliebigen elektrischen und magnetischen Linsenfeldern wird geschildert; es dient den rechnerischen Untersuchungen der Arbeit als Grundlage.

2. Es wird rechnerisch gezeigt, daß die Brennweitenzahl der Magnetlinse stark, Öffnungs- und Farbfehlerzahl nur wenig von der Feldform abhängen und diese Abhängigkeit erst bei größerer Linsenstärke hervortritt.

3. Der Verlauf der Brennweite eines magnetischen Objektivs mit der Linsenstärke wird gemessen und mit berechneten Werten verglichen.

4. Mit Hilfe von Schattenbildaufnahmen werden Öffnungs- und Farbfehlerkonstante eines Objektivs bei wenigen mm Brennweite experimentell ermittelt.

5. Die besonderen Bestrahlungsverhältnisse in der Dingebene erschweren die experimentelle Bestimmung der übrigen Bildfehlerkonstanten außerordentlich; es kann vorläufig nur festgestellt werden, daß die beobachtete geringe Verzeichnung nicht im Widerspruch zur Aussage der Theorie steht.

6. Die Bildfehler einer elektrostatischen Einzellinse und einer einfachen Magnetlinse werden bei gleichen Brennweiten miteinander verglichen, und zwar rechnerisch auf Grund angenommener Linsenfelder sowie experimentell auf Grund von Angaben anderer Verfasser und eigener Messungen.

7. Es wird eine durch Werkstoffeigenschaften bedingte untere Grenze für Brennweite, Öffnungs- und Farbfehler der Magnetlinse angegeben.

Die *wichtigsten Ergebnisse* dieser Untersuchungen sind folgende:

1. Die berechneten und gemessenen Werte der Brennweite, des Farbfehlers und des Öffnungsfehlers zeigen befriedigende Übereinstimmung miteinander, was hinsichtlich des Öffnungsfehlers starker Magnetlinsen nach den bekanntgewordenen Untersuchungen bisher nicht der Fall war.

2. In dem für den Mikroskopierbetrieb wichtigen Brennweitenbereich ist die Öffnungsfehlerzahl der elektrostatischen Einzellinse 4 . . . 10mal, die Farbfehlerzahl 4 . . . 6mal so groß wie die der einfachen Magnetlinse. Diese Verhältniszahlen steigen mit sinkender Brennweitenzahl. Für die übrigen Bildfehlerzahlen ergeben sich rechnerisch ähnliche Verhältnisse. Da die Bildfehlerzahlen *an sich* mit sinkender Brennweitenzahl *fallen*, und die Magnetlinse heute selbst bei höherer Strahlspannung kleinere Brennweitenzahlen als die elektrische Linse zu erreichen gestattet, liegen die *praktischen* Bedingungen für die Magnetlinse *noch günstiger*.

3. Dem aus den gemessenen bzw. berechneten Öffnungsfehlerwerten geschätzten Auflösungsvermögen scheint man sich im Mikroskopierbetrieb durch Ausschaltung der übrigen Abbildungsfehler schrittweise zu nähern.

8. Anhang. Zur Verzeichnung des Schattenbildes infolge der geometrischen Bildfehler.

Bildet man nach Fig. 15 eine verhältnismäßig weit entfernte (in Fig. 15 weiter oben zu denkende) Strahlenquelle in F_0 stark verkleinert ab und entwirft mittels des von F_0 ausgehenden Strahlenkegels ein Schattenbild der Dingebene (D oder D') auf die Ebene SB, so äußern sich die geometrischen Fehler der Linse in einer Verzeichnung des Schattenbildes, da die Strahlen sich nicht alle in F_0 schneiden, sondern die Schnittpunkte Q benachbarter, mit ein wenig verschiedenen Achsenabständen bei Bl ein-

treffender Strahlen eine trichterähnliche Fläche höherer Ordnung, die Kaustik, bilden (K in Fig. 15a).

Wenn nur der Öffnungsfehler in Betracht kommt, liegen die Verhältnisse sehr einfach: Für den Abstand q gilt nach dem Strahlensatz (Fig. 15b)

$$\frac{q}{f_0 - q} = \frac{\mathrm{d}\,\delta}{\mathrm{d}\,\varrho_1}, \tag{A 1}$$

wobei

$$\varrho_1 \doteq \alpha \cdot f_0. \tag{A 2}$$

Aus dem Öffnungsfehlergesetz Gleichung (14) findet man

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta}{\mathrm{d}\,\alpha} = 3\,C_{\ddot{o}}\,\alpha^2. \tag{A 3}$$

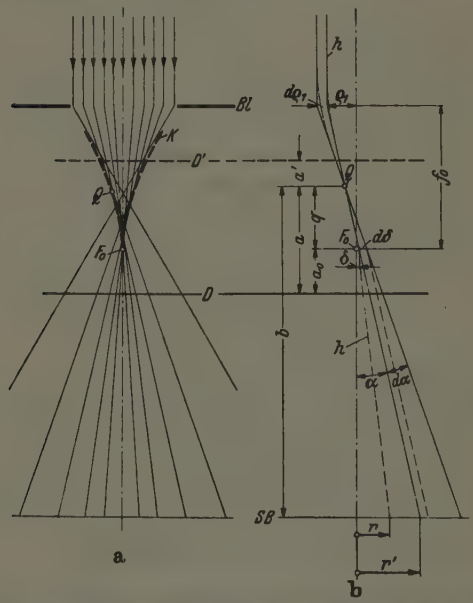


Fig. 15. Zur Ausbildung der Kaustik K bei starkem Öffnungsfehler einer Linse.

a) Überkreuzung parallel in die Blende Bl der Linse einfallender Strahlen in der Nähe des Brennpunktes F_0. Die Schnittpunkte Q benachbarter Strahlen, die mit etwas verschiedenen Achsenabständen in der gleichen Meridianebene (z. B. der Zeichnungsebene des Bildes) in der Blendenebene Bl eintreffen, liegen auf einer Umdrehungsfläche, der Kaustik K, deren Spitze der Brennpunkt F_0 der achsennahen Strahlen ist.

b) Zur Berechnung der Verzeichnung beim Schattenwurf einer in D oder D' gelegenen Dingebene in die Bildebene SB. Jede durch ϱ_1 bzw. α gekennzeichnete Zone der Dingebene hat einen anderen Quellpunkt Q der Strahlen, dessen Abstand $a = q + a_0$ von der Dingebene die Vergrößerung der zugehörigen Schattenbildzone (r) bestimmt. Bei der Dinglage in D' *wächst* die Vergrößerung, bei D *fällt* die Vergrößerung mit α bzw. r (vgl. Fig. 9). (Durch die gestrichelte Linie h ist der wirkliche, gekrümmte Bahnverlauf in der Linse angedeutet. ϱ_1 ist der scheinbare Achsenabstand des Strahles in der Blendenebene. Auch hinter F_0 kann eine Krümmung der Strahlen zur Achse hin auftreten, wenn dort das Linsenfeld noch eine merkliche Stärke besitzt.)

Da $q \ll f_0$, folgt aus Gleichung (A 1, 2 und 3)

$$q = 3\, C_{\ddot{o}}\, \alpha^2. \tag{A 4}$$

Aus Fig. 15b findet man für die Vergrößerung der zugehörigen Schattenbildzone vom Halbmesser $r' = b \cdot \alpha$

$$V' = \frac{b}{a} = \frac{b}{a_0 \pm q} \tag{A 5}$$

und für die Vergrößerung in der Schattenbildmitte

$$V_0' = \frac{b}{a_0}. \tag{A 6}$$

Liegt F_0 jedoch noch soweit *im* Bereich des Linsenfeldes, daß die Krümmung der Strahlen hinter F_0 merklich ist (vgl. die gestrichelte Bahn h in Fig. 15b), so erscheint im Schattenbild ein kleinerer Halbmesser

$$r = \sigma \cdot r' \tag{A 7}$$

und eine entsprechend geringere Vergrößerung

$$V_0 = \sigma \cdot V_0'. \tag{A 8}$$

Mit den Gleichungen (A 4) bis (A 8) und den Beziehungen in Fig. 10 und 15b gilt dann

$$\nu = \frac{d_1 - d_0}{d_1} = \frac{V - V_0}{V} = \mp \frac{3\, C_{\ddot{o}} V_0' r'^2}{b^3} = \mp \frac{3 C_{\ddot{o}}}{b^3} \cdot \frac{V_0 r^2}{\sigma^3} \tag{A 9}$$

oder

$$C_{\ddot{o}} = \frac{b^3 \sigma^3}{3 V_0} \cdot \frac{|\nu|}{r^3}. \tag{A 10}$$

Bei kissenförmiger (tonnenförmiger) Verzeichnung, wenn die Dingebene über (unter) der Brennebene F_0 in D' (D) liegt (Fig. 15), ist $\nu \gtrless 0$ (< 0). σ läßt sich angenähert *experimentell* bestimmen, indem man bei unveränderter Durchflutung der Linsenspule die Objektpatrone (P, Fig. 7) nach oben aus dem Linsenfeld herauszieht und — bei möglichst paralleler Beleuchtung — die Vergrößerung V_s des so auf dem Endbildschirm entstehenden Schattenbildes bestimmt. Bringt man das Objekt wieder soweit in das Linsenfeld hinein, daß eine wirkliche Abbildung mit der Vergrößerung V auf dem Endbildschirm erscheint, so ergibt sich bei symmetrischer Feldkurve $\sigma = V_s/V$. Genauer bestimmt man $\sigma = r/r'$ durch *Berechnung* einer parallel zur Achse von der Dingseite herkommenden Bahn h (Fig. 15b). Für den bei der $C_{\ddot{o}}$-Bestimmung S. 738 gültigen Wert $k^2 = 0{,}92$ ($D = 5600$ AW) wurde so $\sigma = 0{,}90$ gefunden. Falls bei größerem k^2 die Krümmung der Strahlen hinter F_0 zu stark, das Schattenbild also zu klein wird, kann man die Projektionslinse (PL, Fig. 7) zur Vergrößerung heranziehen.

In der Nähe der Bildmitte bestimmt man wegen der Ausdehnung von d in Gebiete steigender Vergrößerung (Fig. 10) die Werte von d, insbesondere von d_0 etwas zu groß. Für das Verhältnis von d_0 zur gedachten Strecke d_{00} bei einheitlicher Vergrößerung V_0 im ganzen Bild findet man durch eine einfache Rechnung

$$\frac{d_0}{d_{00}} = 1 + \frac{\nu}{12} \cdot \left(\frac{d_0}{r}\right)^2. \qquad \text{(A 11)}$$

In allen praktischen Fällen bleibt der hierdurch verursachte Fehler jedoch vernachlässigbar. Für Fig. 10 z. B. beträgt der Unterschied zwischen d_0 und d_{00} nur rund 2 v. H.

Im allgemeinen Fall, wenn auch die anderen Bildfehler zur Verzeichnung des Schattenbildes beitragen, weist die radiale Verzeichnung außer dem quadratischen Glied Gleichung (A 8) noch weiter Glieder auf, die in den verschiedenen Azimuten in der Schattenbildebene verschieden sind. Im Falle der Magnetlinse treffen zwei benachbarte Strahlen, die die Blendenebene mit etwas verschiedenen Achsenabständen durchstoßen, in der Bildebene (in unserem Falle F_0, Fig. 15) gegen den Gaußschen Bildpunkt nicht nur *radial*, sondern auch *tangential* verschoben ein. Die Strahlen bleiben also nicht mehr in einer Meridianebene, sondern werden windschief zueinander. Es läßt sich an Hand der Formeln für die Abweichungen vom Gaußschen Bildpunkt [9b] zeigen, daß diese Erscheinung (vgl. Fig. 9) nur von den Zerdrehungsfehlern herrührt, also eine besondere Eigenschaft der Magnetlinse ist.

9. *Schrifttumsverzeichnis.*

a) Theoretische Arbeiten: 1] H. Busch, Arch. f. Elektrotechn. **28**, 583, 1927; insbesondere S. 587. — 2] J. Dosse, ZS. f. techn. Phys. **17**, 315, 1936; insbesondere S. 316, Gleichung (7). — 3] J. Dosse, ZS. f. Phys. **117**, 316, 1941. — 4] W. Glaser, ebenda **80**, 451, 1933. — 5] W. Glaser, ebenda **81**, 647, 1933. — 6] W. Glaser, ebenda **83**, 104, 1933. — 7] W. Glaser, Ann. d. Phys. **18**, 557, 1933. — 8] W. Glaser, ZS. f. Phys. **97**, 177, 1935. — 9] W. Glaser, „Beiträge zur Elektronenoptik", herausg. v. H. Busch und E. Brüche. Barth 1937, S. 24; a] S. 32/33; b] S. 28. — 10] W. Glaser, ZS. f. Phys. **116**, 19, 1940. — 11] W. Glaser, ebenda **116**, 56, 1940; a] S. 61—63. — 12] W. Glaser, ebenda **117**, 285, 1941, vgl. hierzu 3]; a] S. 290; b] S. 308; c] S. 301, Fig. 10. — 13] R. Rebsch, Ann. d. Phys. **31**, 551, 1938. — 14] A. Recknagel, Jahrb. d. AEG.-Forsch. **7**, 1940, Sonderheft Übermikroskop, S. 15; a) S. 19—21. — 15] O. Scherzer, ZS. f. Phys. **80**, 193, 1933. — 16] O. Scherzer, ebenda **101**, 23, 1936. — 17] O. Scherzer, „Beiträge zur Elektronenoptik", herausg. von H. Busch und E. Brüche. Barth, 1937; S. 33; a) S. 41. — 18] O. Scherzer, ZS. f. Phys. **114**, 427, 1939; insbesondere S. 428. — 19] C. Störmer, Arch. d. scienc. phys. et nat., Genf 1907; Ann. d. Phys. **16**, 685, 1933.

b) Experimentelle und sonstige Arbeiten: 20] M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. **108**, 338, 1938; a] S. 341, Fig. 3. — 21] M. v. Ardenne, ebenda **112**, 744, 1939. — 22] M. v. Ardenne, ZS. f. techn. Phys. **20**, 289, 1939; a] Abb. 1; b] S. 290. — 23] M. v. Ardenne, Elektronen-Übermikroskop. Berlin, Jul. Springer, 1940; insbesondere S. 43ff. — 24] M. v. Ardenne, Naturwissensch. **28**, 113, 1940; insbesondere S. 123, Fig. 20. — 25] M. v. Ardenne, ZS. f. phys. Chem. (A) **187**, 1, 1940; insbesondere S. 4, Abb. 3. — 26] M. v. Ardenne, im Druck. — 27] H. Becker u. A. Wallraff, Arch. f. Elektrotechn. **32**, 664, 1938; **33**, 491, 1939; **34**, 43, 115, 230, 1940; a] **34**, 118, 1940, Fußnote 1. — 28] H. Boersch, ZS. f. techn. Phys. **20**, 346, 1939; a] S. 349 u. Tafel V, Abb. 4. — 29] H. Boersch, Jahrb. d. AEG.-Forsch. **7**, 1940, Sonderheft Übermikroskop S. 34; a] S. 39. — 30] B. v. Borries u. E. Ruska, DRP. 680284 v. 17. 3. 1932. — 31] B. v. Borries u. E. Ruska, Wiss. Veröff. Siemens **17**, 99, 1938; insbesondere S. 105, Bild 5. — 32] B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. techn. Phys. **20**, 225, 1939. a] S. 229; b] S. 232, Abb. 8. — 33] B. v. Borries u. E. Ruska, Erg. d. exakt. Naturwiss. **19**, 237, 1940; a] S. 271, Abb. 18; b] S. 280/281, Tabelle 1; c] S. 270; d] S. 268; e] S. 262. — 34] B. v. Borries u. E. Ruska, Siemens-ZS. **20**, 217, 1940. — 35] E. Brüche, ZS. d. VDI **85**, 221, 1941; insbesondere S. 228. — 36] K. Diels u. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **16**, 617, 1935. — 37] K. Diels u. G. Wendt, „Beiträge zur Elektronenoptik", herausg. v. H. Busch u. E. Brüche. Barth, 1937. S. 19. — 38] J. Dosse, ZS. f. Phys. **117**, 437, 1941. — 39] E. Gölz, Jahrb. d. AEG.-Forsch. **7**, 1940, Sonderheft Übermikroskop S. 57. — 40] E. Gundert, Telef.-Röhre **1941**, H. 19/20, S. 61. — 40a] W. Knecht, Ann. d. Phys. **20**, 161, 1934, insbes. S. 166. — 41] H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. **20**, 316, 1939; insbesondere Tafel IV, Abb. 3b. — 42] H. Mahl, Jahrb. d. AEG.-Forsch. **7**, 1940, Sonderheft Übermikroskop a] S. 47; b] S. 50, Bild 11. — 43] H. Marschall, Telef.-Röhre **1939**, H. 16, S. 190. — 44] H. O. Müller u. E. Ruska, Kolloid-ZS. **95**, 21, 1941. — 45] O. E. Radczewski, H. O. Müller u. W. Eitel, Zement **28**, 693, 1939; insbesondere S. 695, Bild 9. — 46] E. Ruska, ZS. f. Phys. **89**, 90, 1934; a] S. 106 u. 112; b] S. 122 ff. — 47] E. Ruska, ETZ. **61**, 889, 1940; insbesondere S. 891, Bild 1. — 48] E. Ruska u. M. Knoll, ZS. f. techn. Phys. **12**, 389, 448, 1931; a] S. 398.

Messungen an Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen*).

(Ein experimenteller Beitrag zur Schottkyschen Randschicht-Theorie.)

Von **Annemarie Schmidt.**

Mit 20 Abbildungen. (Eingegangen am 25. April 1941.)

An Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen mit verschiedenen Deckmetallen und veränderter Aufbringung der Deckelektroden werden in Abhängigkeit von der Vorspannung Wechsel- und Gleichstrommessungen ausgeführt, Richtkonstante und Kennlinienverlauf im Sperrgebiet, sowie die Temperaturabhängigkeit des Sperrschichtwiderstandes und der Kapazität ermittelt. Die Messungen ergeben, daß man für Selengleichrichter eine Randschicht im „Erschöpfungsgebiet" annehmen kann. Die Voraussetzungen der homogenen Schottkyschen Randschichttheorie sind im Gegensatz zum Kupferoxydul-Gleichrichter gut erfüllt, doch spielen Feldemissionseffekte eine erhebliche Rolle.

1. Einführung.

In der Schottkyschen Theorie[1] [2] [3]) werden die Vorgänge in Metall-Halbleitersystemen in Analogie zu den glühelektrischen Vorgängen gesetzt, und zwar so, daß der Halbleiter die Rolle des Vakuums bzw. des mit teilweise dissoziiertem Natriumdampf in gleichmäßiger oder ungleichmäßiger Verteilung erfüllten Vakuums spielt. Ebenso wie sich im Vakuum über einer Glühelektrode eine bestimmte Elektronendichte ausbildet, wird angenommen, daß auch im Halbleiter im Kontakt mit einer Metallelektrode eine bestimmte Gleichgewichts-Elektronenkonzentration herrscht. Grenzt der Halbleiter an zwei verschiedene Metallelektroden, so herrschen auf beiden Seiten verschiedene Gleichgewichtskonzentrationen, die mit der Austrittsarbeit der Elektronen aus dem angrenzenden Metall in den Halbleiter temperaturabhängig verknüpft sind. Mit diesen Gleichgewichtskonzentrationen hängt der Stromdurchgang richtungsabhängig und nichtlinear zusammen.

---

*) D 143.

[1]) W. Schottky, ZS. f. Phys. **113**, 367—414, 1939. — [2]) W. Schottky, Naturwissensch. **26**, 843, 1938. — [3]) W. Schottky u. E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken **18**, 225—291, 1939.

Aus dieser Vorstellung ergibt sich in Sperrichtung eine ständige Zunahme der Randschichtdicke und damit auch des Widerstandes der Randschicht. Damit in Flußrichtung ein stationärer Strömungszustand möglich wird, muß die Randschicht so zusammenschrumpfen, daß durch enorme Erhöhung des Konzentrationsgefälles der Diffusionsstrom die Elektronen trotz fehlender Feldwirkung durch die Randschicht bis zur Elektrode tragen kann.

Eine Verarmungsrandschicht besitzt demnach eine unipolare Leitfähigkeit, deren *Sperrichtung* durch den *Elektronenübergang* aus der *Elektrode* in den *Halbleiter* gegeben ist (die natürliche Randverarmung wird in den Halbleiter „hineingeweht", der Widerstand nimmt zu), während in Richtung des Elektronenflusses aus dem Halbleiter in die Elektrode der Randwiderstand verschwindet (die Randschicht wird durch die Leitungselektronen des Halbleiters „zugeweht"). Für Defekthalbleiter ist Fluß- und Sperrrichtung vertauscht.

Die Ergebnisse der Theorie geben vielfach die Möglichkeit ihrer unmittelbaren Nachprüfung. Für den Fall der Cu_2O-Gleichrichter hat Schottky [1]) die gleichstrommäßige Prüfung der Theorie nahezu vollständig durchgeführt. Der Cu_2O-Gleichrichter konnte so dem Typ der Gleichrichter mit „Erschöpfungsrandschicht" zugeordnet werden. (Näheres siehe w. u.) Für den Fall der Selengleichrichter hatte Schottky zunächst auf Grund der damals vorliegenden Messungen den Typ der „Reserve-Randschicht" angenommen [2]). Aus unseren neuen Messungen ergibt sich jedoch, daß man auch für den Selengleichrichter eine Sperrschicht im Erschöpfungsgebiet annehmen und die beobachteten Abweichungen vom Idealtyp eines Erschöpfungsgleichrichters auf Feldemissionseffekte an der Grenze Metall—Halbleiter zurückführen kann. [Vgl. hierzu die inzwischen erschienenen neuen Arbeiten von W. Schottky [3]) [4]).] Da die Feldemissionseffekte erheblich durch das Eigenfeld beeinflußt werden, das sich an der Grenze Metall—Halbleiter nach Maßgabe der elektronischen Randverarmung ausbildet, war zu erwarten, daß für Selengleichrichter mit solchen Metallelektroden, die nur geringe Randverarmung verursachen, die störenden Einflüsse durch Feldemissionseffekte geringer sind und daher diese Gleichrichter dem vermuteten Idealtyp am nächsten kommen.

---

[1]) W. Schottky u. E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken **18**, 225—291, 1939, insbes. S. 273. — [2]) W. Schottky u. E. Spenke, l. c., insbes. S. 280. — [3]) W. Schottky, ZS. f. techn. Phys. **21**, 322—325, 1940. — [4]) W. Schottky, Schweiz. Arch. f. angew. Wiss. u. Techn., H. 1 u. 2, 1941.

2. Sperrschichtwiderstand in Abhängigkeit von der Austrittsarbeit.

Nach der von Schottky geprägten Vorstellung bildet sich an der Grenze zwischen Störstellenhalbleiter [1] [2] und Deckmetall ein Konzentrationsgefälle aus (Raumladungsrandschicht), das abhängig ist

von dem Störstellengehalt des Halbleiters (Leitfähigkeit),
von der Austrittsarbeit der Elektronen des Deckmetalls in den Halbleiter.

Die Abhängigkeit des Gleichrichterwiderstandes beim Selengleichrichter vom Elektrodenmetall hat Schweickert festgestellt (Fig. 1a).

Für den Cu_2O-Gleichrichter war es bisher nicht möglich, diesen Zusammenhang zu finden, weil offenbar in vielen Fällen das Deckmetall (insbesondere bei Metallen der Alkali- und Erdalkaligruppe) mit dem Cu_2O reagiert und die oberste Oxydschicht zu metallischem Kupfer reduziert.

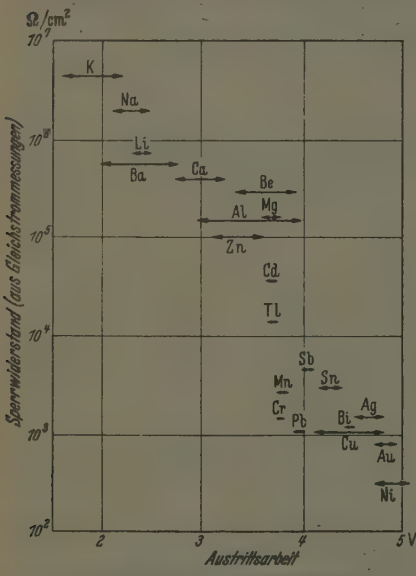


Fig. 1a. Austrittsarbeit und Sperrwiderstand von Selen-Gleichrichtern (nach Schweickert, 1939).

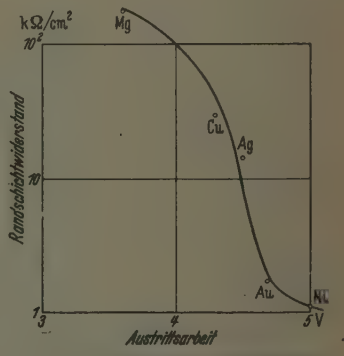


Fig. 1b. Austrittsarbeit und Randschichtwiderstand von Selen-Sperrschichtzellen.

Der gleiche Zusammenhang wie für Selengleichrichter gilt nach unseren Messungen auch für Selen-Sperrschichtzellen (Fig. 1b), die sich von den Gleichrichtern nur durch die geringere Dicke der Deckschicht unterscheiden (Tabelle 1).

[1]) B. Gudden, Erlanger Ber. **62**, 289, 1930. — [2]) B. Gudden, Ergebn. d. exakt. Naturw. **13**, 223, 1934.

An Stelle der aus Gleichstrommessungen erhaltenen maximalen Sperrwiderstände (Fig. 1a) sind hier die aus dem Scheinwiderstandsdiagramm (siehe Abschnitt 5) ermittelten Randschichtwiderstände (für die Vorspannung $V \sim 0$) eingetragen.

Tabelle 1.

Deckelektroden-Material aufgedampft	Austrittsarbeit Volt	Sperrschicht-widerstand kOhm/cm²	Sperrschicht-kapazität μF/cm²
Ni	5,0	1,4	0,098
		0,72	0,096
Au	4,6	1,73	0,122
		1,66	0,113
Ag	4,5	11,1	0,05
		17,3	0,051
Cu	4,3	32,5	0,004
		26,0	0,006
Mg	3,6	63,0	0,035
		85,0	0,037
		91,0	0,041

Theoretisch sollte nach Schottky zwischen dem Sperrschichtwiderstand bei $V = 0$ und der Austrittsarbeit ein nahezu exponentieller Zusammenhang bestehen, der in der logarithmischen Darstellung nach Fig. 1a und 1b einer steil verlaufenden Geraden entsprechen würde. Daß dieser Zusammenhang nicht gefunden wird (vgl. Fig. 1b), kann wahrscheinlich[1]) darauf zurückgeführt werden, daß bei größeren Randverarmungen (größeren Defektelektronen-Austrittsarbeiten der Deckmetalle) die Austrittsarbeiten durch das vorhandene Randfeld verkleinert, die Sperrschichtwiderstände also zu klein ermittelt werden (Schottky-Emission).

Für Selen als Defekthalbleiter [auf den Defekthalbleitungscharakter lassen neben dem Gleichrichtungssinn [2]) auch von uns durchgeführte unveröffentlichte Thermospannungsmessungen schließen] sind nicht die Austrittsarbeiten $\psi^{\ominus}$, sondern die dazu entsprechend der Gleichung

$$\psi^{\ominus} + \psi^{\oplus} = E$$

(E = Energie zur Bildung eines Elektronenpaares) komplementären Defektelektronen-Austrittsarbeiten ψ maßgebend[3])[4]).

[1]) W. Schottky, Schweiz. Arch. f. angew. Wiss. u. Techn., H. 1 u. 2, 1941. — [2]) W. Schottky, ZS. f. techn. Phys. **16**, 512, 1935. — [3]) W. Schottky, ebenda **21**, 322, 1940. — [4]) W. Schottky, demnächst erscheinende Veröffentlichung: Zum Problem der Austrittsarbeit an der Grenze Metall–Störstellenhalbleiter.

In Tabelle 2 sind für Selen-Sperrschichtzellen mit verschiedenen Deckmetallen bei zum Teil verschiedener Aufbringung die Sperrschicht-Nullkapazitäten und Nullwiderstände eingetragen.

Tabelle 2.

Art der Herstellung	Sperrschicht-widerstand kOhm/cm²	Sperrschicht-kapazität µF/cm²
Au aufgedampft	1,7	0,12
Au auf Zaponlack	21,0	0,03
Blattgold erwärmt	9,7	0,052
Blattgold aufgelegt	15,3	0,035
Elektrocell-Zelle	33,5	0,051
SAF-Zelle	73,0	0,061
6 B-Bleistift	94,0	0,014
Kopierstift	39,0	0,067

Die Herstellung der Zellen ist im einzelnen aus einer früheren Veröffentlichung [1]) ersichtlich.

Viele Eigentümlichkeiten dieser Tabelle werden erklärt, wenn man mit Schottky annimmt, daß Selen ein Störstellenhalbleiter, reines Selen demnach ein Isolator ist. Der hohe Randwiderstand beim Aufstäuben von Gold (handelsübliche Photozellen in Tabelle 2) im Gegensatz zu aufgedampften Goldelektroden (Tabelle 1 und 2) kann dann durch das intensive örtlich-oberflächliche Erhitzen des Selens erklärt werden, wobei Veränderungen in der Randschicht hervorgerufen werden.

Gestützt wird diese Auffassung durch Beobachtungen an Gleichrichtern mit aufgedampften Wismutelektroden, bei denen das Deckmetall auf gekühlter (Temperatur etwa — 50° C) und nicht gekühlter Gleichrichterunterlage aufgebracht wurde (Tabelle 3).

Tabelle 3.

	Sperrschicht-widerstand kOhm/cm²	Sperrschicht-kapazität µF/cm²
Unterlage gekühlt	0,78	0,053
	0.61	0,05
Unterlage nicht gekühlt	2,0	0,047
	1,95	0,047
	1,95	0,1

[1]) E. Fenner, B. Gudden, H. Schweickert, Sitzungsber. d. Phys.-med. Soc. Erlangen **71**, 131, 1939.

Der Vergleich der rechten und linken Spalte zeigt, daß durch Kühlung während des Aufdampfens der Sperrschichtwiderstand verkleinert, die Nullkapazität nicht verändert wird. Ferner zeigt ein Vergleich mit Fig. 1a und 1b, daß sich die Sperrschichtwiderstände des Wismutgleichrichters bei ungekühlter Aufbringung der Wismut-Elektroden in den experimentell

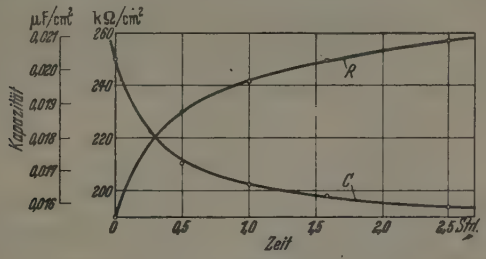


Fig. 2. Zeitlicher Verlauf von Randschicht-Widerstand und -Kapazität für eine Magnesium/Selen-Sperrschichtzelle.

gefundenen Zusammenhang von Randschichtwiderstand und Austrittsarbeit einordnen, daß dagegen bei Aufbringung der Elektroden auf gekühlter Unterlage kleinere Randschichtwiderstände gemessen werden, die sich besser dem theoretisch erwarteten Zusammenhang (s. S. 757) fügen.

Im gleichen Sinne kann vielleicht eine an einer Magnesium-Selen-Sperrschichtphotozelle gemachte Beobachtung gedeutet werden. Wie in Fig. 2 dargestellt ist, nimmt der Sperrschichtwiderstand innerhalb von 3 Stunden um etwa den Faktor 2 zu. Da die Sperrschichtkapazität entsprechend abnimmt, vermuten wir, daß die Randschicht zeitlich in den Halbleiter hineinwächst, was durch ein teilweises Aufzehren der in der Randschicht vorhandenen Störstellen durch die chemisch-aktive Magnesiumoberfläche erklärbar wäre.

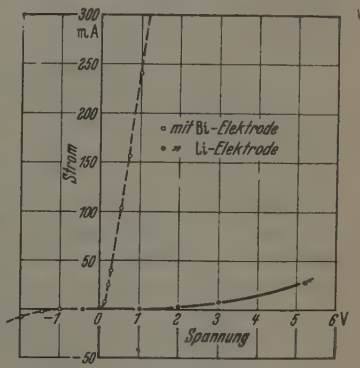


Fig. 3. Kennlinien für Wismut/Selen- und Lithium/Selen-Gleichrichter.

Bei Zellen, die durch Auflegen von Blattgold oder von mit Gold bedampften Zaponlackhäutchen auf Selenunterlagen hergestellt sind, wird durch eine Wärmebehandlung bei 100 bis 180° C der Sperrschichtwiderstand unter Umständen erheblich verkleinert. Ungeklärt bleibt, ob die Ver-

kleinerung des Randschichtwiderstandes nach einer Wärmebehandlung auf eine innigere Kontaktauflage der Goldfolie oder auf eine Veränderung in der Randschicht zurückzuführen ist [1]).

Wie sehr die Gleichrichtereigenschaften bei gleichem Halbleiter (Selen) durch stark verschiedene Austrittsarbeiten der Deckmetalle verändert werden können, zeigt Fig. 3, in der die Kennlinien für einen Wismut/Selen-Gleichrichter (Elektronenaustrittsarbeit von Wismut etwa 4,4 Volt) und einen Lithium/Selen-Gleichrichter (Elektronenaustrittsarbeit von Lithium etwa 2,4 Volt) aufgetragen sind. Daraus ergeben sich für die technische Anwendung der Gleichrichter wertvolle Hinweise.

3. Bestimmung der Richtkonstanten.

Die Richtkonstante α_1 ist definiert als Konstante in der für kleine Wechselspannungen (Umgebung des stromlosen Zustandes) stets gültigen Gleichrichterbeziehung:

$$\frac{i_=}{i_\sim} = \frac{1}{2}\alpha_1 U_\sim. \tag{1}$$

Nach Schottky ist diese Richtkonstante gleich der reziproken Abklingspannung $\mathfrak{U}$. Die reduzierte Abklingspannung $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ (wobei $\mathfrak{V} = kT/e$) ist eine Funktion von p_3 und p_R, wobei

p_R = relative Randverarmung der Elektronen,

p_3 = Verhältnis der ionisierten zu den neutralen Störstellen im Halbleiterinnern.

Sie ist für $p_3 = 10^{-6}$ als Funktion von p_R in Fig. 4 wiedergegeben. [Bezüglich der Bezeichnungen siehe W. Schottky und E. Spenke [2]).]

Wir haben die Richtkonstante an Selengleichrichtern verschiedener Herstellung durch sorgfältige Gleichstrommessungen im Gebiet zwischen $\pm$ 20 mV ermittelt [3]). (Tabelle 4.)

---

[1]) Vgl. E. Fenner, B. Gudden, H. Schweickert, Sitzungsber. d. Phys.-med. Soc. Erlangen **71**, 131—152, 1939. — [2]) W. Schottky u. E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken **18**, 225—291, 1939, insbes. S. 234 usw. — [3]) Die Gleichrichter-Kennlinie bei angelegter sinusförmiger Wechselspannung ist gegeben durch:

$$i = f(U) = \frac{1}{2}k_2 U_0^2 + k_1 U_0 \sin wt - \frac{1}{2}k_2 U_0^2 \cos 2wt \pm \cdots$$

Unter Berücksichtigung von (1) folgt:

$$\frac{i_=}{i_\sim} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{k_2}{k_1}U_0; \quad \text{oder:} \quad \alpha_1 = 2\frac{k_2}{k_1},$$

wobei k_1 und k_2 aus der experimentell ermittelten Kennlinie durch folgendes Gleichungssystem bestimmt sind:

$$i_+ = k_1 U_+ + k_2 U_+^2,$$
$$i_- = k_1 U_- + k_2 U_-^2.$$

Tabelle 4.

Herstellung	α_1 in V^{-1}	$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{V}}$
Handelsüblicher Selengleichrichter	12,2	3,19
Selengleichrichter mit aufgespritzter Woodmetallelektr.	16,5	2,36
Selengleichrichter mit aufgedampfter (Bi-Sn)-Legierung	17,9	2,18
Selengleichrichter mit aufgedampfter Bi-Elektrode	23,2	1,68

Die Richtkonstante des Wismutgleichrichters unterscheidet sich kaum von der des von Schottky[1]) untersuchten Cu_2O-Gleichrichters, für den

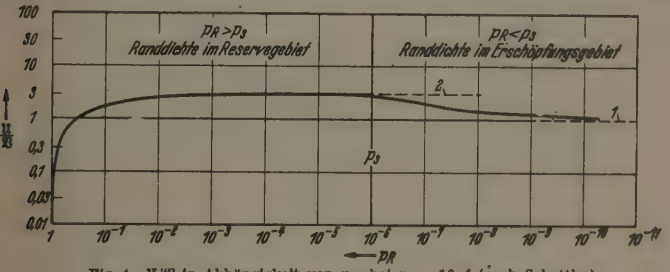


Fig. 4. $\mathfrak{U}/\mathfrak{V}$ in Abhängigkeit von p_R bei $p_s = 10^{-6}$ (nach Schottky).

eine Richtkonstante von 26,8 V^{-1} und eine reduzierte Abklingspannung von 1,47 ermittelt wurde.

Nach Schottky[2]) ist ein Wert $\mathfrak{U}/\mathfrak{V} = 1$ das Kennzeichen eines idealen Randschicht-Gleichrichters mit Erschöpfungsrandschicht, während zum Typ der Reserverandschicht der Wert $\mathfrak{U}/\mathfrak{V} = 3$ gehören würde. Wir nehmen daher an, daß der Wismut/Selen-Gleichrichter, ebenso wie der Cu_2O-Gleichrichter eher dem Typ der Erschöpfungsrandschicht als der Reserverandschicht entspricht. Man sieht indessen auch, daß selbst bei aufgedampfter Wismutelektrode, also trotz der geringen Defektelektronenaustrittsarbeit des Deckmetalls, der dem (feldfreien) Idealfall entsprechende Wert der reduzierten Abklingspannung nicht erreicht wird, so daß ein quantitativer Vergleich mit den Ergebnissen der Theorie nicht möglich ist.

Die Richtkonstante des Spritzmetallgleichrichters und auch der später zu diskutierende Verlauf der Kennlinien im Sperrgebiet [sowie die entsprechenden Werte des von Schottky[3]) untersuchten Selengleichrichters]

[1]) W. Schottky u. E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken 18, 225—291, 1939, insbes. S. 273. — [2]) l. c. S. 271. — [3]) W. Schottky u. E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken 18, 225—291, 1939, insbes. S. 280 usw.

würden eine Randschicht im Reservegebiet vortäuschen, wenn nicht die bereits in Abschnitt 2 gemachten Aussagen den Wismut/Selen-Gleichrichter als den in bezug auf Feldemission idealeren Typ eines Selengleichrichters erscheinen ließen. (Vgl. die folgenden Abschnitte.)

4. Kennlinienverlauf im Sperrgebiet.

Der theoretische Kennlinienverlauf im Sperrgebiet, wie er nach der homogenen Randschichttheorie zu erwarten ist, ist für die beiden Fälle

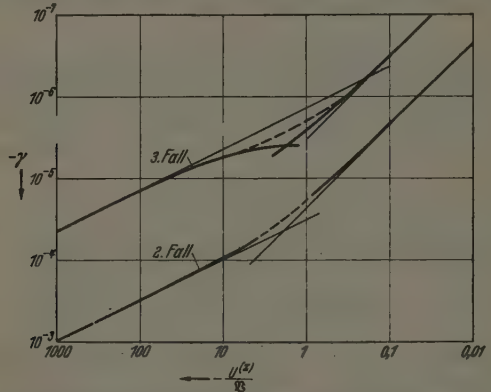


Fig. 5. Theoretische Kennlinien im Sperrgebiet, doppellogarithmisch ($f = 1$). 2. Fall: $p_R = 10^{-3}$; $p_s \ll 10^{-6}$. 3. Fall: $p_R = 10^{-3}$; $p_s = 10^{-4} \gg p_R$ (nach Schottky).

der Donatorenerschöpfung und Donatorenreserve in Fig. 5 dargestellt. [Wegen der Bezeichnungen vgl. Schottky[1]).]

Die für Selengleichrichter mit verschiedenen Deckmetallen ermittelten Richtkonstanten (vgl. Abschnitt 3) lassen für den Wismut/Selen-Gleichrichter einen Kennlinienverlauf erwarten, wie er für das Auftreten einer Randerschöpfung (3. Fall in Fig. 5) kennzeichnend ist. Diese Erwartung wird durch Kennlinienmessungen im Sperrgebiet bestätigt (Fig. 6). Demgegenüber zeigen die Gleichrichter mit Spritzmetall sowie mit Deckmetallen kleinerer Elektronen-Austrittsarbeiten [größerer Defektelektronen-Austrittsarbeiten[2])] Richtkonstanten und Kennlinien im Sperrgebiet (Fig. 7), die auf eine Sperrschicht im Reservegebiet (2. Fall in Fig. 5) schließen ließen. Es wurde aber bereits in Abschnitt 2 und 3 darauf hingewiesen, daß Selengleichrichter mit Wismutelektrode infolge der geringeren Randverarmung

[1]) l. c. S. 269. — [2]) Vgl. S. 757, Zeile 3 von unten.

und damit eines kleineren störenden Randfeldes den Idealfall des Randschichtgleichrichters besser verwirklichen werden, als Selengleichrichter mit Deckmetallen kleinerer Elektronen-Austrittsarbeit, bei denen der Kennlinienverlauf durch Schottky-Emission gestört wird.

In der Tat fanden wir, wie die Fig. 8 zeigt, den nach der Theorie für den „Erschöpfungsfall" (3. Fall in Fig. 5) berechneten Kennlinienverlauf nur für Deckmetalle kleiner Defektelektronen-Austrittsarbeiten. (Wismut; vgl. dazu auch Fig. 9, die den Kennlinienverlauf eines Selengleichrichters

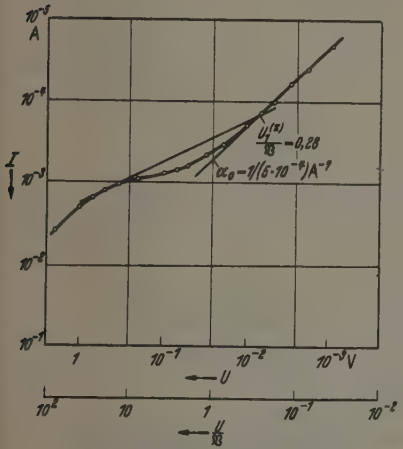


Fig. 6. Kennlinie eines Wismut/Selen-Gleichrichters im Sperrgebiet.

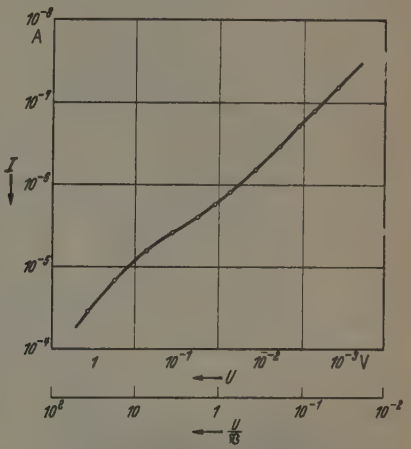


Fig. 7. Kennlinie eines handelsüblichen Selen-Gleichrichters mit Spritzmetall-Elektrode im Sperrgebiet.

mit aufgedampfter Gold- und Wismutelektrode wiedergibt.) Bei Metallen mit größerer Defektelektronen-Austrittsarbeit (Lithium, Magnesium), und zwar um so ausgesprochener, je größer die Austrittsarbeit, biegt die logarithmische Kennlinie schon bei kleineren Sperrspannungen infolge des größeren Randfeldes und der dadurch hervorgerufenen Feldemissionseffekte, vielleicht auch wegen Erniedrigung der Austrittsarbeit an solchen Stellen, wo ionisierte Störstellen vorhanden sind, ab, der Kennlinienverlauf wird immer steiler. Wie Schottky[1]) gezeigt hat, kann dieser Gang der Kennlinienform mit der Austrittsarbeit nicht durch einen Übergang vom Erschöpfungs- zum Reservefall erklärt werden.

[1]) W. Schottky, Schweizer Arch. f. angew. Wiss. u. Technik, H. 1 u. 2, 1941.

5. Sperrschichtwiderstand und Kapazität in Abhängigkeit von der Vorspannung.

Eine weitere Stütze für die obigen in den Abschnitten 2 bis 4 gemachten Überlegungen ergibt sich aus Wechselstrommessungen des Sperrschichtwiderstandes und der Sperrschichtkapazität in Abhängigkeit von der Vorspannung.

Nach den bereits in Abschnitt 1 erwähnten Vorstellungen der Theorie[1]) muß sich beim Durchgang von Elektronen aus der Elektrode in den Halb-

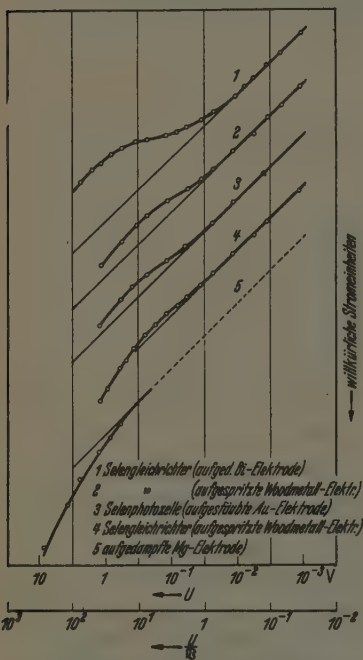


Fig. 8. Kennlinien von Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen mit verschiedenen Deck-Elektroden im Sperrgebiet.

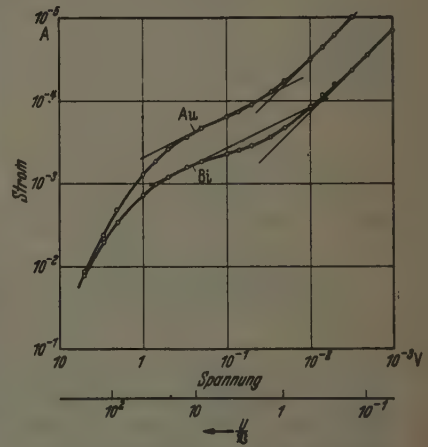


Fig. 9. Kennlinien im Sperrgebiet von Selen-Gleichrichtern mit aufgedampfter Gold- und Wismut-Elektrode.

leiter die Raumladungszone verbreitern, beim Fließen eines Stromes in umgekehrter Richtung derart zusammenschrumpfen, daß durch die enorme Erhöhung des Konzentrationsgefälles der Diffusionsstrom die Elektronen durch die Randschicht zur Elektrode tragen kann. Man wird also in Flußrichtung einen Anstieg der Kapazität erwarten müssen, in Sperrichtung

[1]) W. Schottky, ZS. f. Phys. **113**, 367—414, 1939.

einen Abfall. Dementsprechend wird der Widerstand der Randschicht in Sperrichtung seinen größten Wert haben, mit abnehmender Sperrspannung immer kleiner werden und mit wachsender Flußspannung praktisch verschwinden.

Die Kurven in Fig. 10 zeigen für Selen-Sperrschichtzellen mit aufgestäubten Goldelektroden zwischen 0,1 und 0,5 Volt Sperrspannung

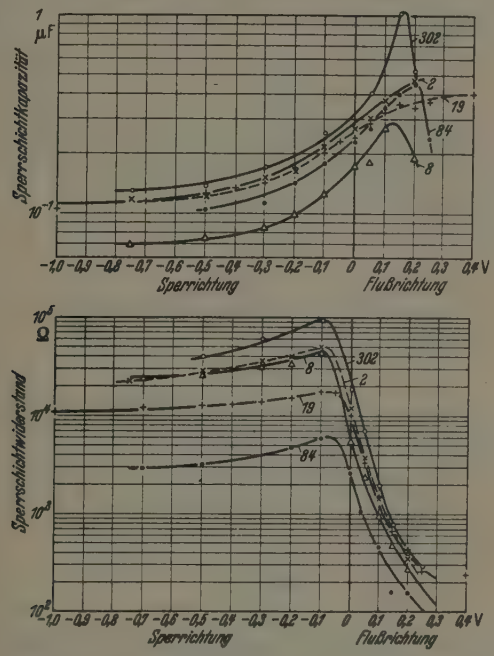


Fig. 10. Sperrschicht-Widerstand und -Kapazität in Abhängigkeit von der Vorspannung für handelsübliche Selen-Sperrschichtzellen. (84: Elektrocell-Berlin, die übrigen: SAF.-Nürnberg).

einen starken Abfall der Kapazität, während im gleichen Gebiet die differentiellen Widerstände trotz der durch den Kapazitätsabfall nachgewiesenen Verbreiterung der Randschicht bereits absinken. Der starke Abfall der Kapazität spricht indessen gegen eine Begrenzung der wirksamen Randschichtdicke durch Störstelleninhomogenitäten (vgl. S. 767, Zeile 9), so daß auch nach diesen Messungen eine Störung des Idealverlaufes durch Schottky-Emission sehr wahrscheinlich ist.

In Flußrichtung müßte nach der Theorie entsprechend der Zusammenziehung der Sperrschicht bis auf Null ein stetiger Anstieg der Kapazität erwartet werden. Wir vermuten, daß der bei Flußspannungen über 0,1 Volt beobachtete Abfall der Sperrschichtkapazität meßtechnisch bedingt ist und mit dem im Verhältnis zum Sperrschichtwiderstand bereits großen Bahnwiderstand zusammenhängt (vgl. w. u.).

Fig. 11 bringt die bereits auf der Berliner Physikertagung 1940 von Schottky [1]) gezeigte Zusammenfassung der Messungen von Fig. 10 (geometrische Mittelwerte der Verhältnisse $\widetilde{R}/R_0$ und $1/C : 1/C_0$ im Gebiet

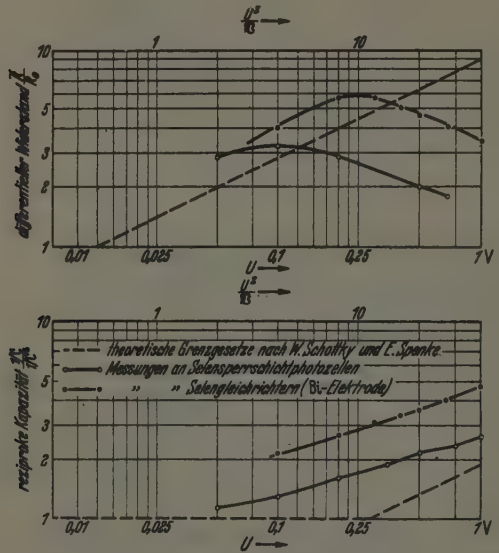


Fig. 11. Relativer Gang der differentiellen Widerstände und reziproken Kapazitäten im Sperrgebiet für Randschicht-Gleichrichter.

zwischen 0,05 und 1 Volt Sperrspannung) im Vergleich mit den durch die gestrichelten Geraden angedeuteten theoretischen Grenzgesetzen für Randschichten im Erschöpfungsgebiet [2]). Ferner sind in Fig. 11 neuerdings durchgeführte Widerstands- und Kapazitätsmessungen an Wismut/Selen-Gleichrichtern in gleicher Weise eingetragen. Das Abbiegen des differentiellen Widerstandsverhältnisses $\widetilde{R}/R_0$ von der theoretischen Grenzgeraden mit

[1]) W. Schottky, ZS. f. techn. Phys. **21**, 322—325, 1940. — [2]) E. Spenke, Wiss. Ver. a. d. Siemens-Werken **20**, H. 1, 1941 (erscheint demnächst).

zunehmender Sperrspannung kann durch zunehmende Feldemission infolge des mit der Sperrspannung wachsenden Randfeldes erklärt werden. Die Annäherung an diese Grenzgerade wird besser für Wismut-Selen-Gleichrichter mit geringerer Randverarmung (kleineres Randfeld). Der Widerstandsabfall ist hier bei kleinen Sperrspannungen, wie auch Fig. 12 zeigt, wesentlich flacher. Aus Fig. 12 sind auch die Absolutwerte der auf die Flächeneinheit bezogenen differentiellen Widerstände und Kapazitäten für die beiden Arten der in Fig. 11 dargestellten Zellen zu ersehen.

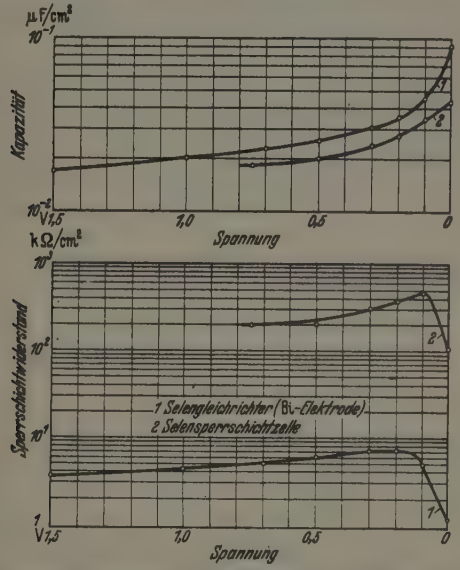


Fig. 12. Sperrschicht-Kapazität und Widerstand im Sperrgebiet in Abhängigkeit von der Vorspannung für Wismut/Selen-Gleichrichter und Selen-Sperrschichtzelle mit aufgestäubter Gold-Elektrode.

Wie durch die Neigung der Grenzgeraden in Fig. 11 angedeutet ist, soll die reziproke Kapazität bei hohen Sperrspannungen proportional $\sqrt{U}$ (U = Vorspannung) anwachsen. Diese Voraussage der Theorie würde für inhomogene Randschichten nicht gelten; insbesondere würden bei einer (z. B. durch Störstellenbeseitigung entstandenen) chemischen Sperrschicht von unveränderlicher Dicke die Kapazitätswerte von der Vorspannung unabhängig sein müssen. Die Kapazitätsmessungen in Abhängigkeit von der Vorspannung scheinen also darauf hinzudeuten, daß die Sperrschicht „physikalisch" im Sinne der homogenen Randschichttheorie zu deuten ist,

also weit weniger materieller Natur ist, als bisher allgemein angenommen wurde.

In der Annahme, daß Aufstäuben wesentlich stärkere chemische Veränderungen bringt als Aufdampfen, wurden weitere Vergleichsmessungen mit aufgestäubten und aufgedampften Goldelektroden durchgeführt (Fig. 13).

Fig. 13. Sperrschicht-Kapazität in Abhängigkeit von der Vorspannung für Selen-Gleichrichter mit aufgestäubter und aufgedampfter Gold-Elektrode im Sperrgebiet.

Fig. 14. Sperrschicht-Kapazität in Abhängigkeit von der Vorspannung für Magnesium/Selen-Gleichrichter im Sperrgebiet.

Die Messungen zeigen, daß in beiden Fällen bei größeren Sperrspannungen Übereinstimmung mit der theoretischen Forderung besteht. Bei aufgestäubten Goldelektroden konnte nur bis 1 Volt gemessen werden. Man sieht indessen, daß eine starke Kapazitätsabhängigkeit sowohl für aufgedampfte als auch für aufgestäubte Goldelektroden vorhanden ist, obwohl sich die Sperrschichtwiderstände um mehr als zwei Zehnerpotenzen unterscheiden.

Es handelt sich also in beiden Fällen um eine physikalische Sperrschicht mit annähernd homogener Störstellendichte; diese Dichte ist bei der aufgestäubten Goldelektrode geringer anzunehmen als bei der aufgedampften. Wegen des gemessenen Verlaufes der Kapazitätswerte bei kleinen Sperrspannungen vergleiche eine demnächst erscheinende Veröffentlichung von W. Schottky.

Für Gleichrichter mit aufgedampfter Magnesium-Deckelektrode ist der Kapazitätsverlauf in Abhängigkeit von der Vorspannung in Fig. 14

dargestellt. Man erkennt, daß die Absolutwerte der Kapazitäten geringer sind als bei Wismut- und Goldelektroden, sowie, daß der ganze Verlauf etwas flacher ist. Beides wäre nach freundlicher brieflicher Mitteilung von Prof. Schottky durch die höhere Austrittsarbeit Magnesium/Selen für Defektelektronen qualitativ zu erklären, ohne daß eine inhomogene Störstellenverteilung oder gar das Auftreten einer heterogenen Magnesiumselenidschicht herangezogen zu werden braucht.

Die Sperrschichtwiderstände und Kapazitäten in Abhängigkeit von der Vorspannung wurden in einer Scheinwiderstandsbrücke nach Fig. 15 gemessen. Als Wechselstromgenerator diente ein Schwebungssummer mit Verstärker und einem Frequenzbereich von 50 bis 10000 Hertz, als Null-Instrument ein Siemens-Niederfrequenzband-Verstärker [Richtspannungszeiger] [1]) [2]) [3]) [4]). Die Spannungsamplitude betrug etwa 20 mV.

Randschichtwiderstand und Kapazität wurden aus den gemessenen Werten für R_n und C_n durch Auftragen der beiden Widerstandskomponenten in der komplexen Ebene ebenso wie bei Schottky und Deutschmann [1]) ermittelt. Den Messungen zugrunde gelegt wurde das in Fig. 16 dargestellte Gleichrichter-Ersatzschaltbild. Der Randschicht mit ihrem Widerstand R_2 und ihrer Kapazität C ist der Bahnwiderstand R_1 des Halbleiters vorgeschaltet. Nicht berücksichtigt wurde die zweite Sperrschicht zwischen Grundplatte und Halbleiter, die nach unseren Messungen (Fig. 17) vorhanden ist und besonders in der Flußrichtung störend in Erscheinung treten könnte, sowie die Kapazität zwischen Grundplatte und Deckelektrode, die erst bei höheren Frequenzen wirksam zu werden beginnt.

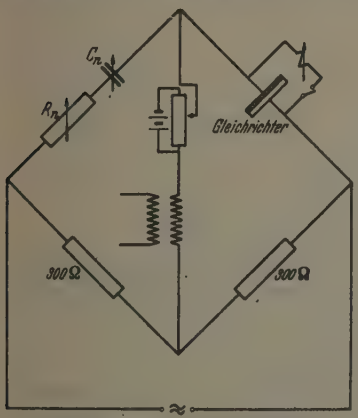


Fig. 15. Scheinwiderstands-Meßbrücke. R_n: 0,1 ... 10^8, C_n: 1 ... 10^7 μF.

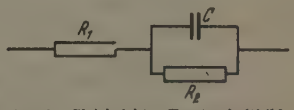


Fig. 16. Gleichrichter-Ersatzschaltbild.

Der Bahnwiderstand wird aus den mit guter Näherung auf einem Halbkreis der komplexen Ebene liegenden Meßpunkten aus dem Schnitt des Halbkreises mit der reellen Achse als Grenzwert für $\omega \to \infty$ erhalten. Bei dieser Auswertung der gewonnenen Meßpunkte ist die Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes nicht berücksichtigt. Dieser wirkt in dem Sinne, daß die Kapazitätswerte nach

[1]) W. Schottky u. W. Deutschmann, Phys. ZS. **30**, 839—845, 1929. — [2]) W. Meyer u. A. Schmidt, ZS. f. techn. Phys. **14**, 11—18, 1933. — [3]) L. A. Wood, Rev. of Scient. Instr. **4**, 434, 1933. — [4]) H. Schweickert, ZS. f. Phys. **109**, 413—430, 1938.

hohen Frequenzen etwas absinken, weil dann auch noch besser leitende Gebiete der Randschicht als Kapazität und nicht mehr als reiner Vorschaltwiderstand wirken.

Die Bestimmung hoher Sperrschichtwiderstände stößt auf Schwierigkeiten. Der Frequenzbereich reicht dann nicht aus, um den Kapazitätshalbkreis

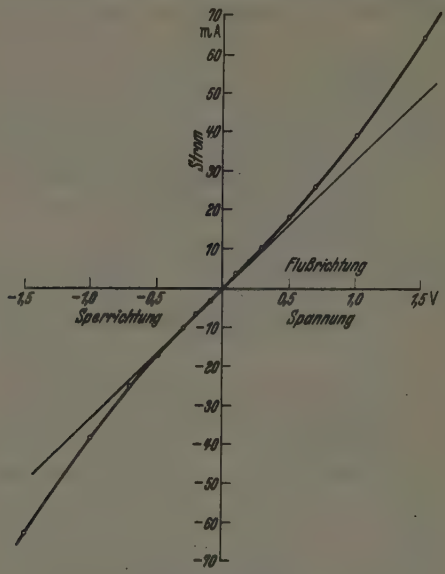


Fig. 17. Kennlinie: Nickel—Selen—Nickel.

in üblicher Weise zu konstruieren. Wir haben daher bei Messungen an Gleichrichtern mit Sperrwiderständen von 10^5 bis 10^6 Ohm/cm² den Sperrwiderstand als praktisch unendlich groß angenommen und dann, wie zu erwarten war, frequenzunabhängige Kapazitätswerte gemessen.

6. *Temperaturabhängigkeit der Sperrschichtkapazität und des Sperrschichtwiderstandes.*

Für Erschöpfungsrandschichten von Halbleitern mit kleiner Ablöseарbeit der Störstellen ist nach Schottky (unveröffentlicht) die wirksame Kapazitätsdicke[1]) l_C^0 ziemlich gleich der Dicke einer Schicht mit der konstanten Raumladungsdichte $e \cdot n_D$ (n_D = Störstellendichte im Halbleiter) und einem Spannungsabfall gleich der von der Austrittsarbeit und von der Neutraldichte n_H der Leitungselektronen abhängigen Diffusions-

[1]) Definiert durch: $C^0 = \frac{\varepsilon F}{4\pi l_C^0}$ (ε Dielektrizitätskonstante. F Gleichrichterfläche).

spannung V_d. Von Schottky [1]) wird die Austrittsarbeit beim Wismut/Selen-Gleichrichter zu etwa 0,65 Volt, das von n_H abhängige Glied, das im wesentlichen der absoluten Temperatur proportional ist, zu — 0,3 Volt bei Zimmertemperatur geschätzt. V_d würde also zwischen $T = 300^0$ K und $T = 0^0$ K von 0,35 Volt auf 0,65 Volt ansteigen, was für l_C^0, das ungefähr $\sqrt{V_d}$ ist, eine Vergrößerung um etwa 35% bedeuten würde. Bei Metallen, die eine

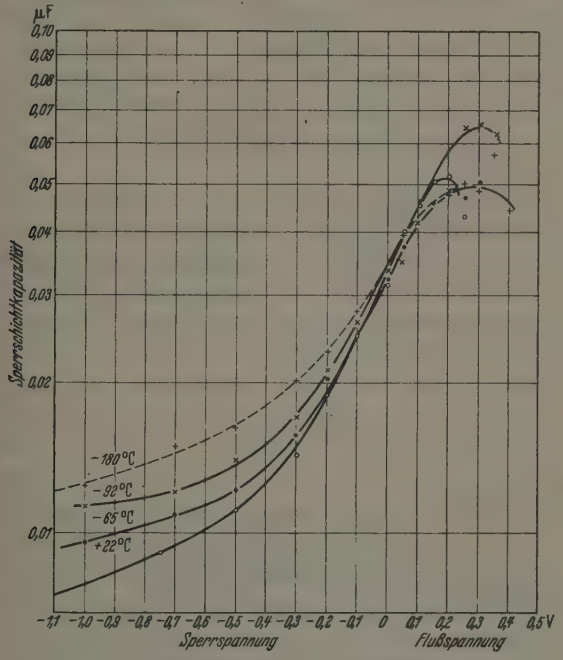


Fig. 18. Temperaturabhängigkeit der Sperrschichtkapazität für eine Selen-Sperrschichtzelle mit aufgestäubter Goldelektrode.

größere Randverarmung als Wismut verursachen, also eine größere Austrittsarbeit für die Defektelektronen besitzen, sind die relativen Temperaturänderungen von C^0 bzw. l_C^0 noch kleiner anzunehmen.

Tatsächlich beobachtet man nun, wie Fig. 18 für eine Selensperrschichtzelle mit aufgestäubter Goldelektrode und Fig. 19 für einen Wismut/Selen-Gleichrichter zeigt, nur einen verschwindenden Temperaturgang der Sperrschichtkapazität.

[1]) W. Schottky, Zum Problem der Austrittsarbeit an der Grenze Metall -Störstellenhalbleiter (in Vorbereitung).

Für den Randschichtwiderstand muß nach der Theorie für eine große Randverarmung auch ein großer Temperaturgang erwartet werden, als Folge der Austrittsarbeit Metall—Halbleiter, und zwar ein starker Abfall des Randwiderstandes mit steigender Temperatur. Für $V = 0$ müßte man nach Schottky[1]) für R_0 einen Temperaturgang mit

$$\frac{1}{b \cdot \sqrt{T}} \cdot e^{\frac{\psi^{\oplus}}{kT}}$$

erwarten und für das Sperrgebiet einen Gang mit

$$\frac{1}{b \cdot T^{3/2}} \cdot e^{\frac{\psi^{\oplus}}{k \cdot T}},$$

wobei b die Beweglichkeit der Defektelektronen bedeutet und $\psi^{\oplus}$ ihre Austrittsarbeit aus dem Metall in den Halbleiter. Der sich hieraus ergebende starke Anstieg des Widerstandes R_0 mit abnehmender Temperatur um einige Zehnerpotenzen konnte in dem von uns untersuchten Temperaturgebiet nicht beobachtet werden (Fig. 20); wohl aber

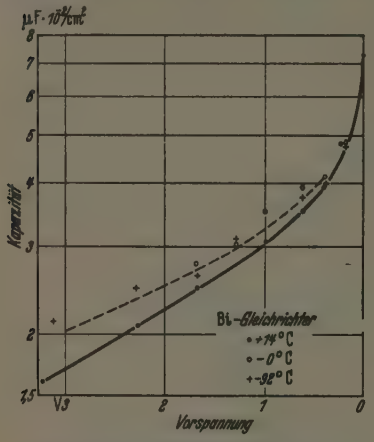


Fig. 19. Temperaturabhängigkeit der Sperrschichtkapazität im Sperrgebiet, für einen Wismut/Selen-Gleichrichter.

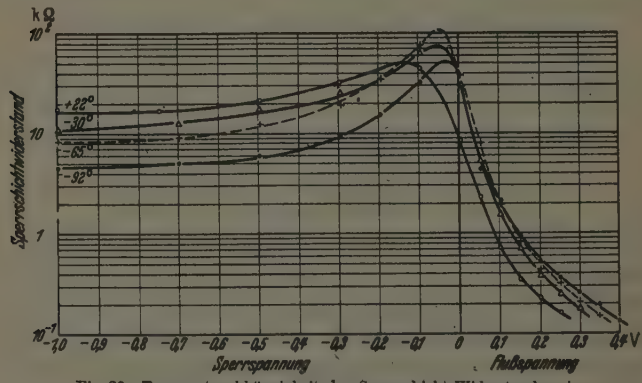


Fig. 20. Temperaturabhängigkeit des Sperrschicht-Widerstandes einer Selen-Sperrschichtzelle mit aufgestäubter Goldelektrode.

[1]) W. Schottky, nach freundlicher brieflicher Mitteilung vom 11. September 1940.

scheinen nach neueren russischen[1]) Untersuchungen die R_0-Werte bei höheren Temperaturen, wo die Feldemissionseffekte zurücktreten, den erwarteten Temperaturgang aufzuweisen.

7. Zusammenfassung.

Unsere Untersuchungen an Selengleichrichtern und Sperrschichtzellen zeigen, daß man für Selengleichrichter genau so wie für den Cu_2O-Gleichrichter eine Sperrschicht im „Erschöpfungsgebiet" annehmen und die beobachteten Abweichungen vom Idealtyp eines Erschöpfungsgleichrichters auf Feldemissionseffekte an der Grenze Metall—Halbleiter zurückführen kann. Dem theoretischen Idealtyp am nächsten kommen Gleichrichter mit Deckmetallen kleiner Defektelektronen-Austrittsarbeit, wie Wismut und Gold.

Im Gegensatz zum Cu_2O-Gleichrichter sind für den Fall des Selengleichrichters die Voraussetzungen der homogenen Schottkyschen Randschichttheorie verhältnismäßig gut erfüllt. Der Gleichrichtungsmechanismus ist daher nicht an die Existenz einer inhomogenen Störstellenverteilung („chemische Sperrschicht") oder gar an das Auftreten heterogener Selenidschichten gebunden, sondern bereits eine vom angrenzenden Metall dem Halbleiter aufgedrückte rein elektronische Randverarmung („physikalische Sperrschicht") ruft beim Stromdurchgang eine unipolare Leitfähigkeit hervor.

Herrn Prof. Dr. B. Gudden bin ich für Anregung zu dieser Arbeit und ihm sowie Herrn Dr. F. Eckart für tatkräftige Förderung dankbar. Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Prof. Dr. W. Schottky für zahlreiche wertvolle briefliche Diskussionen und Anregungen, sowie für die Mitteilung der Ergebnisse seiner zusammen mit Dr. E. Spenke erweiterten Theorie.

Der Süddeutschen Apparate-Fabrik Nürnberg, insbesondere Herrn Direktor E. Körber, danken wir für die Bereitstellung der Mittel zur Durchführung dieser Arbeit.

Prag, Physikal. Institut der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule, April 1941.

[1]) P. W. Scharawskij, Journ. of Phys. Sow. Union **3**, 379, 1940.

Eine Atomstrahlapparatur zur lichtstarken Anregung schwer verdampfbarer Elemente*).

Von **Wolfgang Paul** in Kiel.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Mai 1941.)

Es wird eine Atomstrahlapparatur beschrieben, mit der es möglich ist, Spektrallinien schwerverdampfbarer Elemente in Emission und Absorption zu untersuchen. So wurde in Emission die Be II-Resonanzlinie $\lambda = 3130$ Å auf Hyperfeinstruktur geprüft mit dem Ergebnis, daß der g-Faktor des Be-Kerns zwischen den Grenzen $-0{,}4 < g < -0{,}8$ liegt. Das Vorzeichen des magnetischen Kernmomentes ergibt sich eindeutig als negativ. Als Beispiel für die Absorptionsmethode wurde der inverse Stark-Effekt des Cr I-Resonanzmultipletts bei Feldstärken zwischen 200 und 300 kV/cm gemessen. Das Ergebnis läßt sich mit Hilfe der von Lochte-Holtgreven angegebenen relativen Stark-Effekt-Aufspaltungen und Intensitäten solcher Multiplette deuten.

Einleitung. Die Verringerung der Linienbreite der Spektrallinien hat sich immer mehr als notwendig erwiesen, sei es, um kleine Hyperfeinstrukturaufspaltungen[1]) aufzulösen, sei es, um geringe Stark-Effektverschiebungen zu messen. Sind z. B. die magnetischen Momente leichter Kerne und damit die Hfs.-Aufspaltungen klein, so ist eine Auflösung solch schmaler Strukturen selbst bei Verwendung von Lichtquellen, die mit flüssiger Luft gekühlt sind, wegen der relativ großen Doppler-Breite der Einzelkomponenten nicht möglich. Minkowski und Meissner und Luft verwandten daher als Lichtquelle einen Atomstrahl kleinen Öffnungswinkels, der durch Elektronenstoß zum Leuchten angeregt wird, während Jackson und Kuhn einen Atomstrahl als Absorptionsmedium benutzten. Die Absorptionsmethode[2]) hat den Nachteil, nur die Resonanzlinien des neutralen Atoms der Untersuchung zugänglich zu machen, besitzt aber den Vorteil großer Lichtintensität, da das eingestrahlte Kontinuum fast beliebig intensiv gemacht werden kann. Die Emissionsmethode[3]) benötigt demgegenüber lange Belichtungszeiten und wurde deshalb bisher nur auf die intensivsten Bogenlinien leicht verdampfbarer Elemente, wie die der Alkalien und des Cadmiums angewandt. Atomstrahlen schwer verdampfbarer Elemente, z. B. von Be und Cr, sind bis heute noch nicht für optische Zwecke verwendet worden.

---

*) D 11.

[1]) Im folgenden wird „Hyperfeinstruktur" stets durch Hfs. abgekürzt. — [2]) D. Jackson u. H. Kuhn, Proc. Roy. Soc. London (A) **148**, 335, 1935. — [3]) R. Minkowski, ZS. f. Phys. **95**, 284, 1935; K. W. Meissner u. K. Luft, Ann. d. Phys. **28**, 667, 1937.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war der Aufbau einer Atomstrahlapparatur *für hohe Temperaturen*, die es gestattet, Spektrallinien schwer verdampfbarer Elemente sowohl lichtstark durch Elektronenstoß anzuregen, um sie interferometrisch zu beobachten, als auch auf ihren inversen Stark-Effekt bei sehr kleinen Verschiebungen zu untersuchen, wobei der Atomstrahl als Absorptionsmedium dient.

I. Aufbau und Prüfung der Apparatur.

In Fig. 1 ist ein Schnitt durch die Atomstrahlapparatur dargestellt. Aus einem Ofen O verdampft das zu untersuchende Element; durch wassergekühlte Blenden wird ein Atomstrahl ausgeblendet, der bei Untersuchung in Emission senkrecht zur Strahlrichtung von der Kathode K mit Elektronen beschossen und angeregt wird. An dem mit flüssiger Luft gekühlten Auffänger A wird der Strahl kondensiert und ausgefroren. Die Beobachtung erfolgt durch ein Fenster senkrecht zu Atom- und Elektronenstrahl. Bei Beobachtung in Absorption durchdringt das Primärlicht den Atomstrahl ebenfalls senkrecht zur Strahlrichtung.

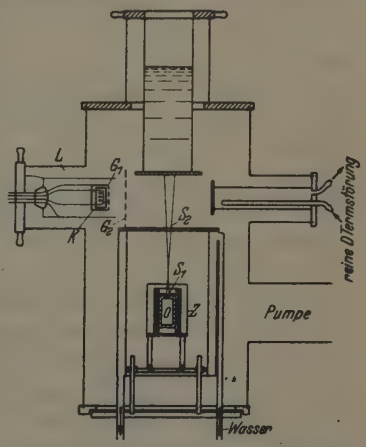


Fig. 1. Schnitt durch die Atomstrahlapparatur.

Die Anordnung besteht aus einem Hartglasrohr (Durchmesser 20 cm) mit aufgekitteten Metalldeckeln. Eine dreistufige Hg-Pumpe (Modell E von Leybold) sorgt für das nötige Vakuum. Die Saugleitung ist 60 mm weit und hat mit Hahn (Bohrung 40 mm) und Kühlfalle eine Länge von 50 cm. Das Vakuum kann mit einem 200 ccm-Mac-Leod-Manometer kontrolliert werden. Ein gutes Kriterium für die Güte des Vakuums ist das Restgasleuchten zwischen Kathode und Anode bei Elektronenbeschuß. Selbst bei einem Druck von 10^{-5} mm Hg ist dieses noch in erheblichem Maße vorhanden. Unterhalb dieses Druckes verschwindet es langsam. Alle sich erwärmenden Metallteile wurden so lange ausgeheizt, bis das Restgasleuchten gänzlich verschwunden war.

Der Ofen. Als Versuchsobjekte sollten Beryllium bzw. Chrom verwendet werden. Um den für einen intensiven Strahl nötigen Dampfdruck

dieser Elemente zu erhalten, muß der Ofen während des Betriebes eine Temperatur von 1500° K besitzen. Vorversuche zeigten, daß dann zur wirksamen Entgasung der Ofen auf 1700° K ausgeheizt werden mußte. Aus diesem Grunde wurde für den Aufbau des Ofens nur Molybdän wegen seines hohen Schmelzpunktes und geringen Dampfdruckes verwendet. Der Ofen besteht aus einem Mo-Zylinder von 15 mm Durchmesser und 4,5 cm Höhe, auf den 0,4 mm-Wolframdraht (Länge 220 cm) zur Heizung gewickelt ist. Als Isolationsmaterial hat sich Be- und Al-Oxyd als günstig erwiesen. In dieses Rohr ist ein Molybdäntopf mit aufgeschraubtem veränderlichen Spalt S_1 (Länge 8 mm, Breite bis 2 mm) geschoben. Das Fassungsvermögen beträgt 3,5 ccm. Der Ofen ist mit Steatitröhrchen von 4 cm Länge auf einem Eisenring gehaltert. Mit Hilfe von Klemmuffen kann das Ganze auf drei Eisenstäben in einen wassergekühlten Strahlungsschutz geschoben werden. Auf diese Weise läßt sich der Abstand Ofenspalt-Abbildespalt und damit das Öffnungsverhältnis des Strahles leicht regulieren. Der Zylinder Z aus vakuumgeschmolzenem Nickel dient als Strahlungsschutz. Nach dem Bau des Ofens wurde dieser 10 Stunden lang auf einer Temperatur von 1700° K gehalten, um die Gasabgabe bei der Betriebstemperatur äußerst gering zu halten. Zur Temperaturmessung diente ein Platin-Platin-Rhodium-Thermoelement. Es wurde dabei kein großer Wert auf absolute Meßgenauigkeit gelegt; die günstigste Strahltemperatur sollte nur genau reproduzierbar sein. Auf den wassergekühlten Strahlungsschutz ist der Abbildespalt S_2 aufgeschraubt. Bei der Emissionsuntersuchung betrug seine Fläche 6×8 mm², bei den Stark-Effekt-Untersuchungen 1×8 mm². Der wassergekühlte Strahlungsschutz ist auf einen Messingdeckel montiert, der unter Zwischenlage eines Gummiringes als Dichtung auf den unteren Messingring der Apparatur aufgepreßt wird.

Die Elektronenquelle. Um eine lichtstarke Anregung zu erhalten, war es nötig, eine möglichst intensive Elektronenquelle zu verwenden. Als Kathode diente eine Nickelscheibe von 2,5 cm Durchmesser, die mit Erdalkalioxyden bestrichen war und indirekt geheizt wurde. Dicht vor der Kathode befindet sich ein Raumladungsgitter G_1 aus Wolfram. Mit Hilfe eines zweiten weitmaschigen Gitters G_2 ist es möglich, den Elektronen die zur Anregung günstigste Geschwindigkeit zu geben. Zur Bündelung des Elektronenstrahls wurde eine Rohrlinse L verwendet. Alle benutzten Aufbauteile waren aus vakuumgeschmolzenem Nickel angefertigt. Die Anode ist wassergekühlt. Die Gesamtemission betrug bis 2,2 Amp. Durch geeignete Wahl der Gitterspannungen konnten die Gitterströme so weit heruntergedrückt werden, daß ein reiner Anregungsstrom von 1,3 Amp.

gemessen wurde. Dieser hohe Anregungsstrom war jedoch nicht länger als 1 bis 2 Stunden zu halten. Es wurde deshalb meist mit einem Anregungsstrom von $\sim$ 500 mA gearbeitet bei einer Anodenspannung von 500 Volt. Für kleinere Spannungen, die an sich erwünscht sind, da das Maximum der meisten Anregungsfunktionen — auch der Funkenlinien — bei niedrigeren Anregungsspannungen liegt, konnte ein solch hoher Anodenstrom nicht erreicht werden. Die Aufnahme der Anregungsfunktion der zu untersuchenden Funkenlinie Be II $\lambda = 3130$ Å z. B. zeigte, daß die Intensität der Linie oberhalb 400 Volt Anregungsspannung merklich abfällt. Trotzdem wurde mit 500 Volt Anodenspannung gearbeitet, da es sich als vorteilhaft erwies, die schlechtere Anregung gegenüber niedrigeren Spannungen durch hohen Anregungsstrom auszugleichen.

Die optische Anordnung. Es wurden je nach Objekt zwei Anordnungen verwendet. Bei Untersuchung von Spektrallinien im Sichtbaren stand das Fabry-Perot hinter der Kollimatorlinse des Spektrographen. Für die Untersuchung im Ultravioletten befand sich das Interferometer im parallelen Strahlengang vor dem Spektrographen. Die Interferenzringe wurden dabei dreifach vergrößert auf den Spektrographenspalt abgebildet. Die Silberverspiegelung für das sichtbare Spektralgebiet hatte ein Reflexionsvermögen von $\sim 90\,\%$, die Hochheim-Verspiegelung für das Ultraviolette $\sim 80\,\%$. Als Spektralapparat diente für das Ultraviolette ein Quarz-G.H.-Apparat von Steinheil mit zwei Prismen, für das Sichtbare ein Zeissscher Dreiprismenapparat nach Försterling. Die gesamte optische Anordnung befand sich in einem von der Atomstrahlapparatur getrennten Raum, in dem die Temperatur konstant gehalten wurde. Diese änderte sich während einer Versuchszeit von 5 Stunden um nicht mehr als $\sim 0{,}1^0$. Zur Justierung wurde für die Be II-Resonanzlinie $\lambda = 3130$ Å die Goldlinie $\lambda = 3126$ Å verwendet, die keine Hfs. zeigt, also scharfe Interferenzringe ergibt. Die Goldlinie wurde in einer Paschenschen Hohlkathode aus Kohle mit Goldchlorid als Füllung angeregt. Als Füllgas diente ein Neon-Heliumgemisch, das zur Reinigung über mit flüssiger Luft gekühlter Kohle zirkulierte. Mit Hilfe eines Hochheim-Spiegels konnte das Licht der Goldentladung in den Strahlengang gebracht werden.

Bei der Anregung des Be-Strahles liegt fast das gesamte emittierte Licht im Ultravioletten. Der Strahl selbst ist also nicht zu sehen. Eine Kontrolle für die Existenz eines sauberen Strahles bildete hier das scharfe Kondensationsbild des Abbildespaltes auf dem Auffänger.

Prüfung der Apparatur mit Cadmium. Zur Prüfung der Apparatur wurde zuerst das leicht verdampfbare Cd untersucht. Hier genügte eine

Temperatur von 630° K im Ofen. Der Ofenspalt hatte eine Breite von 0,05 mm. Es zeigte sich, daß der rot leuchtende Atomstrahl scharf begrenzt war, das Vakuum also ausreichte. Spektrogramme ergaben, daß neben den Bogenlinien bei einer Anregungsspannung von 300 Volt auch die Cd II- und Cd III-Linien lichtstark angeregt werden. So konnte bei einem Anregungsstrom von 250 mA mit einem dick verspiegelten Interferometer (Reflexionsvermögen $\sim 90\,\%$) in 4 Stunden die Cd II-Linie $\lambda = 4415$ Å auf der Agfa-Spektralblau-Ultrarapidplatte gut geschwärzt erhalten werden. Die Hyperfeinstruktur dieser Linie, die eine ausgeprägte Isotopieverschiebung besitzt, war gut aufgelöst. Schüler[1]) konnte in dieser Struktur bei Verwendung einer mit flüssiger Luft gekühlten Hohlkathode eben noch die Komponenten der geraden Isotope trennen. Die Komponentenbreite kann bei ihm im besten Falle 0,025 cm^{-1} betragen haben, während die im Atomstrahl erzeugte Breite der einzelnen Isotopenlinien $\sim 0{,}01$ cm^{-1} betrug.

Dieser Versuch zeigt also, daß es mit der beschriebenen Apparatur möglich ist, einerseits die Linienbreite wesentlich herabzusetzen, andererseits durch geeignete Anregungsspannung auch Nichtresonanzlinien — die untersuchte Linie ist ein Übergang $4\,d^9\,5s^2\,{}^2D_{5/2} - 4d^{10}\,5p\,{}^2P_{3/2}$ des Cd II — lichtstark anzuregen.

II. Untersuchung der Be II-*Resonanzlinie* $\lambda = 3130$ Å.

Alle bisherigen Bemühungen, Hyperfeinstrukturen an Be-Linien festzustellen[2]), ergaben keinen Hinweis auf irgendwelche Aufspaltungen oder auch nur Unsymmetrien. Als Lichtquelle wurde dazu stets eine mit flüssiger Luft gekühlte Hohlkathode verwandt. Die Halbwertsbreite einer Spektrallinie, die in dieser Lichtquelle praktisch allein durch den Doppler-Effekt bedingt wird, ist gegeben durch:

$$b = 2\sqrt{2R\ln 2}\,c^2\sqrt{\frac{T}{M}}\ \mathrm{cm}^{-1}. \qquad (1)$$

Für die Be II-Resonanzlinie $\lambda = 3130$ Å folgt daraus in einer mit flüssiger Luft gekühlten Hohlkathode ($T \sim 150°$ K) eine Linienbreite von $b \sim 0{,}1$ cm^{-1}. Tatsächlich erreichte Mrozrowski[2]) bei der Be I-Linie $\lambda = 2349$ Å nur eine Breite von $b = 0{,}21$ cm^{-1}, dies entspricht bei 3130 Å $b = 0{,}16$ cm^{-1}. Diese beiden von ihm untersuchten Resonanzlinien erwiesen sich bei der erreichten Linienbreite als unaufgespalten und symmetrisch.

---

[1]) H. Schüler und H. Westmeyer, ZS. f. Phys. **82**, 685, 1933. — [2]) S. Mrozrowski, Phys. Rev. **55**, 798, 1939; P. G. Kruger und R. C. Wagner, ebenda **41**, 373, 1932.

Nachdem sich die beschriebene Atomstrahlanordnung am Cd bewährt hatte, wurde versucht, die Linienbreite der Be-Linie durch kleines Öffnungsverhältnis des Atomstrahles soweit wie möglich herabzusetzen und die Funkenresonanzlinie $\lambda = 3130$ Å nochmals auf Hfs. zu untersuchen.

Nach Minkowski[1]) beträgt die Halbwertsbreite im Atomstrahl:

$$b = 0{,}41\, b_{Ofen} \cdot \frac{s}{h}. \qquad (2)$$

Dabei bedeutet s die Länge von Ofen- und Abbildespalt, h den Abstand der beiden voneinander, s/h also den Öffnungswinkel des Strahles; b_{Ofen} ist die Doppler-Breite, die der Temperatur des Dampfes im Ofen entspricht. Um den für einen Be-Atomstrahl erforderlichen Dampfdruck zu erzeugen, benötigt man eine Temperatur von $\sim 1500^0$ K. Für $s = 0{,}8$ cm und $h = 6$ cm ergibt sich aus (2) eine Linienbreite von 0,015 cm^{-1}. Zu dieser Breite addiert sich noch die Apparatbreite des Interferometers. Sie beträgt nach Minkowski und Bruck[2]) für einen 40 mm-Etalon mit einem Reflexionsvermögen von 80% 0,008 cm^{-1}. Es ist demnach eine Gesamtbreite von 0,023 cm^{-1} zu erwarten. Sie sollte ~ 7mal so klein wie die von Mrozrowski beobachtete Linienbreite sein. Da bei den angegebenen Dimensionen der Atomstrahlspalte die Belichtungszeit schon mehrere Stunden betrug, so wurde von einer weiteren Verkleinerung des Öffnungswinkels wegen der damit verbundenen Intensitätsabnahme abgesehen. Bei der Wahl des Ofenspaltes ist folgendes zu berücksichtigen: Um einen wohldefinierten Atomstrahl zu erhalten, sollte die Spaltbreite des Ofens nicht größer als die freie Weglänge des Dampfes im Ofen sein. Aus der Extrapolation der Dampfdruckkurven für Be nach Espe und Knoll[3]) besitzt Be bei einer Temperatur von 1450^0 K einen Dampfdruck von $\sim 10^{-1}$ mm. Die freie Weglänge beträgt bei diesem Druck ~ 1 mm. Um nicht noch höhere Temperaturen verwenden zu müssen, wurde der Ofenspalt zu 2 mm gewählt.

Die Belichtung für eine Interferometeraufnahme der Linie $\lambda = 3130$ Å bei einer Ofentemperatur von 1450^0 K, einem Anregungsstrom von 0,5 Amp. und 500 Volt Anregungsspannung auf der Agfa-Astroplatte dauerte im allgemeinen 4 Stunden. Die Aufnahmen gestalteten sich insofern schwierig, als in nur 0,3 Å Entfernung die intensive Hg-Linie $\lambda = 3130$ Å liegt, die eine ausgeprägte Hfs. besitzt. Geringe Spuren von Hg im Atomstrahlrohr erzeugen bei den großen Etalonabständen schon einen starken Untergrund unter der Be-Linie. Bei der Auswertung wurden daher nur solche Platten

[1]) R. Minkowski u. H. Bruck, ZS. f. Phys. **95**, 275, 1935. — [2]) R. Minkowski u. H. Bruck, ebenda **95**, 299, 1935. — [3]) W. Espe u. M. Knoll, Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, Julius Springer.

benutzt, bei denen dieser Untergrund nicht mehr störte. Eine weitere Schwierigkeit besteht im folgenden: Das Be II-Spektrum ist alkaliähnlich. Bei $\lambda = 3130$ Å handelte es sich um die Resonanzübergänge $^2S_{1/2} - ^2P_{1/2}$, $^2S_{1/2} - ^2P_{3/2}$, deren Intensitätsverhältnis 1 : 2 ist. Die Feinstrukturaufspaltung dieser Linie beträgt nach Kruger und Wagner[1]) nur $\Delta\nu = 6{,}61\ \mathrm{cm}^{-1}$. Da das Auflösungsvermögen des Vorzerlegers nicht ausreichte, um die beiden Feinstrukturkomponenten zu trennen, wurde der Plattenabstand des Interferometers so gewählt, daß die eine Feinstrukturkomponente in die Mitte zwischen zwei Ordnungen der anderen fällt. Um ein Überlappen der beiden Komponenten zu vermeiden, kann unter den gegebenen Bedingungen höchstens ein Etalonabstand von 40 mm verwendet werden.

Aus der Goudsmitschen Formel[2]) ergibt sich für die Aufspaltung $\delta\nu$ des $2\,^2S_{1/2}$-Termes, wenn man den theoretisch wahrscheinlichsten Wert $I = 3/2$ zugrunde legt:

$$\delta\nu = \frac{16\,R\alpha^2 \cdot Z_i Z_a^2 g_I}{3\,n_a^3\,1836}\ \mathrm{cm}^{-1}. \tag{3}$$

Für $n = 1{,}73$; $Z_a = 2$; $Z_i = Z = 4$ folgt:

$$\delta_\nu = 0{,}050\ g_I\ \mathrm{cm}^{-1}\ (g_I = \text{Lande-Faktor des Kernes}).$$

Die Hfs.-Aufspaltung der $^2P_{1/2,\,3/2}$-Terme ist zu klein, um meßbar in Erscheinung zu treten. Jede Feinstrukturkomponente zerfällt also in zwei Hfs.-Komponenten mit einem Intensitätsverhältnis 5 : 3. Da nach theoretischen Überlegungen das magnetische Moment *negativ* sein soll, so müßte der Term mit $F = 2$ (F = Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses des Atoms) der energetisch tiefere, also die Komponente mit der Intensität 5 in jeder Feinstrukturlinie die kurzwelligere sein. Das zu erwartende Aufspaltungsbild ist in Fig. 2 dargestellt.

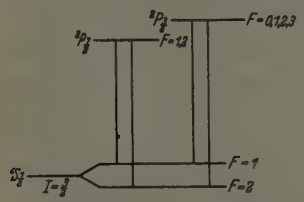


Fig. 2. Termschema des Überganges Be II $^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{1/2,\,3/2}$.

Die an $\lambda = 3130$ Å gemachten Aufnahmen zeigen zwar keine aufgelöste Hfs., die stärkere *Feinstruktur*-Komponente läßt aber eine Unsymmetrie nach kleinerem ν deutlich erkennen, aus der die Aufspaltung $\delta\nu$ abgeschätzt werden kann[3]). Aus der auf S. 779 errechneten Breite der-

[1]) P. G. Kruger u. R. C. Wagner, l. c. — [2]) S. Goudsmit, Phys. Rev. **43**, 636, 1933. — [3]) Daß diese Unsymmetrie nicht auch an der schwachen Feinstrukturlinie zu beobachten ist, liegt nur an deren geringer Intensität.

Einzellinie, die mit dem Experiment innerhalb der Abschätzungsfehler übereinstimmt, und aus der gemessenen Gesamtbreite der unsymmetrischen Feinstrukturkomponente ergeben sich für $\delta\nu$ die Grenzen $0{,}020 < \delta\nu < 0{,}040\ \mathrm{cm}^{-1}$ und damit aus (3) eine obere und untere Grenze für g:

$$g_{max} = -0{,}8; \quad g_{min} = -0{,}4.$$

Daraus folgt:

$$\mu_{max} = -1{,}2 \text{ Kernmagnetonen},$$
$$\mu_{min} = -0{,}6 \quad ,,$$

Dabei wurde wieder $I = {}^3/_2$ gesetzt. Das negative Vorzeichen ergibt sich eindeutig aus der Tatsache, daß die Unsymmetrie der Linie nach kleinerem ν liegt, also die schwächere Hfs.-Komponente langwelliger ist als die stärkere. Dies bedeutet aber verkehrte Termordnung und damit negatives magnetisches Moment[1]).

Legt man den von Rabi und Mitarbeitern bestimmten g_I-Faktor, $g_I = -0{,}783$, zu Grunde, so läßt sich für das mechanische Moment der Wert $I = {}^5/_2$ ausschließen, da bei Vorhandensein dieses Wertes unter den gegebenen Versuchsbedingungen die beiden Hfs.-Komponenten eindeutig getrennt sein müßten. Der Wert $I = {}^1/_2$ kann nicht ganz ausgeschlossen werden; die Größe der beobachteten Unsymmetrie macht aber ein $I = {}^3/_2$ sehr wahrscheinlich.

III. Untersuchung des inversen Stark-Effektes an dem Cr I-Multiplett $^7S_3 - {}^7P_{2,3,4}$.

Jenkel und Kopfermann[2]) gaben vor kurzem eine Methode zur Untersuchung kleiner inverser Stark-Effekte an. Sie benutzten einen Atomstrahl kleinen Öffnungswinkels, der senkrecht durch ein elektrisches Feld geschossen wurde, als Absorptionsmedium und konnten wegen der geringen Doppler-Breite der Absorptionslinie mit einem Spektrometer hohen Auflösungsvermögens sehr geringe Stark-Effekt-Verschiebungen an Singulettlinien messen. Mit der oben beschriebenen Atomstrahlapparatur sollte diese Methode auf ein Multiplett, und zwar auf das Cr I-Resonanzmultiplett $\lambda = 4254$, $\lambda = 4275$, $\lambda = 4290$ Å angewandt werden.

Experimentelle Anordnung. Die Apparatur war in den Hauptstücken die gleiche wie oben beschrieben (Fig. 1). Die Elektronenquelle wurde herausgenommen und statt dessen über dem Abbildespalt S_2 ein Feld-

[1]) Wegen Ausbruch des Krieges mußte diese Untersuchung abgebrochen werden. Inzwischen bestimmten Rabi und Mitarbeiter mit der Atomstrahlresonanzmethode den g-Faktor des Be-Kernes zu $g_I = -0{,}783$. Dieser Wert liegt zwischen den oben angegebenen Grenzen. — [2]) L. Jenckel und H. Kopfermann, ZS. f. Phys. **117**, 145, 1941.

Kondensator angebracht. Das Primärlicht wurde senkrecht zu Atomstrahl- und Feldrichtung eingestrahlt. Ein Schnitt durch den Kondensator ist in Fig. 3 dargestellt. Die Kondensatorplatten sind zwei gut polierte Nickelscheiben von $15 \times 20\,\text{mm}^2$ Fläche. Sie sind auf Bernsteinplatten aufgeschraubt. Durch die vier Schrauben L_1 ist es möglich, die Platten parallel zu richten und ihren Abstand genau einzustellen. Bei allen Aufnahmen betrug der Plattenabstand 0,10 cm. Der Kondensator ist mit einem Winkel an die den Abbildespalt tragende Platte aufgeschraubt. Die Schrauben L_2 gestatten, den Kondensatorspalt senkrecht über den Abbildespalt zu stellen. Bei dieser Anordnung sind also Ofen, Abbildespalt und Kondensator starr miteinander verbunden. Die Justierung kann außerhalb des Atomstrahlrohres vorgenommen werden, was gegenüber der Anordnung bei Kopfermann und Otzen[1]) sehr vorteilhaft ist. Die Spannungsmessung geschah mit einem statischen Hochspannungsinstrument nach Rausch von Traubenberg, das an ein Hartmann & Braun-Instrument angeschlossen war.

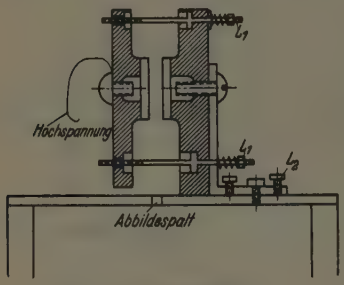


Fig. 3. Der Feldkondensator. L_1 und L_2 Justierschrauben.

Die optische Anordnung. Als eingestrahltes Kontinuum wurde wieder wie in den erwähnten Arbeiten die zu absorbierende Linie in Emission benutzt. Als Lichtquelle diente eine wassergekühlte Hohlkathode, deren Wandung mit einem Cr-Zylinder ausgekleidet war. Als Füllgas wurde ein He-Ne-Gemisch verwandt, das zur Reinigung über mit flüssiger Luft gekühlter Kohle und heißem Kupferoxyd zirkulierte. Letzteres geschah zur Entfernung des Wasserstoffs, der sich sonst durch eine CH-Bande als Untergrund unter die Cr-Resonanzlinien sehr störend bemerkbar machte. Die Linienbreite wurde stets so gewählt, daß sie das verwendete Dispersionsgebiet des Interferometers voll ausfüllte, daß also ein Pseudokontinuum entstand, aus dem der Atomstrahl eine schmale Linie herausabsorbierte. Bei einer Entladungsstromstärke von 0,2 Amp. konnte trotz des als enge Blende wirkenden Kondensators bei dick verspiegelten Interferometerplatten eine Aufnahme der zu untersuchenden Linien in 3 Minuten erhalten werden.

[1]) H. Kopfermann und Ch. Otzen, ZS. f. Phys. **117**, 156, 1941.

Als Spektrograph diente ein Glas-GH-Apparat von Steinheil. Das Perot-Fabry-Etalon stand, wie üblich, hinter der Kollimatorlinse. Der Etalonabstand betrug bei allen Aufnahmen $d = 60$ mm; dies entspricht einem Dispersionsgebiet $\Delta\nu = 0{,}088\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Um einen intensiven Cr-Atomstrahl zu erhalten, war bei einem Ofenspalt von 1,5 mm Breite eine Ofentemperatur von $\sim 1420^0$ nötig. Bezüglich der Absorption der drei Cr-Resonanzlinien ist folgendes zu bedenken. Der Atomstrahl absorbiert um so besser, je größer die Oszillatorenstärke f des untersuchten Überganges ist. Während für die Resonanzlinien der Erdalkalien, die Kopfermann und Mitarbeiter untersuchten, $f \sim 2$ ist, kann man für den f-Wert des Cr-Resonanzmultipletts nur $f \sim 1$ erwarten[1]). Für die Einzelübergänge sollen sich die f-Werte wie deren Intensitäten verhalten, also wie $9:7:5$, so daß man $f_{\lambda=4254\,\text{Å}} \sim 0{,}4$; $f_{\lambda=4275\,\text{Å}} \sim 0{,}3$, $f_{\lambda=4290\,\text{Å}} \sim 0{,}2$ setzen kann. Um in allen drei Linien gleichzeitig genügend Absorption zu erhalten, mußte bei der zur Verfügung stehenden Strahldicke die Dichte im Atomstrahl und damit der Dampfdruck im Ofen höher gemacht werden, als eigentlich für einen wohldefinierten Atomstrahl zuträglich ist. Die Linienbreite wurde dadurch etwas größer, als es dem Öffnungsverhältnis des Strahles entspricht. Sie betrug im Experiment $\sim 0{,}012\ \mathrm{cm}^{-1}$. Wegen der höheren Dichte im Strahl ließ sich das Feld zwischen den Kondensatorbacken nicht mehr so hoch wie bei normalen Verhältnissen halten, d. h. nur bis ~ 200 kV/cm. Da die Stark-Effekt-Verschiebungen sich aber bei diesen Feldstärken als sehr klein erwiesen, wurde in der Hauptsache die stärkste Linie untersucht, die wegen ihres relativ großen f-Wertes schon bei geringerer Dichte in Absorption erhalten werden konnte, also auch höhere Feldstärken zuließ. Bei den anderen beiden Multiplettlinien wurde nur bei *einer* Feldstärke untersucht, ob deren Verschiebung von der an der stärksten Linie gemessenen Verschiebung abweicht.

Die Technik der Aufnahmen und ihre Auswertung war die gleiche wie bei Kopfermann und Otzen, d. h. es wurde mehrmals hintereinander die Linie mit und ohne Feld photographiert. An der Linie $\lambda = 4254$ Å wurden Aufnahmesätze von 12 Aufnahmen bei drei verschiedenen Feld-

---

[1]) Es handelt sich (s. Termschema Fig. 5) um einen Elektronensprung von $3d^5\,4s\,{}^7S_3$ nach $3d^5\,4p\,{}^7P_{4,3,2}$, also um ein „Einelektronenproblem". Nach dem f-Summensatz sollte $\sum^a f_a \sim 1$ sein. Da nach Absorptionsaufnahmen verschiedener Beobachter bereits das zweite Glied dieser Absorptionsserie nur noch äußerst schwach ist, so kann man größenordnungsmäßig Σf gleich dem f-Wert des Resonanzmultipletts setzen.

stärken gemacht, und zwar bei $F = 206$, 234, 275 kV/cm. Dabei zeigte sich eine Verschiebung der Linie als Ganzes nach Rot bei einer geringen Verbreiterung. Die Verschiebung $\Delta\nu$ in Abhängigkeit von der Feldstärke wird in Tabelle 1 vorgewiesen. Sie ist auch in Fig. 4 dargestellt, wobei $\Delta\nu$ als Funktion von F^2 aufgetragen ist. Die gemessenen Werte liegen gut auf einer Geraden, die durch den Nullpunkt geht. Es handelt sich also um einen rein quadratischen Stark-Effekt.

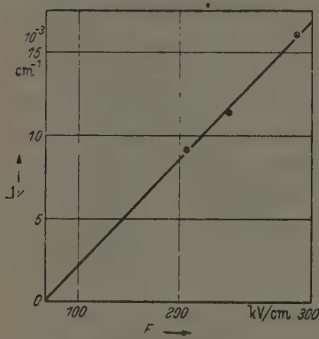


Fig. 4. Verschiebung der Linie CrI $\lambda = 4254$ Å in Abhängigkeit von der Feldstärke F (quadratische Skala).

Die Linien $\lambda = 4275$ Å ($^7S_3 \rightarrow {}^7P_3$) und $\lambda = 4290$ Å ($^7S_3 \rightarrow {}^7S_2$) wurden nur bei der Feldstärke $F = 206$ kV/cm untersucht. Auch hier wurde eine Rotverschiebung der Linien als Ganzes beobachtet, und zwar beträgt diese bei dem Übergang $^7S_3 \rightarrow {}^7P_3$ $\Delta\nu = 12 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}, bei dem Übergang $^7S_3 - {}^7P_2$ dagegen $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}. Die Meßgenauigkeit ist wegen der geringeren Absorption etwa halb so groß wie bei dem Übergang $^7S_3 - {}^7P_4$. Die Linie $^7S_3 - {}^7P_2$ wird also weniger, die Linie $^7S_3 - {}^7P_3$ mehr als die Linie $^7S_3 - {}^7P_4$ verschoben.

Tabelle 1. Rotverschiebung $\Delta\nu$ der Linie $\lambda = 4254$ Å ($^7S_3 - {}^7P_4$) mit steigender Feldstärke F. (Meßgenauigkeit $\sim 0{,}0005$ cm^{-1}.)

F in kV/cm	206	234	275
$\Delta\nu \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}	9,1	11,4	16,1
$\Delta\lambda \cdot 10^{-3}$ Å	1,6	2,1	2,9

Diskussion der Ergebnisse. Nach der Kramers-Heisenbergschen Dispersionsformel erhält man durch Übergang zur Frequenz $\nu = 0$ für die Verschiebung ΔW eines Elektronenterms im statischen äußeren Feld F die Beziehung

$$\Delta W = \frac{-e^2F^2}{8\pi^2 m}\left[\sum\nolimits_a \frac{f_a}{\nu_a^2} - \sum\nolimits_e \frac{f_e}{\nu_e^2}\right], \tag{5}$$

wenn f_a die Absorptions-Oszillatorenstärke der Übergänge von dem betrachteten Elektronenterm nach höheren Zuständen, die f_e die Emissions-Oszillatorenstärke nach tieferen Zuständen bedeuten; ν_a und ν_e sind die

entsprechenden Absorptions- bzw. Emissionsfrequenzen. Danach verschieben die höheren Zustände den Term nach unten gemäß der ersten Summe in Gleichung (5), während die tieferen Zustände ihn entsprechend der zweiten Summe nach oben drücken. An diesem Wechselspiel sind in erster Linie die Terme beteiligt, die nahe am untersuchten Term liegen (kleines ν) und deren mögliche Übergänge zu diesem am intensivsten sind (großes f). Ein Schema der tiefsten Cr I-Terme mit den in Frage kommenden Übergängen ist in Fig. 5 gezeichnet. Das untersuchte Multiplett ist der Übergang vom Grundzustand $3d^5\,4s\,{}^7S_3$ zum $3d^5\,4p\,{}^7P_{4,3,2}$-Term. Als Störterme für den ^7P-Term kommen im wesentlichen nur der $3d^5\,5s\,{}^7S$-Term, der $3d^5\,4d\,{}^7D$-Term, die beide darüber liegen, und der tiefer liegende Grundterm in Frage. Über die f-Werte der zugehörigen Übergänge ist nichts Sicheres bekannt. Für den Übergang $3d^5\,4s\,{}^7S \rightarrow 3d^5\,4p\,{}^7P$ kann, wie schon oben angegeben, $f \sim 1$ gesetzt werden. Ein Vergleich der Intensitäten der drei in Frage kommenden Multiplette, der wenigstens ein qualitatives Maß für die interessierenden f-Werte gibt, zeigt, daß der Elektronensprung vom oberen ^7S-Term zum ^7P-Term sicher ein kleineres f besitzt, als der Übergang vom ^7P-Term zum Grundzustand. Dagegen ist der f-Wert des $^7D - {}^7P$-Überganges wohl von der Größe der Oszillatorenstärke des Resonanzüberganges. So steht zu erwarten, daß die Störung des am nächsten liegenden $3d^5\,5s\,{}^7S$-Terms auf den ^7P-Zustand durch die in umgekehrter Richtung gehende Störung des Grundzustandes erheblich abgeschwächt, vielleicht sogar annähernd kompensiert wird, während die Störung durch den $3d^5\,4d\,{}^7D$-Term zwar voll zur Geltung kommt, infolge der entfernteren Lage aber ziemlich klein ist. Insgesamt ist also eine geringe nach unten gehende Verschiebung des ^7P-Terms zu vermuten, die den Charakter einer fast reinen D-Termstörung haben sollte. Dementsprechend ist mit einer noch geringeren, aber in gleicher Größenordnung liegenden Verschiebung des Grundzustandes nach unten infolge der abstoßenden Wirkung der beiden in Fig. 5 eingezeichneten ^7P-Terme zu rechnen. So wird — wenigstens qualitativ — sowohl die geringe beobachtete Verschiebung des Resonanzmultipletts, die ja als Differenzeffekt der Verschiebung von ^7P- und ^7S-Term resultiert, als auch die Rotverschiebung, die sich durch die stärkere Verschiebung des ^7P-Terms ergibt, verständlich.

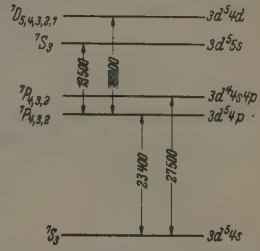


Fig. 5. Schema der tiefsten Cr I-Terme (Septettsystem), die bei der Untersuchung zu berücksichtigen sind (Termabstände gemessen in cm^{-1}).

Der Absolutwert der Verschiebung des Grundzustandes kann aus (5) abgeschätzt werden. Für den Grundzustand fällt die zweite Summe weg und die erste Summe ist über die beiden Absorptionsserien zu erstrecken, wobei es genügt, jeweils nur das erste Glied zu berücksichtigen, da die höheren Glieder sehr kleine f-Werte besitzen, wie die Absorptionsaufnahmen von Gieseler und Grotrian[1]) zeigen. Über den f-Wert des Überganges $3d^5\,4s\,{}^7S - 3d^4\,4s\,4p\,{}^7P$ läßt sich theoretisch nichts Sicheres aussagen. Da aber die Absorption dieses Überganges ungefähr die gleiche Stärke hat wie die nach dem $3d^5\,4s\,{}^7P$-Term, so genügt es zur Abschätzung, beiden Absorptionsmultipletten den gleichen Wert $f \sim 1$ zu geben. Man erhält dann für den nicht aufspaltenden Grundterm bei $F = 206$ kV/cm:

$$\Delta\nu \sim 0{,}026\ \text{cm}^{-1}.$$

Um daraus die absolute Verschiebung des *Schwerpunktes* des $3d^5\,4p\,{}^7P$-Terms zu finden, hat man zu diesem $\Delta\nu$ die gefundene Verschiebung des Multipletts zu addieren und erhält als mittlere Verschiebung $\Delta\nu$ des ${}^7P$-Termschwerpunktes bei 206 kV/cm

$$\Delta\nu = 0{,}036\ \text{cm}^{-1}$$

bzw. der einzelnen Terme

$${}^7P_4,\ {}^7P_3,\ {}^7P_2\colon\quad \Delta\nu = 0{,}035\ \text{cm}^{-1};\quad 0{,}038;\quad 0{,}034\ \text{cm}^{-1}.$$

Schließlich kann man noch mit Hilfe der von Lochte-Holtgreven[2]) angegebenen relativen Verschiebungen der einzelnen Stark-Effekt-Terme eine — ebenfalls qualitative — Aussage über die Art der Störung des $3d^5\,4p\,{}^7P_{4,3,2}$-Zustandes machen. So soll z. B. der $3d^5\,4p\,{}^7P_4$-Term unter Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes in fünf Stark-Effekt-Terme mit den Quantenzahlen $m = \pm 4,\ \pm 3,\ \pm 2,\ \pm 1$ und 0 aufspalten, von denen derjenige mit $m = 0$ die größte Verschiebung besitzt. Je nachdem, ob der Elektronenterm von einem S- oder D-Term gestört ist, erhält man eine verschiedene Lage der fünf Terme. In Fig. 6 ist diese Lage (unten bei reiner S-Termstörung, oben bei reiner D-Termstörung) angegeben. Die Einheiten sind so gewählt, daß die im Multiplett auftretenden maximalen Aufspaltungen in beiden Fällen gleich groß sind. Die Verbindungsgeraden erlauben das Aufspaltungsbild bei gemischter S, D-Störung anzugeben. Da im experimentell gefundenen Linienbild keine Aufspaltung in die einzelnen Stark-Effekt-Komponenten beobachtet wird, d. h. die Breite der einzelnen Komponenten groß gegen

[1]) H. Gieseler und W. Grotrian, ZS. f. Phys. **22**, 245, 1924. — [2]) W. Lochte-Holtgreven, ebenda **109**, 385, 1938.

ihre Abstände ist, hat nur die Betrachtung des Termschwerpunktes einen Sinn. Nach den Rechnungen von Lochte-Holtgreven sollen die Termschwerpunkte innerhalb eines Multipletts bei gleichem Feld um denselben Betrag verschoben werden, wobei unter Termschwerpunkt die Summe

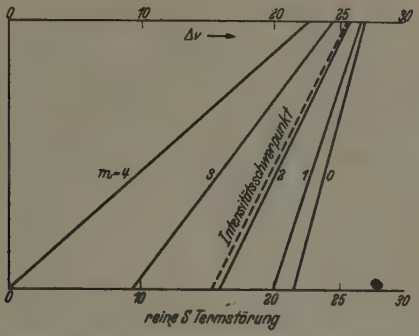


Fig. 6. Aufspaltungsbild des Terms $^1P_4$ bei Störung durch S- und D-Terme nach Lochte-Holtgreven.

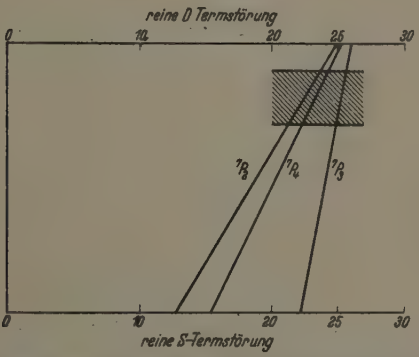


Fig. 7. Relative Lage der Intensitätsschwerpunkte der Terme $^1P_2$, $^1P_3$, $^1P_4$ bei Störung durch S- und D-Terme. Im schraffierten Gebiet liegen die experimentell gefundenen Werte.

der Verschiebungen der Einzelkomponenten eines Terms dividiert durch die Zahl der Komponenten verstanden wird. Im vorliegenden Falle wird aber nicht dieser Termschwerpunkt beobachtet, sondern ein Intensitätsschwerpunkt, der sich aus den Verschiebungen der Komponenten und ihren Intensitäten ergibt, wobei darauf zu achten ist, daß die σ-Komponenten durch die Polarisation des Prismenapparates in ihrer Intensität auf $\sim 50\,\%$

geschwächt werden. Der so ermittelte Schwerpunkt für den $^7P_4$-Term ist gestrichelt in Fig. 6 eingetragen. Fig. 7 zeigt nun die relative Verschiebung der Intensitätsschwerpunkte der drei untersuchten Terme $^7P_2$, $^7P_4$, $^7P_3$ in Abhängigkeit von der Störungsart. Versucht man, die gefundenen absoluten Schwerpunktsverschiebungen $\Delta\nu = 0{,}034$; $0{,}035$; $0{,}038\,\mathrm{cm}^{-1}$ der drei ^7P-Terme in das Schema einzupassen, so stellt man fest, daß dafür unter Berücksichtigung der Fehlergrenzen, die sowohl durch die Messung selbst, als auch durch die Abschätzung der Verschiebung des Grundzustandes bedingt sind, der schraffierte Bereich in Fig. 7 in Frage kommt. Die Lage dieses Gebietes zeigt also — wie erwartet —, daß eine fast reine D-Termstörung vorliegt, wofür auch die geringen Verbreiterungen der drei Linien im elektrischen Feld sprechen.

Herrn Prof. Kopfermann danke ich herzlich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Die Helmholtz-Gesellschaft ermöglichte die Arbeit durch Übernahme der Betriebskosten, während die Deutsche Forschungsgemeinschaft die Spektrographen zur Verfügung stellte. Auch dafür sei bestens gedankt.

Über die bei der Uranspaltung auftretenden Molybdän-Isotope.

Von **Otto Hahn** und **Fritz Strassmann**.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Mai 1941.)

Auf Grund einer neuen japanischen Arbeit über aktiviertes Molybdän aus Molybdän wurden unsere bisherigen Befunde über Molybdän-Isotope aus der Uranspaltung noch einmal überprüft. — Bei völliger Bestätigung unserer früheren experimentellen Ergebnisse ist die Deutung der Versuche nunmehr ganz anders geworden. - Bei der Uranspaltung entsteht 1. ein 12-Minuten-Molybdän, das sich offenbar in ein sehr kurzlebiges Isotop des Elements 43 (Ma) umwandelt. — 2. Es entsteht ein 14-Minuten-Molybdän, das sich in ein Isotop des Elements 43 von 14 Minuten Halbwertszeit umwandelt. Das früher für ein einheitliches 18-Minuten-Molybdän-Isotop gehaltene Produkt ist also in Wirklichkeit eine Mischung von drei Körpern sehr ähnlicher Halbwertszeit, die durch ihr Zusammenspiel, gleichgültig zu welcher Zeit gemessen wird, den früher gefundenen 18-Minuten-Abfall ergeben. — 3. Das schon früher beschriebene 67-Stunden-Molybdän wurde bestätigt.

In einer Arbeit über „Einige weitere Produkte der Uranspaltung“ [1]) haben wir für das Molybdän etwa die folgenden Angaben gemacht: „Außer dem von uns schon früher aufgefundenen Molybdän-Isotop von 67 Stunden Halbwertszeit entsteht noch ein weiteres von 18 Minuten Halbwertszeit. Dieses ist nicht identisch mit dem in der Literatur beschriebenen, aus dem Molybdän selbst entstehenden β-strahlenden 24-Minuten-Molybdän-Isotop und auch nicht identisch mit dem durch Neutronenabspaltung aus dem Molybdän entstehenden Positronenstrahler von 17 Minuten Halbwertszeit [2]).“ Bestätigt wurden diese Angaben vor kurzem durch Bothe und Flammersfeld, die im Magnetfeld feststellten, daß das 18-Minuten-Molybdän negative Elektronen emittiert [3]).

Nun ist vor einiger Zeit von Sagane und Mitarbeitern eine weitere Arbeit über das bei der Einwirkung verlangsamter Neutronen auf Molybdän entstehende Molybdän-Isotop erschienen, in der die japanischen Forscher ihre frühere Angabe von 24 Minuten Halbwertszeit für dieses Isotop auf 18 Minuten reduzieren, und in der sie weiter den Nachweis erbringen, daß aus diesem Molybdän ein Isotop des Elements 43 entsteht, dessen Halbwertszeit sie zu 9 Minuten angeben [4]). In dem oberen eingegrenzten Raum A 1

---

[1]) O. Hahn u. F. Strassmann, Naturwissensch. **28**, 543, 1940. — [2]) W. Bothe u. W. Gentner, ZS. f. Phys. **106**, 236, 1937. — [3]) W. Bothe u. A. Flammersfeld, Naturwissensch. **29**, 194, 1941. — [4]) R. Sagane, S. Kojima, G. Miyamoto, u. M. Ykawa, Phys. Rev. **57**, 750, 1940.

der Fig. 1 sind die von den japanischen Forschern veröffentlichten Kurven für das Molybdän und das Element 43 (Ma) wiedergegeben.

Diese Angaben ließen eine Überprüfung unserer eigenen Befunde aus mehreren Gründen wünschenswert erscheinen. Die genaue Übereinstimmung

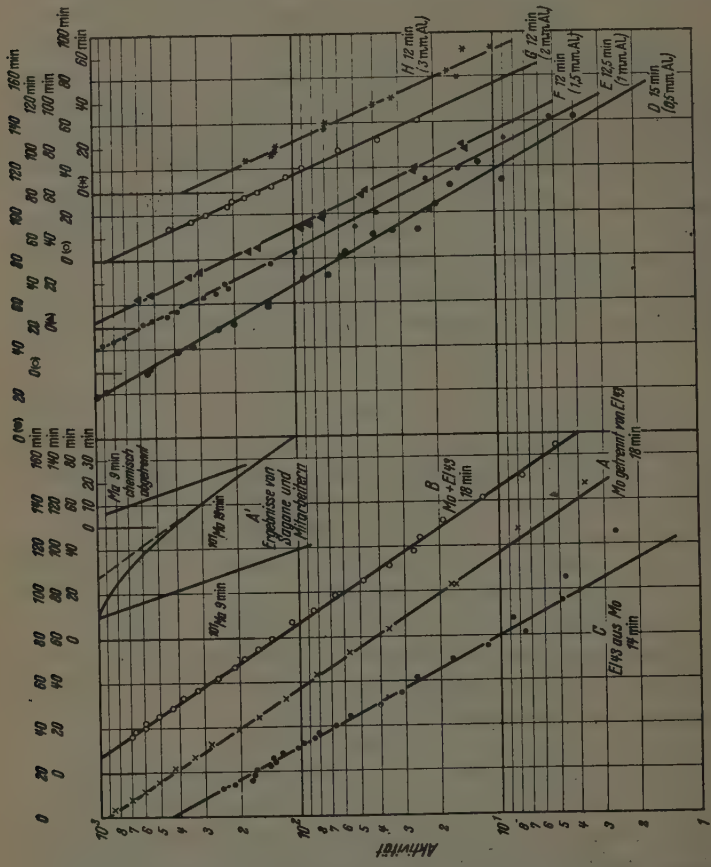


Fig. 1. Abklingungskurven für Molybdän (und Element 43) unter verschiedenen Bedingungen.

der Halbwertszeit des Molybdäns aus der Uranspaltung und des Molybdäns aus dem Molybdän machten es einerseits sehr wahrscheinlich, daß beide 18—19-Minuten-Isotope trotz der früheren gegenteiligen Befunde identisch seien. Andererseits hatten wir bei unserem 18-Minuten-Molybdän aus der Uranspaltung immer einen reinen 18-Minuten-Abfall beobachtet (wenn man von den kleinen Mengen 67-Stunden-Molybdän absieht), auch wenn das

Element 43 nach dem Gang der chemischen Herstellung des Molybdäns sicher von dem letzteren abgetrennt war. Wir hätten also, ähnlich wie die japanischen Forscher, anfangs eine durch die Nachbildung des Elements 43 bewirkte starke Verzögerung in dem Abfall unseres 18-Minuten-Molybdäns beobachten müssen. Dies war aber niemals der Fall, auch wenn die Messung des Molybdäns nur wenige Minuten nach der Abtrennung des Molybdäns vom Element 43 begonnen wurde. Hinzu kommt, daß wir für die Halbwertszeit des Molybdän-Isotops aus dem Molybdän selbst den früheren Wert von 24 Minuten Halbwertszeit bestätigt zu haben glaubten. Allerdings fanden wir dafür nur ungefähr 23 Minuten; doch waren unsere Präparate für eine genauere Bestimmung zu schwach und die Messungen konnten daher nicht lange fortgesetzt werden und keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen.

Wir haben deshalb die Versuche über die bei der Uranspaltung auftretenden Molybdän-Isotope noch einmal aufgenommen und sie auch auf das aus dem Molybdän entstehende Element 43 ausgedehnt. Durch eine höchst merkwürdige Anhäufung schwer miteinander in Übereinstimmung zu bringender Beobachtungen stellten sich diese Untersuchungen als sehr verwickelt heraus. Es ist jetzt aber gelungen, sie in zufriedenstellender Weise aufzuklären[1]). Um die Tatsachen klarzustellen, erscheint es notwendig, den Gang der Untersuchungen an Hand von Kurven im einzelnen zu besprechen, weil sonst die direkten Beobachtungen mit den tatsächlichen Vorgängen nur schwer in Einklang zu bringen wären.

Zunächst haben wir unsere früheren Versuche, bei denen wir den 18-Minuten-Abfall gefunden hatten, nach verschiedenen Richtungen wiederholt und vollauf bestätigt. Die Fällung des Molybdäns geschah als Bleimolybdat oder mittels Oxychinolin (Oxin). In beiden Fällen wird ein aus dem Molybdän gebildetes Element 43 davon abgetrennt. Kurve *A* der Fig. 1 zeigt das Ergebnis bei kurzer Bestrahlung des Urans, wobei das 67-Stunden-Molybdän praktisch noch nicht in Erscheinung tritt. Längere Bestrahlungen ergeben eine zunehmende Beteiligung des langlebigen Molybdäns[2]), doch ist dies für unsere weiteren Diskussionen hier nicht von Interesse, weil man die Kurven leicht auf einen Gehalt an dieser Substanz korrigieren kann. Die Gerade *A* gibt den experimentellen 18-Minuten-Abfall. Die von den japanischen Forschern beobachtete Nachbildung eines kurzlebigen Isotops des Elements 43 wird nicht beobachtet, obwohl die Messung des Molybdäns 4 Minuten nach seiner Reinherstellung begonnen wurde.

[1]) Siehe auch O. Hahn u. F. Strassmann, Naturwissensch. **29**, 369, 1941. — [2]) O. Hahn u. F. Strassmann, ebenda **27**, 451, 1939; **28**, 541, 1940.

Wir haben daraufhin die Fällung des Molybdäns derartig durchgeführt, daß mit ihm auch das Element 43 als sein Folgeprodukt ausfallen mußte. Das vom Uran und den anderen Spaltprodukten befreite Molybdän wurde längere Zeit stehengelassen, um sein Folgeprodukt entstehen zu lassen. Dann wurde das Molybdän + Element 43 mit Rhenium als Träger für das letztere gemeinsam ausgefällt und gemessen: Kurve *B* der Fig. 1 gibt einen solchen Versuch. Die Kurve unterscheidet sich in nichts von der Kurve *A*. Dies sprach gegen die Nachbildung eines Umwandlungsproduktes meßbarer Halbwertszeit, also gegen die Identität des 18-Minuten-Molybdäns aus Uran mit dem aus Molybdän.

Nun wurde wiederum das bei der Uranspaltung entstandene Molybdän hergestellt, dieses eine halbe Stunde stehengelassen und dann eine Abtrennung des gesuchten Elements 43 vom Molybdän mit Rhenium als Träger vorgenommen. Die Ausfällung geschah als Nitronperrhenat, das sich in schön kristallisierbarer Form aus dem Filtrat der Molybdänfällung gewinnen ließ. Aus starken Molybdänpräparaten wurde dabei eine erhebliche Aktivität abgetrennt, die von nichts anderem als einem Isotop des Elements 43 herrühren konnte. In der Kurve *C* der Fig. 1 ist der Verlauf der Aktivität dargestellt. Es ergab sich eine Halbwertszeit von rund 14 Minuten! Wiederholungen unter mehrfach veränderten Arbeitsbedingungen führten zum gleichen Resultat, wenn man von gelegentlichen kleinen Abweichungen von der Geraden gegen Ende der Kurve absieht.

Das Ergebnis war also höchst seltsam: Aus dem aktiven Molybdän entsteht ein Isotop des Elements 43 mit der bequem nachweisbaren Halbwertszeit von etwa 14 Minuten. Eine Nachbildung dieser Substanz aus dem Molybdän ließ sich aber nicht erkennen!

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit konnte man darin finden, daß man die Existenz eines bisher unbekannten weiteren Molybdän-Isotops aus der Uranspaltung annahm, dessen Halbwertszeit kleiner als 18 Minuten sein mußte. Die schnelle Abnahme des (hypothetischen) neuen Isotops konnte dann vielleicht gerade die Nachbildung des 14-Minuten-Körpers aus dem 18-Minuten-Molybdän kompensieren.

Das nächstliegende war also, systematisch Abklingungskurven für aus dem Uran entstandenes Molybdän zu machen, dabei aber die Zeit der Abtrennung des Elements 43 vom Molybdän in möglichst weiten Grenzen zu variieren. Bei sehr schneller Abscheidung des reinen Molybdäns aus dem bestrahlten Uran und sofortiger Messung mußte dabei das hypothetische kurzlebige Isotop noch in erheblichem Maße anwesend sein und sich an einem möglicherweise beschleunigten Anfangsabfall erkennen lassen.

Andererseits sollte nach längerem Stehenlassen des Molybdäns und erst dann erfolgtem Abtrennen des Elements 43 das kurzlebige Molybdän-Isotop zerfallen sein und der dann bestimmte Aktivitätsverlauf des Molybdäns die Form annehmen, die die japanischen Forscher gefunden hatten, die Aktivität also erst sehr langsam abnehmen und allmählich — unter Berücksichtigung des 67-Stunden-Molybdäns — in die 18-Minuten-Kurve übergehen. Nichts dergleichen wurde gefunden. Selbst ein mehr als 2 Stunden altes Molybdän gab den 18-Minuten-Abfall!

Schließlich wurden systematische Abklingungsmessungen durch verschiedene Schichtdicken von Aluminium durchgeführt. Vielleicht hatte das hypothetische Molybdän weichere oder härtere β-Strahlen als der 18-Minuten-Körper und sein Umwandlungsprodukt und ließ sich auf diese Weise erkennen. Diese Arbeitsweise führte tatsächlich zum Erfolg. Die Kurven D—H der Fig. 1 zeigen die am Molybdän beobachteten Halbwertszeiten, wenn die jeweilige Messung durch 0,5, 1,0, 1,5, 2 oder 3 mm Aluminium vorgenommen wurde. Mit zunehmender Schichtdicke werden die Halbwertszeiten kleiner. Von 2 mm Aluminium ab wurde für das Molybdän eine Halbwertszeit von 12 Minuten gefunden, gegenüber den 18 Minuten ohne zusätzliches Aluminium. Die exponentialen Kurven sind gerade Linien; das 18-Minuten-Molybdän war verschwunden, auch die Korrektur für das 67-Stunden-Isotop braucht nicht mehr angebracht zu werden.

Mit diesen Versuchen ist bewiesen, daß in dem neben dem bisher allein bekannten kurzlebigen Molybdän, dessen Halbwertszeit zu 18 Minuten gefunden wurde, ein weiteres von rund 12 Minuten Halbwertszeit bei der Uranspaltung entsteht.

Mit diesem neuen kurzlebigen Molybdän-Isotop konnte man jetzt versuchen, unsere Befunde zu erklären. Wenn man die Aktivität des 12-Minuten-Isotops von der des 18-Minuten-Isotops und seines Umwandlungsproduktes abzog, dann sollte man den Aktivitätsverlauf des reinen 18-Minuten-Körpers und des daraus entstehenden Elements 43 erhalten. Um dies zu tun, mußte man versuchen, die Aktivität des 12-Minuten-Körpers ohne absorbierende Aluminiumfolien zu ermitteln. Wir machten dies dadurch, daß wir die Halbwertsdicke der durchdringenden β-Strahlen des 12-Minuten-Isotops bestimmten und die Absorptionskurve nach Null zurückextrapolierten, wobei wir uns bewußt sind, daß dieses Verfahren nur angenähert richtig zu sein braucht.

Da unsere Präparate nicht so stark waren, um die Messungen an ein und demselben Niederschlag bei seiner schnellen Aktivitätsabnahme durch

eine größere Anzahl von Aluminiumfolien vorzunehmen, sind wir folgendermaßen vorgegangen. Mit einem Präparat wurden nur je zwei Abfallskurven aufgenommen, z. B. durch 0,5 und durch 1,0 mm Aluminium. Eine zweite

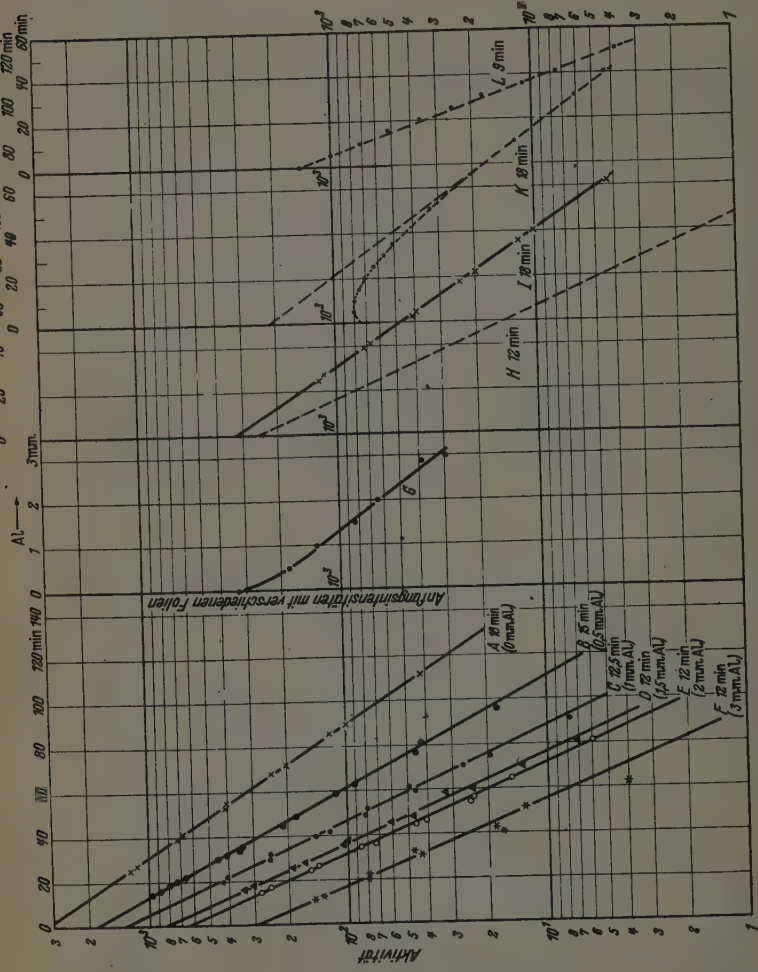


Fig. 2. Bestimmung der Absorptionskurve für die β-Strahlen des 12-Minuten-Körpers und die dadurch ermöglichte graphische Auswertung der experimentellen Abklingungskurve.

Meßreihe wurde dann mit 1,0 und 1,5, eine dritte durch 1,5 und 2,0 und schließlich eine vierte durch 2,0 und 3,0 mm Aluminium durchgeführt. Für jede Aluminiumdicke wurden also zwei Abklingungskurven gemacht; sie

ergaben — wie auch schon in den Kurven D—H der Fig. 1 gezeigt wurde — innerhalb der Meßfehler gerade Linien. Die Halbwertszeit sinkt von 18 Minuten auf 12 Minuten. Die Geraden wurden nunmehr auf die Zeit Null — Zeitpunkt der Unterbrechung der Bestrahlung — zurückextrapoliert und je zwei zu der gleichen Schicht Aluminium gehörige Anfangsaktivitäten gleichgesetzt. Mit dem sich dabei ergebenden Umrechnungsfaktor wurde dann auch die mit dem gleichen Präparat ermittelte Anfangsaktivität der zweiten Aluminiumfolie umgerechnet. Es ergibt sich dabei eine Kurvenschar, die die Anfangsaktivitäten ein und desselben Präparats, durch die steigenden Schichtdicken Aluminium gemessen, wiedergeben. Die Kurven A—F der Fig. 2 zeigen das Ergebnis. In der Kurve G ist die damit erhaltene Absorptionskurve der durchdringenden β-Strahlen des 12-Minuten-Molybdäns dargestellt. In ihrem Hauptverlauf ergibt sich eine geradlinige Absorptionskurve mit einer Halbwertsdicke von 1 mm Aluminium. Zwischen 0 und 0,5 mm Aluminium macht sich die weichere β-Strahlung des 18-Minuten-Körpers noch deutlich bemerkbar. Es handelt sich bei den β-Strahlen des 12-Minuten-Körpers also um eine sehr harte Strahlung, deren Energie man vielleicht mit 5 oder noch mehr Millionen Volt ansetzen kann. Einen Erklärungsversuch für diese harte Strahlung geben wir weiter unten.

Unter der vielleicht etwas willkürlichen Annahme, daß man die Absorptionskurve für diese β-Strahlen geradlinig auf die Schichtdicke Null zurückextrapolieren darf, erhält man den gesuchten Anfangswert für die β-Strahlen des 12-Minuten-Körpers, ohne absorbierende Schichten gemessen, und kennt damit auch den Verlauf der Aktivitätsabnahme für dieses Isotop. Zieht man nun die Aktivität des 12-Minuten-Isotops (Fig. 2, Kurve H) von der direkt gemessenen Gesamtaktivität der beiden Molybdän-Isotope plus dem sich nachbildenden Element 43 ab (Fig. 2, Kurve J), so erhält man den Aktivitätsverlauf für das 18-Minuten-Molybdäm und das daraus entstehende Folgeprodukt. Die Kurve K der Fig. 2 zeigt das Ergebnis: Eine geringe anfängliche Zunahme, hervorgerufen durch die Nachbildung des Elements 43; dann ein Umbiegen und allmähliches Übergehen in eine 18-Minuten-Abnahme. Wird diese nach Null zurückextrapoliert und werden die gefundenen Meßwerte von den Werten für die reine 18-Minuten-Gleichgewichtskurve abgezogen, dann ergibt sich die Kurve L der Fig. 2. Sie entspricht einem exponentialen Abfall von 9 Minuten des aus dem 18-Minuten-Molybdän entstehenden Isotops des Elements 43. Nach Abzug des bei der Uranspaltung zugleich mit dem 18-Minuten-Molybdän entstehenden kürzerlebigen Molybdän-Isotops von 12 Minuten Halbwertszeit fanden wir also eine Kurve, die der der japanischen Forscher durchaus ähnlich ist

(vgl. Fig. 1, Kurve A^1). Sie beweist die Identität des aus dem Molybdän unmittelbar entstehenden Isotops mit unserem bei der Uranspaltung erhaltenen Isotop gleicher Halbwertszeit.

Nun schien nur noch die eine Frage der Aufklärung zu bedürfen, wieso wir für das aus dem Molybdän abgetrennte Element 43 eine Halbwertszeit von 14 Minuten gefunden hatten, gegenüber dem aus der Anstiegskurve des 18-Minuten-Molybdäns errechneten 9-Minuten-Abfall. Die naheliegende Antwort war die, daß das von uns abgetrennte Element 43 ebenfalls komplex ist und aus einem Gemisch des 9-Minuten-Isotops und einem längerlebigen besteht, wobei dann das längerlebige die Tochtersubstanz des 12-Minuten-Molybdäns sein würde. Die geradlinige Abnahme des 12-Minuten-Molybdäns, durch absorbierende Folien gemessen, brauchte nicht gegen diese Annahme zu sprechen; die Strahlen des Elements 43 konnten ja absorbierbarer sein als die des 12-Minuten-Körpers. Um unsere Vermutung über ein zweites Isotop des Elements 43 zu prüfen, haben wir, ähnlich wie vorher beim Molybdän, systematische Abscheidungen des Elements 43 vorgenommen, nachdem sich dieses aus Molybdän verschiedenen Alters hatte nachbilden können. Ein frisches Molybdän, das noch viel 12-Minuten-Körper enthielt, sollte die gesuchte Substanz entstehen lassen. Ein Molybdän, das 80 oder 100 Minuten oder noch länger gestanden hatte, durfte praktisch kein 12-Minuten-Isotop mehr enthalten, also dessen gesuchte Tochtersubstanz nicht mehr nachbilden. Im letzteren Falle wurde also z. B. das 80 Minuten alte Molybdän von dem darin entstandenen Element 43 befreit, und dann erneut 80 Minuten stehen gelassen. Hier durfte sich also nur noch das Folgeprodukt aus dem noch übrigen 18-Minuten-Molybdän, also der 9-Minuten-Körper bilden, denn das 12-Minuten-Molybdän war ja praktisch zerfallen. Eine ganze Reihe derartiger Versuche wurden durchgeführt, immer in der Erwartung, daß die 14-Minuten-Abnahme des komplexen Elements 43 schließlich in die 9-Minuten-Abnahme des reinen Isotops übergehen würde. Immer wieder fanden wir aber ungefähr 14 Minuten Halbwertszeit; allerdings wegen der bei den gealterten Präparaten nur schwachen Intensitäten mit gewissen Streuungen der Werte. Auch Messungen durch absorbierende Schichten, die beim Molybdän zur Auffindung des neuen Isotops geführt hatten, gaben kein anderes Ergebnis. Eine zwanglose Erklärung dieser Befunde konnten wir nicht geben.

Bei diesem Stande der Dinge entschlossen sich die Herren Maurer und Ramm vom Max-Planck-Institut, als sie Kenntnis von unseren seltsamen Ergebnissen erhielten, nun ihrerseits die Frage von der anderen Seite anzupacken, und das Ergebnis von Sagane und Mitarbeitern nach-

zuprüfen[1]). Wir waren daran um so mehr interessiert, als wir ja in guter Übereinstimmung mit den älteren Literaturangaben bei unseren allerdings sehr schwachen Präparaten aus Molybdän etwa 28 Minuten Halbwertszeit gefunden hatten. Diese neue, sehr sorgfältige Untersuchung der Herren Maurer und Ramm hatte ein unerwartetes Ergebnis. Es zeigte sich zunächst, daß die Halbwertszeit des vom Molybdän abgetrennten Folgeproduktes 14 Minuten betrug und nicht 9 Minuten, wie die japanischen Forscher angeben. Das von seinem Folgeprodukt befreite Molybdän verhielt sich genau so, wie die japanischen Forscher angegeben hatten. Eine durch die Nachbildung des Folgeproduktes bedingte starke Verzögerung des Abfalls täuscht zunächst eine längere Halbwertszeit vor, der bei langen Messungen in einen scheinbar exponentialen Abfall von etwa 18 Minuten übergeht (siehe Fig. 3; Kurve *A*). Die aus der experimentellen Kurve und der mit 18 Minuten geradlinig zurückextrapolierten Molybdän-Aktivität „für Gleichgewicht" errechnete Differenz ergab den scheinbaren Abfall des Folgeproduktes mit 9 Minuten Halbwertszeit im Gegensatz zu der direkten Bestimmung von 14 Minuten.

Eine eindeutige Klärung dieser Unstimmigkeit gaben Maurer und Ramm durch eine neue Bestimmung der Halbwertszeit des Molybdäns, die sie auf Grund theoretischer Überlegungen nach einer besonderen Methode durchführten. Sie fanden für das Molybdän innerhalb enger Grenzen die gleiche Halbwertszeit wie für das Folgeprodukt, nämlich 14 Minuten.

In dem seltenen Fall, wenn Tochtersubstanz und Muttersubstanz praktisch die gleiche Halbwertszeit besitzen, ist die graphische Auswertung einer Nachbildungskurve unzulässig.

Im vorliegenden Falle ergibt sich nämlich bei dem graphischen Auswertungsversuch für das Molybdän tatsächlich eine Halbwertszeit von 18 Minuten, für das Folgeprodukt eine Halbwertszeit von 9 Minuten.

Die Ergebnisse von Maurer und Ramm setzten uns in die Lage, nun auch bei den Molybdän-Isotopen der Uranspaltung eine einleuchtende Erklärung unserer Beobachtungen zu geben. Die unabhängig von der Zeit der Abtrennung aus dem Molybdän bestimmte Halbwertszeit von 14 Minuten für das Element 43 macht es äußerst wahrscheinlich, daß Mutter- und Tochtersubstanz identisch sind mit dem aus Molybdän durch langsame Neutronen herstellbaren $^{101}_{42}$Mo von 14 Minuten Halbwertszeit und $^{101}_{43}$Ma von 14 Minuten Halbwertszeit. Bei dem Molybdän aus der

[1]) W. Maurer u. W. Ramm, Naturwissensch. **29**, 368, 1941.

Uranspaltung ist aber der Fall insofern noch verwickelter, als wir ja *drei* Substanzen mit sehr ähnlicher Halbwertszeit vor uns haben, deren Zusammenspiel zu jeder Zeit, gleichgültig, ob das Molybdän mit oder ohne das Element 43, ob es früh oder viel später gemessen wird, innerhalb unserer Meßgenauigkeit den 18-Minuten-Abfall gibt. Die Anwesenheit des 12-Minuten-Molybdän-Isotops verhindert eine genaue direkte Bestimmung der Halbwertszeit der Muttersubstanz des 14-Minuten-Elements 43, die sich selbst bei Abwesenheit des 12-Minuten-Molybdäns nur durchführen läßt, wenn es gelingt, die Nachbildung der Tochtersubstanz zu unterdrücken. Um dies zu erreichen, sind wir, im Anschluß an die Arbeitsweise amerikanischer Forscher mit anderen aktiven Atomarten und im Anschluß an das von Maurer und Ramm beim ^{101}Mo angewandte Verfahren[1]) folgendermaßen vorgegangen. Die aktiven Molybdän-Isotope wurden dank der freundlichen Hilfe der Herren Maurer und Ramm aus einer größeren Menge von Uran in erheblicher Intensität gewonnen und an einigen mg Molybdän als Träger abgeschieden. Die Molybdänlösung wurde auf 100 cm^3 aufgefüllt, und von dieser Vorratslösung wurden in Intervallen von je 6 Minuten unter Zugabe von je 10 mg Molybdän die aktiven Molybdän-Isotope ohne Element 43 abgetrennt. Der störende Einfluß der Nachbildung des 14-Minuten-Isotops des Elements 43 wird dadurch ausgeschaltet. Das aus der Vorratslösung entnommene Volumen wurde nach jedem Versuch um 50% gesteigert, so daß unter Berücksichtigung der Abnahme der Molybdän-Isotope immer ungefähr die gleiche Aktivität gefällt wurde. Jede Fällung wurde in genau gleicher Anordnung auf demselben Schiffchen im selben Zähler je zweimal 2 Minuten lang zur Messung gebracht. Zur Aufnahme der Abklingungskurven wurden dann die experimentell erhaltenen Werte alle auf dieselbe Menge von Molybdänlösung umgerechnet. Das Ergebnis zeigen die Kurven B_1, B_2 und C der Fig. 3. Bei B wurde ohne zusätzliches Aluminium als Absorber gemessen, bei C mit 3 mm Aluminium. Die Kurve B_1 gibt die direkten Messungen wieder. Kurve B_2 gibt dann nach Abzug der sehr geringen Menge von 67 Stunden Körper Halbwertszeiten von rund 12,5 Minuten für das Gemisch der beiden 12- und 14-Minuten-Isotope; die Kurve C ergibt den kleineren Wert von 12 Minuten, weil durch die 3 mm Aluminium das 14-Minuten-Isotop nicht mehr zur Messung kommt.

Die schon weiter oben gefundenen Halbwertszeiten wurden also nach dieser Methode vollauf bestätigt.

---

[1]) W. Maurer u. W. Ramm, l. c.

Auffallend ist es, daß eine Substanz von 12 Minuten Halbwertszeit eine β-Strahlung von mehreren Millionen Volt Energie emittieren soll. Man konnte sich fragen, ob es sich bei dieser Strahlung vielleicht um weiche γ-Strahlen und keine β-Strahlen handelt. Auf Vorschlag von Herrn v. Droste

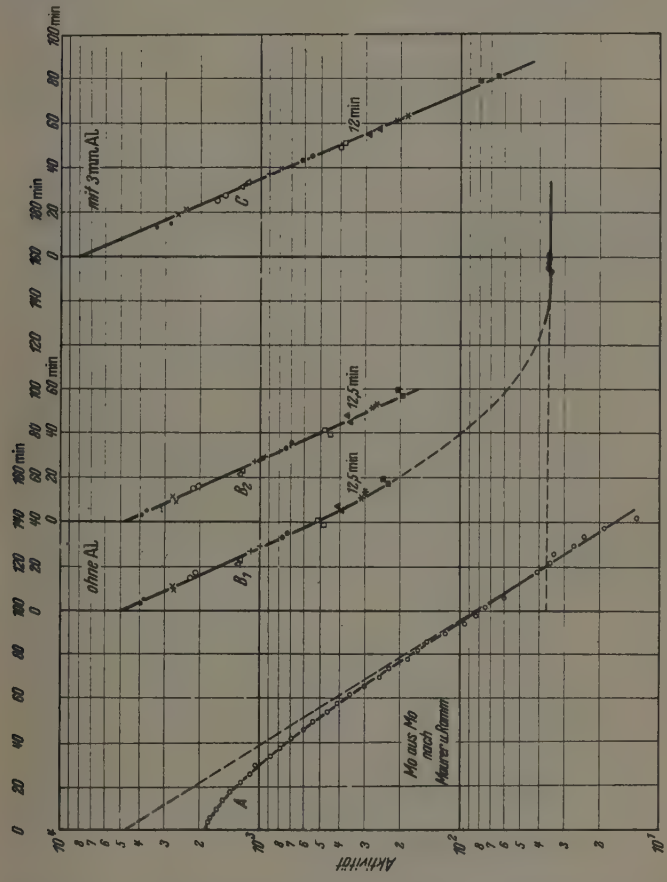


Fig. 3. Bestimmung der Halbwertszeit der Molybdän-Isotope bei Ausschluß der Nachbildung des 14-Minuten-Folgeprodukte.

haben wir eine Anzahl von Absorptionsmessungen dieser Strahlung durch verschiedene Metalle, nämlich Aluminium, Kupfer und Silber gemacht. Nach dem Betrag der Absorption in diesen Metallen sehr verschiedener Kernladung scheint es sich, wie uns Herr v. Droste mitteilte, aber tatsächlich um β-Strahlen und nicht um γ-Strahlen zu handeln. Die einfachste

Erklärung ist deshalb die, daß diese durchdringenden Strahlen gar nicht vom Molybdän selbst, sondern von einem sehr kurzlebigen Zerfallsprodukt, also einem Isotop des Elements 43 herrühren. Die eigentlichen β-Strahlen des 12-Minuten-Molybdäns würden dann wohl weniger durchdringend sein und mit dem 14-Minuten-Molybdän mitgemessen werden. Mit der Annahme eines sehr kurzlebigen Zerfallsprodukts des 12-Minuten-Molybdäns sind auch unsere vergeblichen Versuche zu verstehen, ein Isotop des Elements 43 aus dem 12-Minuten-Molybdän mit nachweisbarer Halbwertszeit zu finden.

Man wird schließlich noch fragen, wieso wir seinerzeit für die Halbwertszeit des aktiven Molybdäns aus dem Molybdän selbst in Übereinstimmung mit den früheren Angaben anderer Forscher, die 24 Minuten Halbwertszeit angegeben hatten, den sehr ähnlichen Wert von 23 Minuten Halbwertszeit gefunden haben. Die Erklärung ist die, daß wir das Molybdän ohne Abtrennung des Elements 43 nach etwa 30 Minuten langer Bestrahlung zur Messung brachten. Da unsere Aktivitäten recht schwach waren, konnten wir nur den Anfang der Abfallskurve aufnehmen, und dieser Anfang gibt bei unserer Bestrahlungszeit, wie bereits erwähnt, sehr angenähert eine gerade Linie mit etwa 23 Minuten Halbwertszeit. Das Steilerwerden der Kurve konnten wir aus Intensitätsgründen nicht mehr erfassen. Daß es sich bei dieser beim Molybdän selbst beobachteten Abklingungskurve um etwas anderes handelte als bei dem Molybdän aus Uran, hatten wir richtig erkannt. Daß der Unterschied aber darin bestand, daß wir in einem Falle nur *ein* Molybdän-Isotop, im anderen ein Gemisch von zwei Molybdän-Isotopen sehr ähnlicher Halbwertszeit vor uns hatten, konnten wir damals noch nicht vermuten.

Aus der Uranspaltung kennen wir also bisher folgende Isotope des Molybdäns und des daraus entstehenden Elements 43:

$$^{101}_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow[14\ \mathrm{Min.}]{\beta} {}^{101}43 \xrightarrow[14\ \mathrm{Min.}]{\beta} {}^{101}_{44}\mathrm{Ru}\ \text{(stabil)},$$

$$^{\ }_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow[12\ \mathrm{Min.}]{\beta} 43 \xrightarrow[\text{sehr kurz?}]{\beta} \mathrm{Ru?}$$

$$^{99}_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow[67\ \mathrm{Std.}]{\beta} {}^{99}43^{*} \xrightarrow[6{,}6\ \mathrm{Std.}]{\text{langsame } \beta} {}^{99}43\ \text{(langlebig)}.$$

Autorenregister.

Ardenne, Manfred von. Elektronen-Übermikroskop mit wahlweise einschaltbarer Elektronensonde zur Herstellung von Elektronenbeugungsdiagrammen bestimmter kleiner Bezirke des Gesichtsfeldes. S. 515.

— Zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen. Eine einfache Methode und ihre Ergebnisse. S. 602.

— Über ein 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop mit Objektabschattungsvorrichtung. 657.

Bârcă-Gălăţeanu, D. Das ultrarote Absorptionsspektrum des Methylenbromiddampfes. S. 589.

Bartholomeyczyk, W., Funk, W. und Seeliger, R. Über das Eindringen von Edelgasen in Metalle. S. 651.

Bay, Z. Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler. S. 227.

— Berichtigung zu „Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler". S. 544.

Bechmann, R. Elastische Schwingungen eines anisotropen Körpers von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds. S. 180.

Betz, Hans. Die Diffusion von Wasserstoff durch Eisen in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit und ihre Beziehung zur Katalyse. S. 100.

Borgnis, F. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien. S. 642.

Budó, A. s. Kovács, I.

Dahl, Odd. Bemerkung zu der Arbeit von L. Fauldrath: Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren. S. 543.

Dahlke, W., und Hettner, G. Die Leistungsgrenze thermischer Strahlungsmeßinstrumente. S. 74.

Dosse, J. Strenge Berechnung magnetischer Linsen mit unsymmetrischer Feldform nach $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. S. 316.

— Zur Ausmessung des Feldes magnetischer Elektronenlinsen. S. 437.

— Über optische Kenngrößen starker Elektronenlinsen. S. 722.

Fauldrath, L. Berichtigung zu „Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren". S. 412.

Finkelnburg, W. s. Schluge, H.

Flügge, S. Einige zusätzliche Überlegungen zu einer Arbeit von Herrn Mattauch. S. 255.

Funk, W. s. Bartholomeyczyk, W.

Gerö, L. Das Bandenspektrum des CD-Moleküls. S. 709.

Glaser, Walter. Zur Herleitung der Geschwindigkeitsformel in der Elektronentheorie der Metalle. S. 20.

— Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. S. 285.

— Berichtigung zu „Über die Ablenkfehler von elektrischen und magnetischen Ablenksystemen". S. 412.

Gombás, Paul. Über die Bindung des metallischen Calciums. S. 322.
Hahn, Otto, und Strassmann, Fritz. Über die bei der Uranspaltung auftretenden Molybdän-Isotope. S. 789.
Hahnemann, H., und Hübner, H.-J. Bemerkung zu der Veröffentlichung von W. Lochte-Holtgreven und H. Maecker „Über eine neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens". S. 409.
Hellwege, K.-H. Über die Strahlungsfelder von Pr^{+++}- und Nd^{+++}-Ionen in hexagonalen Salzkristallen. S. 198.
— Über das Absorptionsspektrum des dampfförmigen Chromoxyfluorids. S. 596.
Hettner, G. s. Dahlke, W.
Hinderer, Hermann, und Walter, Arno. Zur Druckabhängigkeit der Gleichspannungskorona. S. 213.
Hübner, H.-J. s. Hahnemann, H.
Hüniger, M., und Rudolph, J. Über den Aufbau zinnhaltiger Halogenidleuchtstoffe. S. 81.
Hund, F. Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie. S. 1.
Jenckel, Ludolf, und Kopfermann, Hans. Über eine Methode zur Beobachtung sehr kleiner Stark-Effekte. S. 145.
Kopfermann, Hans, und Otzen, Christian. Über den Stark-Effekt der Strontium-I-Resonanzlinie $\lambda = 4607$ Å. S. 156.
— s. Jenckel, Ludolf.
Kovács, I., und Budó, A. Intensitätsverteilung in den Quartett-Dublett-Banden. II. S. 612.
Koyenuma, N. Zur Theorie der Kernisomerie. S. 358.
— Zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung. I. S. 510.
Kutzner, Walther. Phosphoreszenz- und Szintillationsspektren. S. 575.
Leimberger, E. Die Steuerung von edelgasgefüllten Niederdruck-Bogenentladungen mit Hilfe eines Gitters im Plasma der Entladung. S. 621.
Lichtblau, H., und Mattauch, J. Die Isotopenverteilung von Molybdän und die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes. S. 502.
Liempt, J. A. M. v., und Vriend, J. A. de. Die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen. III. S. 18.
Lochte-Holtgreven, W. Erwiderung zu der Bemerkung der Herren H. Hahnemann und H.-J. Hübner. S. 411.
Magnus, Wilhelm. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene. S. 168.
March, A. Raum, Zeit und Naturgesetze. S. 413.
Mattauch, J. Über das Auftreten von isomeren Atomkernen. S. 246.
— s. Lichtblau, H.
Maurer, Werner s. Mehnert, Karl.
Mehnert, Karl. Lichtanregung in leichtem und schwerem Wasserstoff durch Caesiumionen von 2500 bis 25000 e-Volt. S. 41.
— und Maurer, Werner. Umladung mit gleichzeitiger Anregung beim Alkaliionenstoß gegen Wasserstoff, Helium und Quecksilber. S. 55.
Meissner, Joh. Über den Einfluß der metastabilen Anregungszustände auf die normale Stromdichte und den normalen Kathodenfall der Glimmentladung in Edelgasen und Edelgasgemischen. S. 325.
Michel, G. Zum Grundproblem der atmosphärischen Elektrizität. S. 205.
Möglich, F., und Rompe, R. Zur Statistik der Vielfachstöße. S. 119.
Otzen, Christian s. Kopfermann, Hans.
Paetow, H. Eine neue, bei sehr niedrigen Drucken auftretende Form der Feldelektronenemission an Metalloberflächen, die mit isolierenden Stoffen bestäubt sind. S. 399.
Paul, Wolfgang. Eine Atomstrahlapparatur zur lichtstarken Anregung schwer verdampfbarer Elemente. S. 774.
Prietzschk, A. Röntgenuntersuchungen an unterkühltem Äthylalkohol. S. 482.

Raether, H. Über den Aufbau von Gasentladungen. I. S. 375.
— Über den Aufbau von Gasentladungen. II. S. 524.
Recknagel, A. Über die sphärische Aberration bei elektronenoptischer Abbildung. S. 67.
— Theorie des elektrischen Elektronenmikroskops für Selbststrahler. S. 689.
Rogowski, W. Lawinenprodukte, Durchschlagsenkung und fallende Charakteristik. S. 265.
Rohloff, E. Über die innere Reibung von Geigenholz. S. 64.
Rompe, R. s. Möglich, F.
— s. Weizel, W.
Rudolph, J. s. Hüniger, M.
Scheffers. H. Bemerkungen zur allgemeinen Schwankungstheorie. S. 444.
Schluge, H., und Finkelnburg, W. Strahlungsausbeute, Farbe und Temperatur des Beck-Bogens. Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. V. S. 344.
Schmid, Hans. Die Verteilungs- und Auslösekurven der Ultrastrahlungsstöße beim Übergang von Luft nach Blei, Eisen, Aluminium. S. 452.
Schmidt, Annemarie. Messungen an Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen. (Ein experimenteller Beitrag zur Schottkyschen Randschicht-Theorie.) S. 754.
Schulz, P. s. Weizel, W.
Schwarz, Helmut. Der Mechanismus der elektrischen Gasaufzehrung bei Drucken unterhalb 10^{-4} Torr. S. 23.
Seeliger, R. s. Bartholomeyczyk, W.
Strassmann, Fritz s. Hahn, Otto.
Supek, Ivan. Über die elektrische Leitfähigkeit der Metalle. S. 125.
Trost, Adolf. Eine Methode zur Messung hoher Strahlungsintensitäten mit dem Zählrohr. S. 257.
Vriend, J. A. de s. Liempt, J. A. M. v.
Wallauschek, Richard, Elektronenoptische Fokussierung durch quasistatische Bahnen. S. 565.
Walter, Arno s. Hinderer, Hermann.
Weizel, W., Rompe, R., und Schulz, P. Zur Theorie der nicht-stationären Entladungen. I. Die Modulation des Hochdruckbogens durch eine dem Gleichstrom überlagerte Wechselstromkomponente. S. 545.

DATE DUE

OVERNIGHT OCT 7 '35

HIGHSMITH 45-220

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO
3 8198 318 811 450